Quelques beaux résultats d'Analyse en Terminale S

Gilles Auriol

auriolg@free.fr — http ://auriolg.free.fr

Table des matières

Chapitre 1

Autour de e

1.1 Formule célèbre $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

1.1.1 Première preuve

Soit, pour un entier $n \geqslant 1$, $I_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^x \,\mathrm{d}x$.

1.1 Lemme. —

$$I_1 = e - 2$$

Preuve. — On calcule $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (1-x)\, e^x \,\mathrm{d}x$ par une intégration par parties en posant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(x) & = & e^x \\ v(x) & = & 1-x \end{array} \right. \text{ et en choisissant } \left\{ \begin{array}{rcl} u(x) & = & e^x \\ v'(x) & = & -1 \end{array} \right.$$

donc

$$\begin{array}{rcl} I_1 & = & \left[\, e^x (1-x) \,\right]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x \\ & = & -1 + \left[\, e^x \,\right]_0^1 \\ & = & e - 2 \end{array}$$

■

1.2 Lemme. —

$$I_n = -\frac{1}{n!} + I_{n-1}$$

Preuve. — Par une intégration par parties, on va exprimer I_n en fonction de I_{n-1} pour $n \geqslant 2$. On pose

$$\left\{ \begin{array}{rl} u'(x) & = e^x \\ v(x) & = (1-x)^n \end{array} \right. \text{ et on choisit } \left\{ \begin{array}{rl} u(x) & = e^x \\ v'(x) & = -n(1-x)^{n-1} \end{array} \right.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{n!}\left(\left[e^x(1-x)^n\right]_0^1 + n\int_0^1 e^x(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{n!}\left(-1 + n\int_0^1 e^x(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= -\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 e^x(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{n!} + I_{n-1}.
\end{aligned}$$

■

1.3 Lemme. —

$$I_n = e - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$$

PREUVE. — On raisonne par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$. Pour $n = 1$, on a effectivement $I_1 = e - 2$. Supposons l'égalité vraie pour $n - 1$ et montrons qu'elle est alors vraie pour n.

$$\begin{aligned}
I_n &= -\frac{1}{n!} + I_{n-1}\\
&= -\frac{1}{n!} + e - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p!} \quad \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= e - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}.
\end{aligned}$$

■

1.4 Lemme. —

$$\lim_{x\to+\infty} I_n = 0$$

PREUVE. —

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant x \leqslant 1\\
0 &\leqslant 1-x \leqslant 1\\
0 &\leqslant (1-x)^n \leqslant 1\\
0 &\leqslant (1-x)^n e^x \leqslant e^x\\
0 &\leqslant \int_0^1 (1-x)^n e^x\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x \quad \text{par positivité de l'intégrale}\\
0 &\leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!}\left[e^x\right]_0^1\\
0 &\leqslant I_n \leqslant \frac{e-1}{n!}
\end{aligned}$$

■

mais $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e-1}{n!} = 0$, donc, par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$. Ainsi, d'après le lemme 1.4 :

$$\boxed{e = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}}$$

1.1.2 Seconde preuve

Soit un entier $n \geqslant 1$.
On pose $u_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$. Considérons la fonction f_n définie sur $[\,0, 1\,]$ par :

$$f_n(x) = e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

1.5 Lemme. —

$$f_n'(x) = -e^{-x}\frac{x^n}{n!}$$

Preuve. — On va procéder par récurrence sur l'entier n.
Pour $n = 1$, $f_1(x) = e^{-x}(1+x)$ donc $f_1'(x) = -e^{-x}(1+x) + e^{-x} = -e^{-x}\,x$. La récurrence est initialisée.
Montrons que la propriété est héréditaire :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right) \\ &= f_n(x) + e^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Passons au calcul de la dérivée de f_{n+1} :

$$\begin{aligned} f_{n+1}'(x) &= f_n'(x) - e^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + e^{x}\frac{(n+1)\,x^n}{(n+1)!} \\ &= -e^{-x}\frac{x^n}{n!} - e^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + e^{-x}\frac{x^n}{n!} \\ &= -e^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

■

1.6 Lemme. —

$$-\frac{1}{n!} < f_n'(x) < \frac{1}{n!}$$

Preuve. — Déterminons un encadrement de $e^{-x}x^n$ sur $[0, 1]$. La dérivée est $-e^{-x}x^n + ne^{-x}x^{n-1} = x^{n-1}e^{-x}(n-x)$. Elle est du signe de $n - x$, donc positive. Ainsi $x \mapsto e^{-x}x^n$ est croissante. Par suite,

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant x \leqslant 1 \\ e^{-0} \times 0 &\leqslant e^{-x}x^n \leqslant e^{-1} \times 1^n \\ 0 &\leqslant e^{-x}x^n \leqslant e^{-1}. \end{aligned}$$

On peut évidemment "élargir" cette encadrement : $-1 < e^{-x}x^n < 1$. Alors, en divisant par $\dfrac{1}{n!} > 0$,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n!} < -e^x\frac{x^n}{n!} &< \frac{1}{n!} \\ -\frac{1}{n!} < f_n'(x) &< \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

■

> **1.7 Lemme. —**
> $$-\frac{e}{n!} < e - u_n < \frac{e}{n!}$$

Preuve. — Soit $g_n : x \mapsto f_n(x) - \dfrac{1}{n!}x$. La dérivée est $g_n' : x \mapsto f_n'(x) - \dfrac{1}{n!}$. D'après le lemme précédent, $f_n'(x) - \dfrac{1}{n!} < 0$, soit $g_n'(x) < 0$. La fonction g_n est donc strictement décroissante. Il en résulte que

$$\begin{aligned} 0 &< 1 \\ g_n(0) &> g_n(1) \\ f_n(0) - \frac{1}{n!}\times 0 &> f_n(1) - \frac{1}{n!} \\ f_n(0) - f_n(1) &> -\frac{1}{n!}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Soit maintenant $h_n : x \mapsto f_n(x) + \dfrac{1}{n!}x$. La dérivée est $h_n' : x \mapsto f_n'(x) + \dfrac{1}{n!}$. D'après le lemme précédent, $f_n'(x) + \dfrac{1}{n!} > 0$, soit $g_n'(x) > 0$. La fonction g_n est donc strictement croissante. Il en résulte que :

$$\begin{aligned} 0 &< 1 \\ h_n(0) &< h_n(1) \\ f_n(0) - \frac{1}{n!}\times 0 &< f_n(1) - \frac{1}{n!} \\ f_n(0) - f_n(1) < -\frac{1}{n!}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

De (1.1) et (1.2) on tire :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n!} < f_n(0) - f_n(1) < \frac{1}{n!} \\ -\frac{1}{n!} < 1 - \frac{1}{e}u_n < \frac{1}{n!} \\ -\frac{e}{n!} < e - u_n < \frac{e}{n!}. \end{aligned}$$

■

Il évident que $\lim_{n\to+\infty} -\dfrac{e}{n!} = \dfrac{e}{n!} = 0$. En appliquant le théorème des gendarmes à l'inégalité du lemme précédent :

$$\lim_{n\to+\infty} e - u_n = 0 \text{ ou encore } \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = e}.$$

1.2 Une suite convergeant vers $\dfrac{1}{e}$

Soit, pour un entier $n \geqslant 1$, $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1.8 Lemme. —

$$I_1 = \frac{1}{e}$$

Preuve. — On calcule $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (1-x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$ par une intégration par parties. On pose

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(x) & = & e^{-x} \\ v(x) & = & 1-x \end{array}\right. \text{ et on choisit } \left\{\begin{array}{rcl} u(x) & = & -e^{-x} \\ v'(x) & = & -1 \end{array}\right.$$

donc :

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[-e^{-x}(1-x)\right]_0^1 - \int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= 1 + \left[e^{-x}\right]_0^1 \\ &= e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

■

1.9 Lemme. —

$$I_n = \frac{1}{n!} - I_{n-1}$$

Preuve. — Par une intégration par parties, on va exprimer I_n en fonction de I_{n-1} pour $n \geqslant 2$. Posons

$$\left\{\begin{array}{rl} u'(x) & = e^{-x} \\ v(x) & = (1-x)^n \end{array}\right. \text{ et choisissons } \left\{\begin{array}{rl} u(x) & = -e^{-x} \\ v'(x) & = -n(1-x)^{n-1} \end{array}\right.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n!}\left(\left[-e^{-x}(1-x)^n\right]_0^1 - n\int_0^1 e^{-x}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{n!}\left(1 - n\int_0^1 e^{-x}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 e^{-x}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n!} - I_{n-1}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

■

1.10 Lemme. —

$$\sum_{p=2}^{n} \frac{(-1)^p}{p!} = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$$

PREUVE. — On procède par récurrence sur l'entier n.
Pour vérifier que ceci est bien vrai pour $n = 2$, il faut connaître I_2 ; on utilise la relation (1.3) :

$$I_2 = \frac{1}{2!} - I_1 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{e} \text{ donc } \frac{1}{2!} = \frac{1}{e} + I_2.$$

La récurrence est initialisée. Supposons l'égalité vraie pour n et montrons que dans ce cas l'égalité est aussi vérifiée pour $n+1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e} + (-1)^{n+1} I_{n+1} &= \frac{1}{e} + (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{(n+1)!} - I_n\right) \text{ d'après (1.3)} \\
&= \frac{1}{e} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^n I_n \text{ (n et $n+2$ ont même parité)} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{p=2}^{n} \frac{(-1)^p}{p!} \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= \sum_{p=2}^{n+1} \frac{(-1)^p}{p!}.
\end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie pour tout $n \geqslant 2$. ■

1.11 Lemme. —

$$\lim_{x \to +\infty} I_n = 0$$

PREUVE. — Encadrons I_n pour déterminer sa limite.

