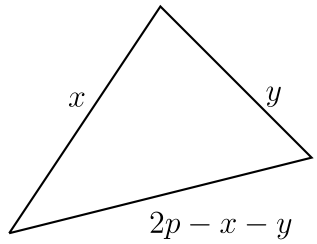
Triangle d'aire maximale

Gilles Auriol
auriolg@free.fr — http ://auriolg.free.fr

Démontrons que parmi les triangles de perimètres fixés, le triangle équilatéral est celui qui a la plus grande aire.

1 En étudiant une fonction

Soit $2p$ ce périmètre fixé, x et y deux des côtés du triangle, alors le troisème côté est $2p-x-y$.



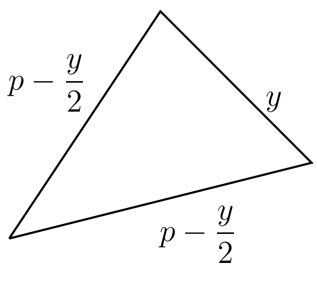
D'après la formule de Héron, l'aire du triangle, si elle existe (c'est-à-dire si l'inégalité triangulaire est vérifiée pour chacun des trois côtés) est

$$f(x,y)=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-(2p-x-y))}=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}.$$

Fixons y et notons $f_y(x)$ l'aire. On a, en dérivant

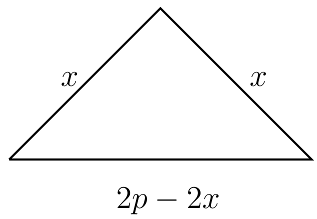
$$f'_y(x)=\frac{p(p-y)(-(x+y-p)+p-x)}{2\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}}=\frac{p(p-y)(2p-y-2x)}{2\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}},$$

puis $f'_y(x)=0\iff x=p-\dfrac{y}{2}$ et cette valeur de x correspond à un maximum de f_y.
Les côtés du triangle valent alors y, $p-\dfrac{y}{2}$ et $2p-\left(p-\dfrac{y}{2}\right)-y=p-\dfrac{y}{2}$. Avec un schéma :



Ce qui traduit que pour un triangle d'aire de perimètre donné et dont l'un des côtés est fixé, le triangle isocèle est le triangle qui maximise l'aire.

Cherchons maintenant parmi les triangles isocèles de base et perimètre fixés lequel à la plus grande aire.
On adopte les notations de la figure ci-dessous.



L'inégalité triangulaire appliquée aux trois côtés du triangle donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2p-2x & \leqslant & x+x \\ x & \leqslant & (2p-2x)+x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \dfrac{p}{2} \leqslant x \\ x \leqslant p \end{array}\right. \iff \frac{p}{2} \leqslant x \leqslant p.$$

Pour un tel x, l'aire du triangle s'écrit

$$f(x) = \sqrt{p(p-x)^2(2x-p)}.$$

La fonction f est dérivable sur $\left]\dfrac{p}{2}; p\right[$ avec

$$\begin{aligned} f'(x) = p\,\frac{-2(p-x)(2x-p)+2(p-x)^2}{2\sqrt{p(p-x)^2(2x-p)}} &= -p\,\frac{(p-x)(2x-p-p+x)}{\sqrt{p(p-x)^2(2x-p)}} \\ &= -p\,\frac{(p-x)(3x-2p)}{\sqrt{p(p-x)^2(2x-p)}} = -p\,\frac{(3x-2p)}{\sqrt{p(2x-p)}}. \end{aligned}$$

Elle s'annule pour $x = \dfrac{2}{3}\,p$ où la fonction f atteint un maximum.
La base vaut alors $2p - 2x = 2p - \dfrac{4}{3}\,p = \dfrac{2}{3}\,p$, le triangle est donc équilatéral.

2 En utilisant encore une fonction

2.1 Résultat préliminaire

Nous allons établir que $\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3$, $\dfrac{1}{27}\,(x+y+z)^3 \geqslant xyz$ et que l'égalité à lieu ssi $x = y = z$.

Soit $f : x \mapsto xyz - \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3$ définie sur $\mathbb{R}_+$. La dérivée de cette fonction est

$$f'(x) = yz - \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2$$

On a

$$f'(x) \geqslant 0 \iff yz \geqslant \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \iff \sqrt{yz} \geqslant \frac{x+y+z}{3} \iff 3\sqrt{yz} - y - z \geqslant x$$

Montrons que $\forall (y,z) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $3\sqrt{yz} - y - z \geqslant 0$ en considérant $g(y) = 3\sqrt{yz} - y - z$ sur $\mathbb{R}_+$. La dérivée vaut
$$g'(y) = \frac{3z}{2\sqrt{yz}} - 1 = \frac{3z - 2\sqrt{yz}}{2\sqrt{yz}}$$
Elle sera négative ssi
$$3z - 2\sqrt{yz} \leqslant 0 \iff 9z^2 \leqslant 4yz \iff z(9z - 4y) \iff 9z - 4y \leqslant 0 \iff \frac{9z}{4} \leqslant y$$
Or $g\left(\dfrac{9z}{4}\right) = \dfrac{5z}{4} \geqslant 0$, donc g admet un minimum positif et on a montré que $3\sqrt{yz} - y - z \geqslant 0$.

