# Chute libre avec frottement

Gilles Auriol
auriolg@free.fr — http ://auriolg.free.fr

On considère un objet en chute libre avec frottement. L'objet est alors soumis à trois forces : son poids $\overrightarrow{P}$, la force de frottement $\overrightarrow{Fa}$ et la poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi}$ due à l'air. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit : $m\,\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\Pi} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{Fa}$ soit, en projetant sur un axe vertical $(Oy)$ avec des notations évidentes, $ma_y = \Pi_y + mg + Fa_y$ ou $a_y = \dfrac{\Pi_y}{m} + g + \dfrac{Fa_y}{m}$. Ceci peut encore s'écrire $a_y = g' + \dfrac{Fa_y}{m}$ puisque $\dfrac{\Pi_y}{m} + g$ ne varie pas.

On propose le modèle suivant $Fa_y = -\alpha v^2$, où $v$ est la norme du vecteur vitesse et $\alpha$ une constante. De plus $a_y = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, donc $v$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g' - kv^2 \quad \text{avec} \quad k = \frac{\alpha}{m}$$

Une méthode numérique permet de s'apercevoir que ce modèle est quasiment parfait. Résolvons analytiquement cette équation, dite de Ricatti (on l'écrit $y' + ky^2 - g' = 0$).

Pour cela il faut une solution particulière. On peut par exemple chercher la vitesse limite. Elle sera atteinte quand l'accélération sera nulle, c'est-à-dire quand $y' = 0$, on en tire $ky^2 = g'$ et $y = \sqrt{\dfrac{g'}{k}}$. Posons $y_0 = \sqrt{\dfrac{g'}{k}}$. On vérifie sans peine que $y_0$ est solution de l'équation.

Faisons le changement de variables $Y = y - y_0$, soit $y = Y + y_0$, l'équation donne

$$(Y + y_0)' + k(Y + y_0)^2 - g' = 0$$

soit

$$Y' + kY^2 + 2ky_0Y + ky_0^2 - g' = 0$$

mais $ky_0^2 - g' = 0$, et l'équation prend alors la forme

$$Y' + 2ky_0Y + kY^2 = 0,$$

et en divisant par $Y^2$ (il faudrait s'assurer que $Y$ ne prend jamais la valeur 0 mais bon...),

$$\frac{Y'}{Y^2} + 2ky_0\frac{1}{Y} + k = 0.$$

Pour résoudre cette nouvelle équation, dite de Bernouilli, on effectue le changement de variable $z = \dfrac{1}{Y}$. Il en résulte que $z' = -\dfrac{Y'}{Y^2}$ et l'équation se simplifie encore. Il reste maintenant :

$$-z' + 2ky_0z + k = 0 \quad \text{soit} \quad z' = 2ky_0z + k.$$

Cette équation différentielle linéaire du premier ordre admet pour solutions

$$z = Ce^{2ky_0t} - \frac{1}{2y_0} = \frac{2Cy_0e^{2ky_0t} - 1}{2y_0} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{R}$$

Et en remontant,

$$Y = \frac{1}{z} = \frac{2y_0}{2Cy_0e^{2ky_0t} - 1}$$

puis

$$y = y_0 + Y = y_0 + \frac{2y_0}{2Cy_0e^{2ky_0t} - 1} = y_0\,\frac{2Cy_0e^{2ky_0t} + 1}{2Cy_0e^{2ky_0t} - 1}$$

Pour déterminer $C$, supposons que l'objet soit lâché sans vitesse initiale, c'est-à-dire $y = 0$ à $t = 0$. Cela conduit à

$$2Cy_0 + 1 = 0 \iff C = -\frac{1}{2y_0},$$

donc en remplaçant $C$ par sa valeur :

$$\boxed{y = y_0\,\frac{e^{2ky_0t} - 1}{e^{2ky_0t} + 1}}$$

A l'aide de la fonction tangente hyperbolique, l'expression n'est que plus belle :

$$\boxed{y = y_0\,\mathrm{th}(ky_0t)}$$

`http://les-mathematiques.u-strasbg.fr/phorum/read.php?f=2&i=63078&t=63078`