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant x \leqslant 1 \\
0 &\leqslant 1 - x \leqslant 1 \\
0 &\leqslant (1-x)^n \leqslant 1 \\
0 &\leqslant (1-x)^n e^{-x} \leqslant e^{-x} \\
0 &\leqslant \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 e^{-x} \, \mathrm{d}x \\
0 &\leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!} \left[e^{-x}\right]_0^1 \\
0 &\leqslant I_n \leqslant \frac{e^{-1} - 1}{n!}
\end{aligned}$$

mais $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{-1} - 1}{n!} = 0$, donc par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} I_n = 0$. ■

D'après le lemme 1.10, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum_{p=2}^{n} \frac{(-1)^p}{p!} = \frac{1}{e}$, et en remarquant que $\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} = 0$, on peut rendre cette formule "plus agréable à l'œil" :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} = \frac{1}{e}}$$

1.2.1 Une belle application en probabilité

Un grand merci à Martial pour ce très bel exercice.

► **Énoncé.**
Soit n un entier non nul. n couples se rendent à un bal costumé. Dès que la musique se fait entendre, chaque homme invite aléatoirement n'importe quelle femme à danser.
On note p_n la probabilité pour qu'aucun homme ne danse avec sa femme.
1) Calculer p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5.
2) Conjecturer une formule donnant p_n en fonction de n, puis la démontrer par récurrence.
3) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

► **Correction.**
1) Il est clair que $p_1 = 0$ et $p_2 = \dfrac{1}{2} = 0,5$.
Pour calculer p_3, il est commode de faire un arbre et de compter les cas favorables (on note respectivement H_n et F_n l'homme et la femme du couple n)

$$\begin{array}{llllll}
H_1 & & H_2 & & H_3 & \\
 & & F_2 & \to & F_3 & \text{ne convient pas} \\
 & \nearrow & & & & \\
F_1 & & & & & \\
 & \searrow & & & & \\
 & & F_3 & \to & F_2 & \text{ne convient pas} \\
 & & F_1 & \to & F_3 & \text{ne convient pas} \\
 & \nearrow & & & & \\
F_2 & & & & & \\
 & \searrow & & & & \\
 & & F_3 & \to & F_1 & \text{OK} \\
 & & F_1 & \to & F_2 & \text{OK} \\
 & \nearrow & & & & \\
F_3 & & & & & \\
 & \searrow & & & & \\
 & & F_2 & \to & F_1 & \text{ne convient pas}
\end{array}$$

Il y a donc 6 cas possibles, dont 2 cas favorables et 4 cas défavorables, donc $p_3 = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} = 0,3333...$
Pour la suite, remarquons qu'il y a $n!$ cas possibles.
Notons u_n le nombre de cas favorables et v_n le nombre de cas défavorables (on a donc $u_n + v_n = n!$).

Calculons v_4.
Si le cas est défavorable, c'est soit qu'il y a exactement 4 hommes qui dansent avec leur femme, soit exactement 3, ou 2, ou 1.
★ 4 hommes : 1 cas (chacun invite son épouse à danser, ça fait une seule possibilité).
★ 3 hommes : 0 cas (c'est impossible, sinon que ferait le dernier ?).
★ 2 hommes : pour choisir ces deux hommes, il y a $C_4^2 = 6$ possibilités. Ces 2 hommes étant choisis, que font les 2 autres ?
Chacun est forcé de danser avec la femme de l'autre, il n'y a donc qu'une seule possibilité.
Soit en tout $C_4^2 \times 1 = 6$ cas.

★ 1 homme : pour choisir cet homme, il y a : $C_4^1 = 4$ possibilités.
Cet homme étant choisi, il faut que, parmi les 3 autres, personne ne danse avec sa propre femme, on sait déjà qu'il y a $u_3 = 2$ possibilités.
En tout, il a $C_4^1 \times 2 = 8$ cas favorables.
D'où $v_4 = 1 + 0 + 6 + 8 = 15$, $u_4 = 4! - 15 = 9$ et $p_4 = \dfrac{9}{24} = \dfrac{3}{8} = 0,375$

On calcule de même p_5.
$v_5 = 1 + 0 + C_5^3 \times 1 + C_5^2 \times u_3 + C_5^1 \times u_4$
$v_5 = 1 + 10 + 10 \times 2 + 5 \times 9$
$v_5 = 76$
$u_5 = 5! - 76 = 44$
$p_5 = \dfrac{44}{120} = \dfrac{11}{30} = 0,3666...$

2) En refaisant le même raisonnement que précédemment, on a

$$v_{n+1} = 1 + C_{n+1}^{n-1} u_2 + C_{n+1}^{n-2} u_3 + ... + C_{n+1}^{1} u_n$$

soit, avec la convention $u_0 = 1$ et la remarque que $u_1 = 0$:

$$v_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{n+1-k} u_k, \text{ d'où } v_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!}\, u_k$$

mais $\dfrac{u_k}{k!} = p_k$, donc, avec la convention $p_0 = 1$,

$$v_{n+1} = (n+1)! \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{(n+1-k)!}$$

en utilisant $p_{n+1} = 1 - \dfrac{v_{n+1}}{(n+1)!}$, on obtient

$$p_{n+1} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{(n+1-k)!} \tag{1.4}$$

On connaît donc maintenant p_{n+1} en fonction des précédents.

On vérifie alors "à la main" que
$p_0 = 1$
$p_1 = 1 - \dfrac{1}{1!}$
$p_2 = 1 - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!}$
$p_3 = 1 - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} = \dfrac{1}{3}$
$p_4 = 1 - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} = \dfrac{3}{8}$
de sorte qu'il semblerait que $p_{n+1} - p_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.
On va démontrer cette propriété par "récurrence forte". Elle est trivialement vraie à l'ordre 0.
Hypothèse de récurrence : $\forall k \leqslant n, p_{k+1} - p_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}$.

Ecrivons, d'après (1.4)

$$\left\{\begin{array}{rcl} p_{n+1} & = & 1-\left[\dfrac{p_0}{(n+1)!}+\dfrac{p_1}{n!}+\dfrac{p_2}{(n-1)!}+...+\dfrac{p_n}{1!}\right] \\ p_n & = & 1-\left[\dfrac{p_0}{n!}+\dfrac{p_1}{(n-1)!}+\dfrac{p_2}{(n-2)!}+...+\dfrac{p_{n-1}}{1!}\right] \end{array}\right.$$

d'où, en soustrayant membre à membre,

$$p_n - p_{n+1} = \frac{p_0}{(n+1)!}+\frac{p_1}{n!}+\frac{p_2}{(n-1)!}+...+\frac{p_n}{1!}-\frac{p_0}{n!}-\frac{p_1}{(n-1)!}-...-\frac{p_{n-1}}{1!}$$

on regroupe, en utilisant le fait que $p_0 = 1$,

$$\begin{aligned} p_n - p_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!}+\left(\frac{p_1}{n!}-\frac{p_0}{n!}\right)+\left(\frac{p_2}{(n-1)!}-\frac{p_1}{(n-1)!}\right)+\cdots+\left(\frac{p_n}{1!}-\frac{p_{n-1}}{1!}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{p_{k+1}-p_k}{(n-k)!} \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a alors

$$p_n - p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}}{(n-k)!}+\frac{1}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!(n-k)!}+\frac{1}{(n+1)!}$$

mais

$$C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \Rightarrow \frac{1}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{(n+1)!}$$

d'où

$$p_n - p_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n-1}C_{n+1}^{k+1}(-1)^{k+1}+\frac{1}{(n+1)!}$$

soit, en décalant l'indexation de k de 1 et en factorisant,

$$p_n - p_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left[\sum_{k=1}^{n}C_{n+1}^{k}(-1)^{k}+1\right]$$

ce qui peut s'écrire aussi

$$p_n - p_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k}(-1)^{k} \tag{1.5}$$

Or, grâce à la formule du binôme :

$$(1-1)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^{k}(-1)^{k} = \sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k}(-1)^{k}+(-1)^{n+1}$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k}(-1)^{k} = 0-(-1)^{n+1}$$

soit en remplaçant dans (1.5), $p_n - p_{n+1} = -\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ et en prenant l'opposé, on arrive à la formule voulue.

$\square$

Pour conclure, on écrit $p_n = p_0 + (p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) + ... + (p_n - p_{n-1})$ et on utilise la formule que l'on vient de démontrer ; p_n devient $p_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

3) D'après la section précédente, la conclusion est immédiate : $\boxed{\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{e}}$.