Revenons à f. Elle admet un maximum atteint pour $x = 3\sqrt{yz} - y - z$ qui vaut
$$f(3\sqrt{yz} - y - z) = (3\sqrt{yz} - y - z)yz - (\sqrt{yz})^3 = yz(3\sqrt{yz} - y - z - \sqrt{yz}) = -yz(\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 \leqslant 0$$
Donc la fonction f est négative et $xyz \leqslant \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3$ avec égalité ssi le maximum est nul, c'est-à-dire ssi
$$y = 0 \quad \text{ou} \quad z = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{y} - \sqrt{z} = 0$$
Le cas $y = 0$ mène à un maximum valant $x = -z$ d'où, puisque x et z sont positifs, $x = z = 0$. Le cas $z = 0$ est analogue. Le dernier mène à $y = z$ donc $x = 3\sqrt{y^2} - 2y = y$.
Dans tous les cas on a bien $x = y = z$.

2.2 Résultat

Nous allons démontrer que $S \leqslant \dfrac{p^2}{3\sqrt{3}}$, où S est l'aire d'un triangle est p son demi-périmètre.

Il est clair que les réels $p - a$, $p - b$ et $p - c$ où $2p = a + b + c$ sont tous positifs. On peut appliquer l'inégalité de la partie 2.1 :
$$\frac{1}{27}(p - a + p - b + p - c)^3 \geqslant (p-a)(p-b)(p-c).$$
Compte tenu de $p - a + p - b + p - c = 3p - (a + b + c) = 3p - 2p = p$ et multipliant par p,
$$\frac{p^4}{27} \geqslant p(p-a)(p-b)(p-c).$$
En prenant la racine carrée, on fait apparaître dans le membre de droite la formule de Héron, donc
$$\frac{p^2}{3\sqrt{3}} \geqslant S.$$
L'aire du triangle sera maximale ssi $S = \dfrac{p^2}{3\sqrt{3}}$, donc d'après l'étude effectuée dans la partie 2.1, ssi $p - a = p - b = p - c$, c'est-à-dire ssi le triangle est équilatéral.

3 En utilisant la convexité

3.1 Notion de convexité

Soit f est deux fois dérivable sur un intervalle I et $f'' > 0$ sur I. Nous allons démontrer les deux résultas suivants :
1)
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \forall t \in [0,1], \quad f[(1-t)x + ty] \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$$
avec égalité ssi $x = y$ ou $t = 0$ ou $t = 1$.
2)
$$\forall (x,y,z) \in I^3, \quad f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leqslant \frac{1}{3}\left(f(x) + f(y) + f(z)\right)$$
avec égalité ssi $x = y = z$.
Une fonction vérifiant les hypothèses de la proposition est dite convexe.

1) Remarquons d'abord que $(1-t)x + ty \in [x,y]$. On appelle φ la fonction définie sur $[0,1]$ par
$$\varphi(t) = f[(1-t)x + ty] - (1-t)f(x) - tf(y)$$
Elle est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et
$$\varphi''(t) = (y-x)^2 f''[(1-t)x + ty] > 0 \text{ si } x \neq y$$
Donc φ' et strictement croissante donc bijective de $[0,1]$ dans $[\varphi'(0), \varphi'(1)]$, et $0 \in [\varphi'(0), \varphi'(1)]$ car dans le cas contraire φ' garderait un signe constant sans s'annuler et φ serait donc strictement monotone sur $[0,1]$, ce qui est faux puisque $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Soit α ce le réel de $[0,1]$ tel que $\varphi'(\alpha) = 0$.

t	0		α		1
φ'		$-$	0	$+$	
φ	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

donc $\varphi < 0$ avec égalité ssi $t = 0$ ou $t = 1$.
Si $x = y$, l'égalité est triviale.

2) Supposons x, y, z vérifiant $x \leqslant y \leqslant z$, ce qui est possible quitte à permuter.
En appliquant le 1) en prenant $\dfrac{x+y}{2}$ à la place de x, z à la place de y et $t = \dfrac{1}{3}$, on a
$$f\left(\frac{2}{3}\,\frac{x+y}{2} + \frac{1}{3}\,z\right) \leqslant \frac{2}{3}\,f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{1}{3}\,f(z) \tag{1}$$
avec égalité ssi $\dfrac{x+y}{2} = z$, ce qui mène à $x = y = z$ d'après l'hypothèse $x \leqslant y \leqslant z$.
D'autre part, en appliquant 1) avec $t = \dfrac{1}{2}$,
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\,f(x) + \frac{1}{2}\,f(y)$$

avec égalité ssi $x = y$.
En multipliant par $\dfrac{2}{3}$ cette inégalité et en ajoutant $\dfrac{1}{3}f(z)$, on obtient grâce à (**??**),

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leqslant \frac{2}{3}\,f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{1}{3}\,f(z) \leqslant \frac{1}{3}\left(f(x)+f(y)+f(z)\right)$$

L'inégalité de la proposition aura lieu ssi les trois membres de cette inégalité sont égaux entre eux, c'est-à-dire ssi $x = y = z$.

3.2 Résultat

La fonction $f : x \mapsto -\ln x$ et définie et dérivable deux fois sur $]0;+\infty[$, avec $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$, elle est donc convexe et vérifie en particulier le 2) de la partie précédente. On a donc, pour $(x,y,z) \in]0;+\infty[^3$,

$$-\ln\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leqslant \frac{1}{3}\left(-\ln x - \ln y - \ln z\right),$$

soit encore

$$\ln\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geqslant \frac{1}{3}\,\ln(xyz),$$

ou

$$\ln\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geqslant \ln(xyz)^{\frac{1}{3}}$$

et finalement,

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant (xyz)^{\frac{1}{3}},$$

avec égalité ssi $x = y = z$. En élevant au cube, on a

$$\frac{1}{27}\,(x+y+z)^3 \geqslant xyz$$

et trivialement l'inégalité et le cas d'égalité peuvent être prolongé à $(x,y,z) \in \mathbb{R}_+^3$.
Il suffit maintenant d'appliquer le raisonnement de la section précédente.