1.3 Une suite convergeant vers $\sqrt{e}$

On pose $I_n = \dfrac{1}{2^{n+1}\, n!} \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{\frac{x}{2}} \, \mathrm{d}x$, pour n entier naturel.

1.12 Lemme. —

$$I_1 = \sqrt{e} - \frac{3}{2}$$

Preuve. — Calculons par une intégration par parties $I_1 = \dfrac{1}{4} \displaystyle\int_0^1 (1-x)\, e^{\frac{x}{2}} \, \mathrm{d}x$. On pose pour cela

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(x) & = & e^{\frac{x}{2}} \\ v(x) & = & 1-x \end{array} \right. \text{ et on choisit } \left\{ \begin{array}{rcl} u(x) & = & 2e^{\frac{x}{2}} \\ v'(x) & = & -1 \end{array} \right.$$

donc :

$$\begin{array}{rcl} I_1 & = & \dfrac{1}{4}\left(2\left[(1-x)\, e^{\frac{x}{2}}\right]_0^1 + 2\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{x}{2}} \, \mathrm{d}x\right) \\ & = & \dfrac{1}{4}\left(2\,(0-1) + 2 \times 2\left[e^{\frac{x}{2}}\right]_0^1\right) \\ & = & \dfrac{1}{4}\left(-2 + 4\,(e^{\frac{1}{2}} - 1)\right) \\ & = & \sqrt{e} - \dfrac{3}{2} \end{array}$$

$\blacksquare$

1.13 Lemme. —

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)!}$$

Preuve. — Intégrons par parties de $I_{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+2}(n+1)!} \displaystyle\int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{\frac{x}{2}} \, \mathrm{d}x$ en posant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(x) & = & e^{\frac{x}{2}} \\ v(x) & = & (1-x)^{n+1} \end{array} \right. \text{ et en choisissant } \left\{ \begin{array}{rcl} u(x) & = & 2e^{\frac{x}{2}} \\ v'(x) & = & -(n+1)\,(1-x)^n \end{array} \right.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \frac{1}{2^{n+2}\,(n+1)!}\left(2\left[(1-x)^{n+1}\,e^{\frac{x}{2}}\right]_0^1 + 2(n+1)\int_0^1 (1-x)^n e^{\frac{x}{2}}\ \mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{2^{n+2}\,(n+1)!}\left(2\,(0-1) + 2(n+1)\int_0^1 (1-x)^n e^{\frac{x}{2}}\ \mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{-2}{2^{n+2}\,(n+1)!} + \frac{2(n+1)}{2^{n+2}\,(n+1)!}\int_0^1 (1-x)^n e^{\frac{x}{2}}\ \mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)!} + \frac{1}{2^{n+1}\,n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{\frac{x}{2}}\ \mathrm{d}x\\
&= I_n - \frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)!},
\end{aligned}$$

■

1.14 Lemme. —

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1!} + \frac{1}{2^2}\,\frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{n!} + I_n$$

Preuve. — Par récurrence sur l'entier $n \geqslant 0$.
D'après le lemme 1.12, $I_1 = \sqrt{e} - \frac{3}{2}$, ce que l'on peut aussi écrire $\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + I_1$. La récurrence est initialisée. Supposons le résultat vrai pour n et montrons qu'il est alors vrai pour $n+1$.
D'après le lemme 1.13, $I_n = I_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)!}$ par conséquent, en remplaçant I_n par cette valeur dans l'hypothèse de récurrence (égalité du lemme 1.14), l'égalité est prouvée pour tout $n \geqslant 1$. ■

1.15 Lemme. —

$$\lim_{x\to\infty} I_n = 0$$

Preuve. — Nous allons encadrer I_n pour déterminer sa limite.

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant x \leqslant 1\\
0 &\leqslant 1-x \leqslant 1\\
0 &\leqslant (1-x)^n \leqslant 1\\
0 &\leqslant (1-x)^n e^{\frac{x}{2}} \leqslant e^{\frac{x}{2}}\\
0 &\leqslant \int_0^1 (1-x)^n e^{\frac{x}{2}}\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 e^{\frac{x}{2}}\ \mathrm{d}x\\
0 &\leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2^n\,n!}\left[2e^{\frac{x}{2}}\right]_0^1\\
0 &\leqslant I_n \leqslant \frac{2\sqrt{e}-2}{2^n\,n!}
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{e}-2}{2^n\,n!} = 0$, le théorème des gendarmes et l'inégalité précédente permettent d'écrire $\lim_{x\to\infty} I_n = 0$. ■

Grâce au lemme 1.14, on obtient :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n\, n!} = \sqrt{e}}$$

1.4 Développement en série de e^x

Cette section va permettre de développer e^a pour tout réel non nul a, comme nous l'avons fait pour e, $\frac{1}{e}$ et $\sqrt{e}$ dans les sections précédentes.
On donnera également les développements de $\cos x$ et $\sin x$.

1.4.1 Développement en série de e^x

Soit a un réel et $n \geqslant 1$ un entier. Considérons la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = (1-x)^n\, e^{ax}$ et l'intégrale $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n\, e^{ax}\ \mathrm{d}x$.

1.16 Lemme. —

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)\, e^{ax}\ \mathrm{d}x = \frac{e^a - a - 1}{a^2}$$

Preuve. — On va intégrer par parties I_1. Pour cela, on pose

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(x) & = & e^{ax} \\ v(x) & = & (1-x) \end{array}\right. \text{ et on choisit } \left\{\begin{array}{rcl} u(x) & = & \frac{1}{a} e^{ax} \\ v'(x) & = & -1 \end{array}\right.$$

alors,

$$\begin{array}{rcl} I_1 & = & \frac{1}{a}\left[(1-x)\, e^{ax}\right]_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{a}\int_0^1 e^{ax}\ \mathrm{d}x \\ & = & -\frac{1}{a} + \frac{1}{a} \times \frac{1}{a}\left[e^{ax}\right]_0^1 \\ & = & -\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \times (e^a - 1). \end{array}$$

■

1.17 Lemme. —

$$I_n = aI_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}$$

Preuve. — Intégrons par parties I_{n+1}. On pose

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(x) & = & e^{ax} \\ v(x) & = & (1-x)^{n+1} \end{array}\right. \text{ et on choisit } \left\{\begin{array}{rcl} u(x) & = & \frac{1}{a} e^{ax} \\ v'(x) & = & -(n+1)\,(1-x)^n \end{array}\right.$$

par suite

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{a}\left[(1-x)^{n+1}\,e^{ax}\right] + \frac{1}{a}(n+1)\int_0^1 (1-x)^n e^{ax}\ \mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{a}\,(0-1) + \frac{1}{a}(n+1)\int_0^1 (1-x)^{n-1} e^{ax}\ \mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{1}{a(n+1)!} + \frac{1}{a}\frac{n+1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-x)^{n-1} e^{ax}\ \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{a(n+1)!} + \frac{1}{a} I_n
\end{aligned}$$

et en multipliant par a l'égalité $I_{n+1} + \dfrac{1}{a(n+1)!} = \dfrac{1}{a} I_n$ on arrive au résultat. ∎

1.18 Lemme. —

$$e^a = \sum_{p=0}^{n} \frac{a^p}{p\,!} + a^{n+1}\, I_n$$

Preuve. — Prouvons cela par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$. Pour $n = 1$:

$$\sum_{p=0}^{1} \frac{a^p}{p!} + a^2 I_1 \quad = \quad \frac{a^0}{0!} + \frac{a^1}{1!} + a^2 \times \frac{e^a - a - 1}{a^2} = 1 + a + e^a - a - 1 = e^a.$$

L'égalité est prouvée pour $n = 1$. Supposons la vraie pour n et montrons qu'elle entraîne l'égalité vraie pour $n+1$.

$$\begin{aligned}
e^a &= \sum_{p=0}^{n} \frac{a^p}{p!} + a^{n+1} I_n \\
&= \sum_{p=0}^{n} \frac{a^p}{p!} + a^{n+1}\left(a I_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\right) \\
&= \sum_{p=0}^{n} \frac{a^p}{p!} + a^{n+2} I_{n+1} + \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \sum_{p=0}^{n+1} \frac{a^p}{p!} + a^{n+2} I_{n+1}
\end{aligned}$$

∎

1.19 Lemme. — *Pour tout réel a positif*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

Preuve. — Considérons en effet un *entier* n_0 tel que $a < n_0$ et choisissons un *entier* $n > n_0$, que l'on écrira $n_0 + k$ (donc k est un entier positif). Dans ces conditions $a^n = a^{n_0+k} = a^{n_0} a^k$ et

$n! = (n_0 + k)! = n_0!\,(n_0+1)\,(n_0+2)\ \ldots\ (n_0+k)$.
Alors
$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n_0}}{n_0!}\,\frac{a}{n_0+1}\cdots\frac{a}{n_0+k}$$
Il est clair que la limite cherchée est la même que celle du produit ci-dessus quand k devient très grand.
Pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant k$, on a $n_0 + i > n_0$, en passant à l'inverse en multipliant par $a > 0$, $\dfrac{a}{n_0+i} < \dfrac{a}{n_0}$. Les $\dfrac{a}{n_0+i}$ étant au nombre de k,
$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n_0}}{n_0!}\,\frac{a}{n_0+1}\cdots\frac{a}{n_0+k} < \frac{a^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{a}{n_0}\right)^k \tag{1.6}$$
Comme $0 \leqslant \dfrac{a}{n_0} < 1$, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{a}{n_0}\right)^k = 0$. De plus $\dfrac{a^{n_0}}{n_0!}$ est une constante, donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\frac{a^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{a}{n_0}\right)^k = 0$. En appliquant le théorème des gendarmes à l'inégalité (1.6) et en utlisant l'inégalité la dernière limite, le lemme est démontré. ■

1.20 Lemme. —
$$\lim_{n\to+\infty} a^{n+1} I_n = 0$$

Preuve. — On encadre d'abord $f(x)$ sur $[\,0,1\,]$:
$$\begin{aligned}
0 &\leqslant x \leqslant 1\\
0 &\leqslant 1-x \leqslant 1\\
0 &\leqslant (1-x)^n \leqslant 1\\
0 &\leqslant (1-x)^n e^{ax} \leqslant e^{ax}\\
0 &\leqslant \int_0^1 (1-x)^n e^{ax}\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 e^{ax}\ \mathrm{d}x\\
0 &\leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!}\frac{1}{a}\left[e^{ax}\right]_0^1\\
0 &\leqslant a^{n+1} I_n \leqslant \frac{e^a-1}{an!}a^{n+1}\\
0 &\leqslant a^{n+1} I_n \leqslant \frac{a^n}{n!}\left(e^a-1\right)
\end{aligned}$$
D'après le lemme précédent $\dfrac{a^n}{n!}$ tend vers 0 quand n devient très grand. Comme $e^a - 1$ est une constante, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{a^n}{n!}\left(e^a-1\right) = 0$. En employant le théorème des gendarmes et l'inégalité précédente, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} a^{n+1} I_n = 0$. ■

Par le lemme 1.18, on obtient :
$$\boxed{e^a = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^p}{p!}} \tag{1.7}$$
En remplaçant a par 1, -1 et $\dfrac{1}{2}$ on retrouve les résultats des précédentes sections concernant les suites convergeant respectivement vers e, $\dfrac{1}{e}$ et $\sqrt{e}$.

Chapitre 2

Autour de π

2.1 Formule célèbre $u_n = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

2.1 Lemme. —

$$1 - t^2 + t^4 + \cdots + (-1)^n t^{2n} = \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}$$

Preuve. — On reconnaît la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $-t^2$. Cette somme vaut donc :

$$\sum_{i=0}^{n} (-t^2)^i = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)} = \frac{1-(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2} = \frac{1+(-1)^{n+2}t^{2n+2}}{1+t^2}$$

Comme n et $n+2$ ont la même parité, $(-1)^{n+2} = (-1)^n$, l'égalité s'en déduit. ■

2.2 Lemme. —

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

Preuve. — En utilisant le lemme 2.1, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\left(1 - t^2 + t^4 + \cdots + (-1)^n t^{2n}\right) - \frac{1}{1+t^2} &= (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \\
\int_0^1 \left(1 - t^2 + t^4 + \cdots + (-1)^n t^{2n}\right)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} &= (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
[t]_0^1 - \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \cdots + (-1)^n \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} &= (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
u_n - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} &= (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Pour $t \in [0,1]$, on a $1 \leqslant 1+t^2 \leqslant 2$, en prenant l'inverse et en multipliant par $t^{2n+2} = t^{2(n+1)} > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} &\leqslant t^{2n+2} \\
\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_0^1 t^{2n+2}\,\mathrm{d}t \\
\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &\leqslant \left[\frac{t^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^1 \\
\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &\leqslant \frac{1}{2n+3} \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

en notant que $|(-1)^n| = 1$ et en utilisant (2.1) et (2.2), on a la majoration $\left|u_n - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{1}{2n+3}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$, on arrive bien à la conclusion voulue. ■

2.3 Lemme. —

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

Preuve. — Nous allons chercher une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $J = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Nous admettons que la fonction tangente est bijective de J sur $[0,1]$. Elle admet donc une fonction réciproque, appelée arctangente, notée arctan ($\tan^{-1}$ sur beaucoup de calculatrice). On admet que cette fonction est dérivable. On a alors :

$$\arctan \circ \tan = \tan \circ \arctan = \mathrm{id}.$$

En dérivant de chaque côté et en utilisant le théorème sur la dérivation de fonction composé ($(u \circ v)' = (u' \circ v) \times v'$) :

$$(\arctan' \circ \tan) \times \tan' = 1.$$

Donc en divisant de chaque côté par $\tan' = 1 + \tan^2$,

$$\arctan' \circ \tan = \frac{1}{1+\tan^2},$$

soit, puisqu'on a posé $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ au début de cette section

$$\arctan' \circ \tan = f \circ \tan.$$

Alors en composant à droite par arctan, la composition étant associative :

$$\begin{aligned}
\arctan' \circ \tan \circ \arctan &= f \circ \tan \circ \arctan \\
\arctan' \circ (\tan \circ \arctan) &= f \circ (\tan \circ \arctan)
\end{aligned}$$

ou, puisque $\tan \circ \arctan = \mathrm{id}$,

$$\arctan' = f.$$

Donc une primitive de f est arctan et

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\arctan x]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

puisque $\tan \dfrac{\pi}{4} = 1$, on a bien $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$. Même raisonnement pour $\arctan 0$. ■

D'après les lemmes 2.2 et 2.3 :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}$$

2.2 Formule célèbre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Soit la suite u_n, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

2.4 Lemme. — *Pour tout k entier non nul,* $L_k = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos kt \ \mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$.

Preuve. — On effectue une première intégration par parties en posant

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_1'(t) & = & \cos kt \\ v_1(t) & = & \dfrac{t^2}{2\pi} - t \end{array}\right. \text{ on choisit } \left\{\begin{array}{rcl} u_1(t) & = & \dfrac{1}{k}\sin kt \\ v_1'(t) & = & \dfrac{t}{\pi} - 1 \end{array}\right.$$

donc

$$\begin{aligned} L_k &= \frac{1}{k}\left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\sin kt\right]_{t=0}^{t=\pi} - \frac{1}{k}\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin kt \ \mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{k}\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin kt \ \mathrm{d}t = -\frac{1}{k}M_k. \end{aligned}$$

On effectue une seconde intégration par partie pour calculer M_k. On pose

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_2'(t) & = & \sin kt \\ v_2(t) & = & \dfrac{t}{\pi} - 1 \end{array}\right. \text{ et on choisit } \left\{\begin{array}{rcl} u_2(t) & = & -\dfrac{1}{k}\cos kt \\ v_2'(t) & = & \dfrac{1}{\pi} \end{array}\right.$$

par suite

$$\begin{aligned} M_k &= -\frac{1}{k}\left[\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\cos kt\right]_{t=0}^{t=\pi} + \frac{1}{\pi k}\int_0^\pi \cos kt \ \mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{k} + \frac{1}{\pi k}\left[\frac{1}{k}\sin kt\right]_{t=0}^{t=\pi} \\ &= -\frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Et en revenant à L_k on a bien $L_k = \frac{1}{k^2}$. ∎

On pose pour tout $t \in [0, \pi]$ et $n \geqslant 1$, $D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt$.

2.5 Lemme. —
$$u_n = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) D_n(t)\ \mathrm{d}t$$

Preuve. — Montrons ceci par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$.
Notons d'abord que $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{6\pi}\right]_0^\pi - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi^2}{3}$. Ce calcul va être exploité tout de suite.
Pour $n = 1$, calculons

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\left(\frac{1}{2} + \cos t\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \mathrm{d}t + \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos t\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{-\pi^2}{3} + \frac{1}{1^2} = \frac{1}{1^2} = u_1
\end{aligned}$$

l'égalité est donc vérifiée pour $n = 1$. Supposons l'égalité établie pour n et montrons qu'elle entraîne la proposition vraie pour $n + 1$.

$$\begin{aligned}
u_n + \frac{1}{(n+1)^2} &= \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) D_n(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) D_n(t)\ \mathrm{d}t + L_{n+1} \\
&= \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) (D_n(t) + \cos(n+1)t)\ \ \mathrm{d}t \\
u_{n+1} &= \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) D_{n+1}(t)\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Cette égalité est vraie pour tout $n \geqslant 1$. ∎

On pose, encore pour $n \geqslant 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) D_n(t)\ \mathrm{d}t$ on a donc $u_n = \dfrac{\pi^2}{6} + I_n$.

2.6 Lemme. —
$$2\cos a \sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$$

Preuve. — On utilise les formules $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ et $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$. En soustrayant la seconde égalité à la première, on obtient le résultat du lemme. ∎

2.7 Lemme. — *Pour $n \geqslant 1$ et $t \in]0, \pi]$:*

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

Preuve. — Procédons par récurrence sur n.
Remarquons d'abord que pour $t \in]\,0,\pi\,]$, on a $\dfrac{t}{2} \in]\,0,\pi/2\,]$ et $\sin\dfrac{t}{2} \in]\,0,1\,]$, ainsi l'expression ci-dessus est définie.

$$\begin{aligned}
2\cos t \sin\frac{t}{2} &= \sin\frac{3}{2}t - \sin\frac{t}{2} \text{ (d'après le lemme 2.6)}\\
2\cos t \sin\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2} &= \sin\frac{3}{2}t\\
2\sin\frac{t}{2}\left(\cos t + \frac{1}{2}\right) &= \sin\frac{3}{2}t\\
\cos t + \frac{1}{2} &= \frac{\sin\frac{3}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}
\end{aligned}$$

La formule est donc vraie pour $n=1$. Montrons que si elle est vraie pour n elle est vraie pour $n+1$.

$$\begin{aligned}
D_n(t) + \cos(n+1)t &= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} + \cos(n+1)t\\
&= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t + 2\cos(n+1)t\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\\
&= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t + \sin\left(\frac{t}{2}+(n+1)t\right) - \sin\left((n+1)t-\frac{t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\\
&= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t + \sin\left((n+1)+\frac{1}{2}\right)t - \sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\\
D_{n+1}(t) &= \frac{\sin\left((n+1)+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}
\end{aligned}$$

■

Soit la fonction g définie sur $[0,\pi]$ par :

$$g(0) = -1 \text{ et, si } t \neq 0,\ g(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

2.8 Lemme. — *La fonction g est continue sur $[0,\pi]$.*

Preuve. —

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{2}\left(\frac{t}{\pi}-2\right)}{2\sin\frac{t}{2}} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \times \frac{\frac{t}{\pi}-2}{2}\right)$$

En se rappelant que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, donc que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} = 1$, on obtient finalement :

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right) \times \lim_{t\to 0}\left(\frac{\frac{t}{\pi}-2}{2}\right) = 1\times(-1) = -1 = g(0)$$

La fonction g est donc continue en 0. Comme $t \mapsto \dfrac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin\frac{t}{2}}$ est continue sur $]0,\pi]$ (puisque dans ce cas là $\sin\dfrac{t}{2}$ varie dans $]0,1]$), g est continue sur $[0,\pi]$. ■

2.9 Lemme. — *La fonction* $h : t \mapsto g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t$ *est continue sur* $[0,\pi]$.

Preuve. — Il est clair qu'elle est continue sur $]0,\pi]$.
Le problème vient au point 0.

$$\lim_{t\to 0} h(t) = \lim_{t\to 0} g(t) \times \lim_{t\to 0} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t = -1\times 0 = 0$$

et $h(0) = g(0)\times\sin 0 = -1\times 0 = 0$, donc h est continue en 0, donc sur l'intervalle $[0,\pi]$. ∎

2.10 Lemme. —

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right) D_n(t)\ dt = \int_0^\pi g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\ dt$$

Preuve. — Il est clair que sur l'intervalle $]0,\pi]$, on a

$$\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right) D_n(t) = \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} = g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t = h(t)$$

Pour $t=0$, le premier membre de cette égalité vaut $0\times D_n(0)=0$ et $h(0)$ vaut $(-1)\times\sin 0 = 0$.
Cette égalité est donc valable sur $[0,\pi]$.
Comme h est continue sur cet intervalle (par le lemme précédent) l'intégrale de 0 à π de h a un sens, d'où l'égalité. ∎

Nous allons maintenant donner un encadrement de g sur $[0,\pi]$ (son ensemble de définition).
Pour cela nous avons besoin d'étudier une fonction auxiliaire.

2.11 Lemme. — *La fonction* $h : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ *est strictement décroissante sur* $I =]0,\frac{\pi}{2}[$.

Preuve. — h est dérivable sur I ; sa dérivée est $h'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$, elle est du signe de $x\cos x - \sin x$ puisque pour $x\in I$, $x^2>0$. Par ailleurs, toujours pour $x\in I$, $\cos x \in]0,1[$ donc $\cos x > 0$. On peut donc dire que la dérivée de h est du signe de

$$\varphi(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{\cos x} = x - \tan x$$

Le signe de φ est immédiat en remarquant que $\varphi'(x) = 1-(1+\tan^2 x) = -\tan^2 x < 0$ sur I, c'est-à-dire que φ est strictement décroissante, et que $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ implique alors $\varphi(0) > \varphi(x)$ ou encore $\varphi(x) < 0$ pour $x\in I$.
La dérivée de h est donc strictement négative et h est strictement décroissante sur I. ∎

2.12 Lemme. — *Pour* $t \in [0,\pi]$, $-\dfrac{\pi}{2} < g(t) < -\dfrac{1}{2}$

Preuve. — Pour $x \in I$, on a $\dfrac{\pi}{2} > x > 0$ donc, en utilisant le fait que h est décroissante sur I,

$$\begin{aligned} h\left(\frac{\pi}{2}\right) &< h(x) < \lim_{x\to 0} h(x) \\ \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} &< \frac{\sin x}{x} < \lim_{x\to 0} h(x) \\ \frac{2}{\pi} &< \frac{\sin x}{x} < 1 \\ \frac{2x}{\pi} &< \sin x < x \end{aligned}$$

En posant $x = \dfrac{t}{2}$ (Maintenant on peut donc prendre $t \in J =]0,\pi[$)

$$\begin{aligned} \frac{t}{\pi} &< \sin\frac{t}{2} < \frac{t}{2} \\ \frac{2t}{\pi} &< 2\sin\frac{t}{2} < t \\ \frac{1}{t} &< \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} < \frac{\pi}{2t} \end{aligned}$$

Le trinôme $\dfrac{t^2}{2\pi} - t$, de racines 0 et 2π est négatif sur $[0,2\pi]$, et en particulier sur J. Par suite

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) &> \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\frac{t}{2}} > \frac{\pi}{2t}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \\ -\frac{\pi}{2} + \frac{t}{4} &< g(t) < -1 + \frac{t}{2\pi} \qquad (2.3) \end{aligned}$$

Pour $t \in J$, on a l'encadrement $0 < t < \pi$ d'où $0 < \dfrac{t}{2\pi} < \dfrac{1}{2}$ et $-1 < -1 + \dfrac{t}{2\pi} < -\dfrac{1}{2}$. On a aussi évidemment $-\dfrac{\pi}{2} < -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{t}{4}$, on peut donc écrire grâce à (2.3) et ces deux observations :

$$-\frac{\pi}{2} < g(t) < -\frac{1}{2}$$

Pour l'instant, notre encadrement n'est valable que pour $t \in J$, mais $g(0)$ et $g(\pi)$ valant respectivement -1 et $-\dfrac{\pi}{4}$, ils rentrent tous les deux dans l'encadrement obtenu. Donc cet encadrement est valable pour $t \in [0,\pi]$. ∎

2.13 Lemme. —

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$$

PREUVE. — Pour $n \geqslant 1$, on pose :

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^\pi \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t \; \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left[-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]_0^\pi \\ &= \frac{-2}{2n+1}\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi - \cos 0\right) \\ &= \frac{2}{2n+1} \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi = 0$ pour tout n entier.

D'après le lemme 2.12, on a l'encadrement suivant :

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t &\leqslant g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t \leqslant -\frac{1}{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t \\ -\frac{\pi}{2}A_n &\leqslant I_n \leqslant -\frac{1}{2}A_n \end{aligned}$$

selon que $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t$ est positif ou négatif. Clairement $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{2n+1} = 0$, donc, grâce au théorème des gendarmes et à l'encadrement précédent, on arrive à la conclusion du lemme. ■

Utilisant (2.2) et le lemme précédent, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi^2}{6} + I_n = \frac{\pi^2}{6}$. Enfin le résultat tant attendu :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

2.3 Formule de Wallis

Soit n un entier naturel. Considérons l'intégrale $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \; \mathrm{d}x$.

2.14 Lemme. — *Pour $n \geqslant 2$,*

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

PREUVE. — Intégrons par parties I_n, en posant

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(x) &=& \sin x \\ v(x) &=& \sin^{n-1} x \end{array}\right. \text{ et en choisissant } \left\{\begin{array}{rcl} u(x) &=& -\cos x \\ v'(x) &=& (n-1)\sin^{n-2}\cos x \end{array}\right.$$

Donc

$$\begin{aligned}
I_n &= \left[-\cos x \sin^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \,\mathrm{d}x \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \,\mathrm{d}x \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x) \,\mathrm{d}x \\
&= (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} \,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x\right) \\
&= (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right)
\end{aligned}$$

Arrangeons un peu cette égalité :

$$\begin{aligned}
I_n + (n-1)I_n &= (n-1)I_{n-2} \\
I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2}
\end{aligned}$$

■

Calculons I_2 et I_3 dont on aura besoin par la suite

$$I_2 = \frac{1}{2}I_0 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} \tag{2.4}$$

$$I_3 = \frac{2}{3}I_1 = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \tag{2.5}$$

2.15 Lemme. — *Pour $n \geqslant 1$:*

$$I_{2n} = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\times\frac{\pi}{2}$$

Preuve. — Résonnons par récurrence sur $n \geqslant 1$.
D'après (2.4), la propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons-la vraie pour n et montrons qu'elle est alors vraie pour $n+1$. D'après le lemme 2.14 :

$$\begin{aligned}
I_{2(n+1)} &= \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} I_{2n} \\
&= \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}\times\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\times\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)\times(2(n+1)-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n\times 2(n+1)}\times\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

■

2.16 Lemme. — *Pour $n \geqslant 1$:*

$$I_{2n+1} = \frac{2\times 4\times\cdots\times 2n}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}\times\frac{1}{2n+1}$$

PREUVE. — Encore par récurrence sur $n \geqslant 1$.
D'après (2.5), la propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons-la vraie pour n et montrons qu'elle est alors vraie pour $n + 1$. Toujours d'après le lemme 2.14 :

$$\begin{aligned} I_{2(n+1)+1} &= \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} I_{2n+1} \\ &= \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} \times \frac{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)} \times \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2(n+1)+1} \times \frac{2 \times 4 \times \cdots \times 2n \times 2(n+1)}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1)} \end{aligned}$$

■

2.17 Lemme. — *La suite I_n est décroissante ($n \geqslant 1$).*

PREUVE. — Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $n \geqslant 0$ entier,

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \sin x \leqslant 1 \\ 0 &\leqslant \sin^{n+1} x \leqslant \sin^n x \\ 0 &\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x \\ 0 &\leqslant I_{n+1} \leqslant I_n \end{aligned}$$

■

2.18 Lemme. —

$$\lim_{n \to \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$$

PREUVE. — D'après le lemme précédent, la suite (I_n) est décroissante, donc $I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant I_{n-1}$ et en s'aidant du lemme 2.14, on peut écrire $\frac{n}{n+1} I_{n-1} \leqslant I_n \leqslant I_{n-1}$. Si nous remplaçons n par $2n+1$:

$$\begin{aligned} \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n} &\leqslant I_{2n+1} \leqslant I_{2n} \\ \frac{2n+1}{2n+2} &\leqslant \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leqslant 1 \end{aligned}$$

en choisissant $n \geqslant 1$. Comme $\lim_{n \to \infty} \frac{2n+1}{2n+2} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n\left(1 + \frac{1}{2n}\right)}{2n\left(1 + \frac{2}{2n}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 + \frac{2}{2n}} = 1$, il résulte de cette inégalité et du théorème des gendarmes que $\lim_{n \to \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$. ■

Calculons le quotient $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$:

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{\frac{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)} \times \frac{1}{2n+1}}{\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \times \frac{\pi}{2}} = \left(\frac{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}\right)^2 \times \frac{1}{2n+1} \times \frac{2}{\pi}$$

Donc

$$\left(\frac{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}\right)^2 \times \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$$

En passant à la limite et en utilisant le lemme précédent on obtient la formule de Wallis :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}\right)^2\times\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}} \tag{2.6}$$

2.4 Une suite convergeant vers $\dfrac{2}{\pi}$

Le but de cette section est de montrer que la suite

$$u_n=\frac{1}{n}\left[\sin 0+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\,\pi}{n}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{(n-1)\,\pi}{n}\right)\right]$$

avec $n\geqslant 2$, converge vers $\dfrac{2}{\pi}$. On peut aussi écrire u_n sous forme condensée $u_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}\sin\left(\frac{p\,\pi}{n}\right)$, ou encore, en posant $f : x\to\sin\pi x$

$$u_n=\frac{1}{n}\left[f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

On pose également $f_n=1+e^{i\frac{\pi}{n}}+e^{i\frac{2\pi}{n}}+\cdots+e^{i\frac{(n-1)\,\pi}{n}}$.

2.19 Lemme. —

$$u_n=\frac{1}{n}\mathrm{Im}(f_n)\text{ et }\mathrm{Im}(f_n)=\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

Preuve. — Comme pour tout α on a l'égalité $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$ (formule de Moivre), $u_n=\dfrac{1}{n}\mathrm{Im}(f_n)$ est claire.
f_n est la somme de n termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $e^{i\frac{\pi}{n}}$, donc :

$$f_n=1\times\frac{1-\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}=\frac{1-e^{i\pi}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}=\frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$$

Faisons apparaître les deux parties de ce complexe :

$$\frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}=\frac{2}{e^{i\frac{\pi}{2n}}\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}}-e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)}=\frac{2}{e^{i\frac{\pi}{2n}}}\times\frac{-1}{e^{i\frac{\pi}{2n}}-e^{-i\frac{\pi}{2n}}}$$

Comme $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$ et $e^{i(-\alpha)}=\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)=\cos\alpha-i\sin\alpha$ en soustrayant la seconde égalité à la première :

$$e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}=2i\sin\alpha$$

Utilisant cette formule avec $\alpha=\dfrac{\pi}{2n}$:

$$\frac{2}{e^{i\frac{\pi}{2n}}}\times\frac{-1}{e^{i\frac{\pi}{2n}}-e^{-i\frac{\pi}{2n}}}=\frac{2}{e^{i\frac{\pi}{2n}}}\times\frac{-1}{2i\sin\frac{\pi}{2n}}=\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{2n}}}\times\frac{-1}{i\sin\frac{\pi}{2n}}$$

Pour faire disparaître ce i au dénominateur, il nous suffit de multiplier "en haut et en bas" par i. Par ailleurs $\dfrac{1}{e^\alpha} = e^{-\alpha}$. Par suite :

$$\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{2n}}} \times \frac{-1}{i\sin\frac{\pi}{2n}} = e^{-i\frac{\pi}{2n}} \times \frac{-i}{i^2\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{i}{\sin\frac{\pi}{2n}} \times e^{-i\frac{\pi}{2n}}$$

En passant à la forme trigonométrique de $e^{-i\frac{\pi}{2n}}$:

$$\begin{aligned}\frac{i}{\sin\frac{\pi}{2n}} \times e^{-i\frac{\pi}{2n}} &= \frac{i}{\sin\frac{\pi}{2n}} \times \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2n}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2n}\right)\right] \\ &= \frac{i\cos\left(-\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{\pi}{2n}} - \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{\pi}{2n}}\end{aligned}$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, donc $\mathrm{Im}(f_n) = \dfrac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$. ■

Il nous reste à calculer la limite de u_n. En utilisant le lemme précédent :

$$u_n = \frac{1}{n} \times \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{2}{\pi} \times \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} \times \cos\frac{\pi}{2n}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi}{2n} = 0$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = 1$ (rappelons que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sin x} = 1$). De plus $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\dfrac{\pi}{2n} = \cos 0 = 1$. On arrive au résultat :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{2}{\pi}}$$

Chapitre 3

Formule de Stirling

Le but est de montrer que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, ce qui signifie que le quotient de ces deux quantités tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. On peut aussi écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \sqrt{2\pi}$.

Soit, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$ et $v_n = \ln u_n$. On aura remarqué que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > 0$.
Dans une première partie on va démontrer que v_n est décroissante et minorée pour ensuite affirmer qu'elle est convergente. On en déduira l'existence d'un réel qui est la limite de u_n (ce réel vaut $\sqrt{2\pi}$).

3.1 Lemme. —

$$v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{1}{2}(2n+1)\ln\frac{1-\frac{1}{2n+1}}{1+\frac{1}{2n+1}}$$

Preuve. — Calculons d'abord le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)!\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}{\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}\sqrt{n+1}\; n!} \\
&= (n+1)\sqrt{\frac{n}{n+1}}\;\frac{n^n}{e^n} \times \frac{e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \\
&= \sqrt{\frac{n}{n+1}}\;\frac{e^{n+1}}{e^n} \times \frac{n^n}{(n+1)^n} \\
&= e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \ln u_{n+1} - \ln u_n \\
&= \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \\
&= \ln \left(e \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right) \\
&= \ln e + \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+\frac{1}{2}} \\
&= 1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{n}{n+1} \\
&= 1 + \frac{1}{2}(2n+1) \ln \frac{2n}{2n+2} \\
&= 1 + \frac{1}{2}(2n+1) \ln \frac{2n+1-1}{2n+1+1} \\
&= 1 + \frac{1}{2}(2n+1) \ln \frac{1 - \frac{1}{2n+1}}{1 + \frac{1}{2n+1}}
\end{aligned}$$

■

3.2 Lemme. — *Pour tout* $x \in I = [0, \frac{1}{2}]$, $-\frac{2}{3}x^3 \leqslant \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) + x \leqslant 0.$

Preuve. — Étudions le sens de variation des fonctions f et g définies sur $I = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ par $f : x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) + x + \frac{2}{3}x^3$ et $g : x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) + x$.

Remarquons que $\frac{1-x}{1+x} = \frac{2-(1+x)}{1+x} = \frac{2}{x+1} - 1$.

On calcule d'abord la dérivée de $\ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \left(\frac{2}{x+1} - 1 \right) \\
&= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{2}{x+1} - 1 \right)}{\frac{1-x}{1+x}} \\
&= \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{1+x}{1-x} \\
&= \frac{-2}{(x+1)(1-x)} \\
&= \frac{2}{x^2-1} \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Puis la dérivée de f :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2} \frac{2}{x^2-1} + 2x^2 + 1 \text{ d'après (3.1)} \\
&= \frac{x^2(2x^2-1)}{x^2-1}
\end{aligned}$$

Il est très facile de voir que, pour $x \in I$, $x^2 \geqslant 0$, $2x^2 - 1 < 0$ et $x^2 - 1 < 0$; donc $f'(x)$ est positive sur I et f est croissante, donc pour $x \in I$,

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant x \\ f(0) &\leqslant f(x) \\ 0 &\leqslant f(x) \\ -\frac{2}{3}x^3 &\leqslant \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + x \end{aligned} \tag{3.2}$$

Calculons la dérivée de g :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2}\,\frac{2}{x^2-1} + 1 \text{ d'après (3.1)} \\ &= \frac{x^2}{x^2-1} \end{aligned}$$

On voit très facilement que $g'(x) \leqslant 0$; g est décroissante sur I, donc pour $x \in I$

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant x \\ g(x) &\leqslant g(0) \\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + x &\leqslant 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

D'après (3.2) et (3.3), on a bien l'inégalité annoncé dans le lemme, pour $x \in I$. ■

3.3 Lemme. — *La suite v_n est décroissante*

Preuve. — Pour $n \geqslant 1$, on a bien sur $\frac{1}{2n+1} \in I$. On peut alors appliquer l'inégalité du lemme précédent avec $x = \frac{1}{2n+1}$:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} \times \frac{1}{(2n+1)^3} &\leqslant \frac{1}{2}\ln\frac{1-\frac{1}{2n+1}}{1+\frac{1}{2n+1}} + \frac{1}{2n+1} \leqslant 0 \\ -\frac{2}{3(2n+1)^2} &\leqslant \frac{1}{2}(2n+1)\ln\frac{1-\frac{1}{2n+1}}{1+\frac{1}{2n+1}} + 1 \leqslant 0 \\ -\frac{2}{3(2n+1)^2} &\leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

D'où l'on tire $v_{n+1} \leqslant v_n$. ■

Posons, pour $n \geqslant 1$, $K_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}$.

3.4 Lemme. — *Pour $n \geqslant 1$, $K_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$ et a fortiori $K_n \leqslant 2$.*

PREUVE. — Par récurrence. Pour $n = 1$, on a $K_1 = 1$.
Montrons que la propriété est héréditaire ($n \geqslant 1$) :

$$\begin{aligned} n &\leqslant n+1 \\ n(n+1) &\leqslant (n+1)^2 \\ \frac{1}{(n+1)^2} &\leqslant \frac{1}{n(n+1)} \\ \frac{1}{(n+1)^2} &\leqslant \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} \\ \frac{1}{(n+1)^2} &\leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre cette inégalité et celle de l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} &\leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + 2 - \frac{1}{n} \\ K_{n+1} &\leqslant 2 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$ ■

3.5 Lemme. — *Pour* $n \geqslant 2$, $v_n \geqslant 1 - \frac{1}{6} K_{n-1}$.

PREUVE. — En premier lieu minorons $-\frac{2}{3(2n+1)^2}$ pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} 12n + 3 &\geqslant 0 \\ 12n^2 + 12n + 3 &\geqslant 12n^2 \\ 3(2n+1)^2 &\geqslant 2 \times 6n^2 \\ \frac{1}{6n^2} &\geqslant \frac{2}{3(2n+1)^2} \\ -\frac{1}{6n^2} &\leqslant -\frac{2}{3(2n+1)^2} \end{aligned}$$

En reportant cette minoration dans (3.4) :

$$-\frac{1}{6n^2} \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant 0 \tag{3.5}$$ ■

Passons maintenant à la démonstration du lemme. On montre par récurrence l'inégalité annoncée, pour $n \geqslant 2$.
Ceci est vrai pour $n = 2$, en effet :

$$v_2 = \ln u_2 = \ln\left(\frac{2!}{\left(\frac{2}{e}\right)^2 \sqrt{2}}\right) = \ln\left(\frac{2e^2}{4\sqrt{2}}\right) = \ln\left(2^{-\frac{3}{2}} e^2\right)$$

$$= -\frac{3}{2}\ln 2 + 2\ln e = -\frac{3}{2}\ln 2 + 2 \approx 0{,}96 \geqslant 1 - \frac{1}{6}$$

Montrons maintenant que si cette inégalité est vraie pour n, elle est vrai pour $n+1$. D'après (**??**) $v_{n+1} - v_n \geqslant -\dfrac{1}{6n^2}$.
En sommant l'inégalité précédente et celle du lemme (qui est l'hypothèse de récurrence) :

$$v_{n+1} \geqslant 1 - \frac{1}{6}\left(K_{n-1} + \frac{1}{n^2}\right) \text{ d'où } v_{n+1} \geqslant 1 - \frac{1}{6}K_n$$

3.6 Lemme. — *La suite v_n est minorée.*

Preuve. — D'après le lemme 3.4 :

$$\begin{aligned} K_n &\leqslant 2 \\ -\frac{1}{6}K_n &\geqslant -\frac{1}{3} \\ 1 - \frac{1}{6}K_n &\geqslant 1 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Par le lemme précédent, on a $v_{n+1} \geqslant 1 - \dfrac{1}{6}K_n$, finalement $v_{n+1} \geqslant \dfrac{2}{3}$. ∎

Pour conclure sur la convergence de cette suite, il faut se rappeler théorème suivant : **Une suite décroissante et minorée est convergente**.

3.7 Lemme. — *v_n est convergente.*

Preuve. — D'après le lemme précédent v_n est minorée par $\dfrac{2}{3}$ et d'après le lemme 3.3 elle est décroissante. Le théorème rappelé ci-dessus permet alors de conclure. ∎

3.8 Lemme. — *u_n converge vers un réel $c > 0$.*

Preuve. — Quasiment par définition de v_n, on a $u_n = e^{v_n}$. Notant λ la limite de v_n, on a $c = e^{\lambda}$ par continuité de l'exponentielle. ∎

Nous savons que u_n converge, mais nous ne connaissons pas sa valeur de sa limite. C'est ce qui va nous occuper jusqu'à la fin de cette section.

On pose $P_n = \dfrac{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}$, pour $n \geqslant 1$.

3.9 Lemme. —

$$P_n = \frac{2^{2n} \times (n!)^2}{(2n)!}$$

Preuve. — En multipliant le numérateur et le dénominateur de P_n par $2 \times 4 \times \cdots \times 2n$:

$$P_n = \frac{(2 \times 4 \times \cdots \times 2n)^2}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times 2n} = \frac{(2^n(1 \times 2 \times \cdots \times n))^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$$

Posons :

$$a_n = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)} \times \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = P_n \times \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \tag{3.6}$$

3.10 Lemme. —

$$\frac{u_n^2}{u_{2n}} = a_n \times \frac{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n}}{n}$$

Preuve. — Calculons le quotient $\frac{u_n^2}{u_{2n}}$

$$\begin{aligned}
\frac{u_n^2}{u_{2n}} &= \frac{(n!)^2}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} n} \times \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2n}}{(2n)!} \\
&= \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \times \left(\frac{e}{n}\right)^{2n} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} \times \frac{\sqrt{2n}}{n} \\
&= \left(\frac{2n \times e}{e \times n}\right)^{2n} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} \times \frac{\sqrt{2n}}{n} \\
&= 2^{2n} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} \times \frac{\sqrt{2n}}{n} \\
&= P_n \times \frac{\sqrt{2n}}{n}
\end{aligned}$$

■

D'après (3.6), on a $P_n = \sqrt{2n+1}\ a_n$. En remplaçant dans la ligne précédente :

$$\frac{u_n^2}{u_{2n}} = \sqrt{2n+1}\ a_n \times \frac{\sqrt{2n}}{n} = a_n \times \frac{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n}}{n}$$

Calculons les limites des trois termes qui composent l'égalité du précédent lemme, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n^2}{u_{2n}} = \frac{c^2}{c} = c$. Rappelons que c est un réel strictement positif, limite de u_n, dont l'existence a été prouvée dans la section précédente.

D'après (2.6) page 27, a_n^2 tend vers $\frac{\pi}{2}$. Par conséquent, a_n étant positif pour tout n, $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

La limite du second facteur :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+2n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{4n^2+2n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{4 + \frac{2}{n}} = \sqrt{4} = 2$$

Alors, en prenant la limite de l'expression du lemme 3.10 et en utilisant les limites, que l'on vient de calculer, des trois termes de cette expression $c = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times 2 = \sqrt{2\pi}$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2\pi}$.

Pour comprendre l'intérêt du phénomène, on peut construire un tableau :

n	$n!$	$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$
10	3628800	3598695
50	$3,0414 \times 10^{64}$	$3,0363 \times 10^{64}$
100	$9,3326 \times 10^{157}$	$9,3248 \times 10^{157}$
150	$5,7134 \times 10^{262}$	$5,7102 \times 10^{262}$

Chapitre 4

Encore des suites

4.1 Une suite convergeant vers $\sqrt{a}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

Soit $a > 0$ et $b > 0$ deux réels. On introduit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= b \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. En effet $u_0 = b > 0$ et pour $n \geqslant 1$: $u_n \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(u_{n-1} + \dfrac{a}{u_{n-1}}\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow u_{n-1}^2 \leqslant -a$, impossible car $a > 0$. La suite est donc bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On va montrer de deux façons qu'elle converge vers $\sqrt{a}$.

4.1.1 Étude de u_n par une suite auxiliaire

Soit la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$, définie par $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$.
Elle est bien définie puisque $u_n + \sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow u_n = -\sqrt{a}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

Étude de la suite v_n

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) + \sqrt{a}} = \frac{u_n^2 + a - 2u_n\sqrt{a}}{u_n^2 + a + 2u_n\sqrt{a}} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{(u_n + \sqrt{a})^2}$$

D'où $v_{n+1} = v_n^2$.
Soit $P(n)$ la proposition $v_n = v_0^{2^n}$. De façon évidente, P(0) est vraie. Supposons $P(n)$ vraie. D'après ce qui précède, $v_{n+1} = v_n^2$; en utilisant l'hypothèse de récurrence, $v_{n+1} = \left(v_0^{2^n}\right)^2 = v_0^{2^{n+1}}$.
$P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ et $P(0)$ est vraie, il en résulte $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0^{2^n}$.

On calcule et on majore v_0.

$$v_0 = \frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} = \frac{b - \sqrt{a}}{b + \sqrt{a}}$$

$$v_0^2 - 1 = \left(\frac{b - \sqrt{a}}{b + \sqrt{a}}\right)^2 - 1 = \frac{(b - \sqrt{a})^2 - (b + \sqrt{a})^2}{(b + \sqrt{a})^2} = \frac{-4b\sqrt{a}}{(b + \sqrt{a})^2} < 0$$

D'où $v_0^2 < 1$ c'est-à-dire $|v_0| < 1$. Enfin $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_0^{2^n} = 0$ puisque $|v_0| < 1$.

Retour à v_n

D'après la définition de v_n, on a $v_n(u_n+\sqrt{a}) = u_n-\sqrt{a}$ soit $u_n(v_n-1) = -\sqrt{a}-v_n\sqrt{a}$, d'où $u_n = \dfrac{\sqrt{a}+v_n\sqrt{a}}{1-v_n}$ puisque $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 1$ ($v_n = 1 \Leftrightarrow u_n-\sqrt{a} = u_n+\sqrt{a} \Leftrightarrow 2\sqrt{a} = 0$, impossible car $a > 0$).

On peut enfin calculer la limite de u_n, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{a}+v_n\sqrt{a}}{1-v_n} = \dfrac{\sqrt{a}-0\times\sqrt{a}}{1-0} = \sqrt{a}$.

4.1.2 Étude de u_n à l'aide d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right) \text{ et on peut définir } u_n \text{ par } \left\{\begin{array}{rl} u_0 & = b \\ u_{n+1} & = f(u_n) \end{array}\right.$$

Étude de f

La dérivée est $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{a}{x^2}\right)$. L'étude de son signe conduit à :

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ est strictement décroissante sur }]0,\sqrt{a}[\\ f \text{ est strictement croissante sur } [\sqrt{a},+\infty[\end{array}\right.$$

La remarque suivante nous sera utile :

$$f(x)-x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)-\frac{1}{2}2x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}-x\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{a}{x} > x \Leftrightarrow \sqrt{a} > x$$

donc

$$\forall x \in]0,\sqrt{a}[, f(x) > x \text{ et } \forall x \in]\sqrt{a},+\infty[, f(x) < x$$

Étude de u_n grâce à f

Premier cas : $b > \sqrt{a}$.

► $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \sqrt{a}$. On prouve cela par récurrence. $u_0 > \sqrt{a}$ d'après l'hypothèse de ce premier cas. Par croissance de f sur $[\sqrt{a},+\infty[$, $u_n > \sqrt{a} \Rightarrow f(u_n) > f(\sqrt{a}) \Rightarrow u_{n+1} > \sqrt{a}$.

► $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$. En effet : $u_{n+1}-u_n = f(u_n)-u_n < 0$ car $\forall x \in]\sqrt{a},+\infty[, f(x) < x$ et $u_n \in]\sqrt{a},+\infty[$.

► Il en résulte que u_n est minorée et décroissante donc qu'elle converge vers un un réel $l \geqslant \sqrt{a}$, mais l est une solution de $f(x) = x \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$. Donc $l = \sqrt{a}$. En résumé, si $b > \sqrt{a}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$.

Deuxième cas : $b < \sqrt{a}$.

Comme f est décroissante sur $]0,\sqrt{a}[$, on a $\sqrt{a} > b \Rightarrow f(\sqrt{a}) < f(b) \Rightarrow \sqrt{a} < u_1$. On est ramené au premier cas : on en déduit qu'à partir du rang 1, u_n est décroissante et qu'elle est minorée par $\sqrt{a}$, donc qu'elle converge vers $l = \sqrt{a}$.

Troisième cas : $b = \sqrt{a}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{a}$. On démontre par récurrence : $u_0 = \sqrt{a}$ et $u_n = \sqrt{a} \Rightarrow f(u_n) = f(\sqrt{a}) \Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{a}$. La suite admet donc pour limite $l = \sqrt{a}$.

On a traité tous les cas possibles et on arrive à la même conclusion :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} u_n = \sqrt{a}}$$

Chapitre 5

Irrationnalité de e

Pour $n \geqslant 1$, posons $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}$.

5.1 Lemme. — *u_n est strictement croissante et converge vers e.*

Preuve. — u_n converge vers e, cela a été prouvé dans la section 1.1.1. Formons $u_{n+1} - u_n$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} > 0. \end{aligned}$$

Ainsi $u_{n+1} > u_n$ et la suite est bien strictement croissante. ■

5.2 Lemme. — *v_n est strictement décroissante et converge vers e.*

Preuve. — Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\,n!} = 0$, il est clair que la limite de v_n est la même que celle de u_n, c'est-à-dire e.
Étudions le signe de $v_{n+1} - v_n$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!} - \frac{1}{n\,n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\,n!\,(n+1)} - \frac{1}{n\,n!} \\ &= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n!}\left(\frac{n\,(n+1) + n - (n+1)^2}{n\,(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{1}{n!} \times \frac{-1}{n\,(n+1)^2} < 0, \end{aligned}$$

d'ou bien sûr $v_{n+1} < v_n$. ■

5.3 Lemme. — *Pour tout n, $u_n < e < v_n$*

PREUVE. — $u_n < e$ résulte du lemme 5.1 et $e < v_n$ du lemme 5.2. ■

5.4 Lemme. — *$p\,q! - u_q qq!$ est un entier (p et q entier)*

PREUVE. — Il est clair que $p\,q!$ est un entier. Prouvons par récurrence sur $q \geqslant 2$ que $u_q q!$ est un entier. $u_2 \times 2! = \left(2 + \dfrac{1}{2}\right) \times 2 = 5 \in \mathbb{Z}$. Supposons que $q \in \mathbb{Z}$ et montrons qu'alors $q + 1 \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}(q+1)!\,u_{q+1} &= (q+1)!\left(u_q + \frac{1}{(q+1)!}\right)\\ &= q!\,(q+1)\,u_q + \frac{(q+1)!}{(q+1)!}\\ &= q!u_q\,(q+1)+1,\end{aligned}$$

or par hypothèse de récurrence $q!u_q \in \mathbb{Z}$, donc $(q+1)!\,u_{q+1} \in \mathbb{Z}$ également. La différence de deux entiers étant un entier (on dit que $\mathbb{Z}$ est stable par soustraction), on arrive au résultat du lemme. ■

5.5 THÉORÈME. — *Le nombre e est irrationnel.*

PREUVE. — Supposons que e soit rationnel et puisse par conséquent s'écrire sous la forme $\dfrac{p}{q}$ avec p et q des entiers naturels ($q \neq 0$). Du lemme 5.3 on déduit

$$\begin{aligned}u_q &< \frac{p}{q} < v_q\\ u_q &< \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{qq!}\\ u_q\,q\,q! &< p\,q! < u_q qq! + 1\\ 0 &< p\,q! - u_q qq! < 1,\end{aligned}$$

mais d'après le lemme précédent, $p\,q! - u_q qq!$ est un entier, qui appartiendrait à $]0,1[$ d'après ce raisonnement. C'est absurde. Ainsi e est bien irrationnel. ■

Bibliographie

[1] O. Acx, P.-J. Desnoux, A. Tissier. *Prépa MPSI/PCSI* tome 1, deuxième édition. Vuibert, 1998.

[2] J. Martin. *Cours de mathématiques pour la préparation aux Brevets de Techniciens Supérieurs et pour les Écoles d'Ingénieurs*. Dunod, 1967.

[3] P.-H. Terracher. *Mathématiques Terminales C et E*. Hachette Lycées, 1992.

[4] P.-H. Terracher. *Mathématiques Terminale S, enseignement obligatoire*. Hachette Éducation, 1994.

[5] P.-H. Terracher. *Mathématiques Terminale S, obligatoire et spécialité*. Hachette Éducation, 2002.