Une année de contrôle en Première S

Gilles Auriol

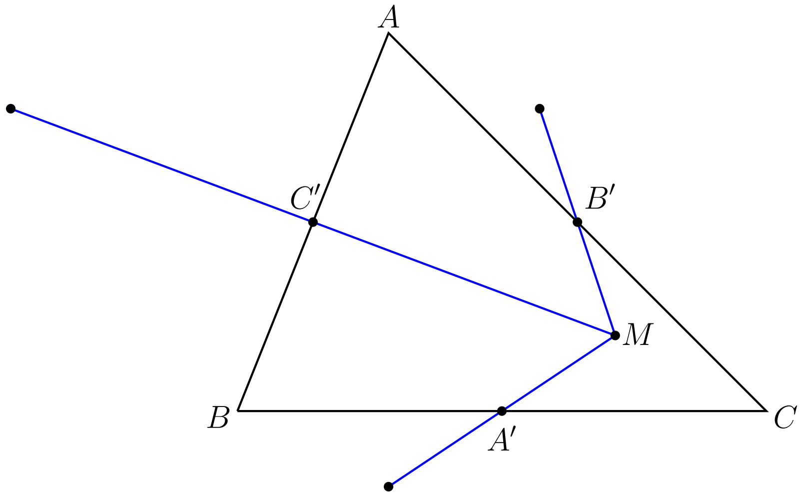
auriolg@free.fr — http ://auriolg.free.fr

Voici l'intégralité des contrôles de mathématiques effectués par la classe de 1S4 du lycée Pierre d'Aragon durant l'année scolaire 2002-2003 sous la houlette de M. Aragon.

DEVOIR N°1 DU 26/09/02

Énoncé - Groupe 1

1. ABC est un triangle. A', B' et C' sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. M est un point quelconque. I, J et K sont les symétriques de M respectivement par rapport à A', B' et C'.



   (a) Démontrer que $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AJ}$ et que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CI}$.

   (b) prouver que (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes et préciser la position du point de concours.

2. $ABCD$ est un quadrilatère quelconque, I et L sont les points tels que $\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AL} = x\overrightarrow{AD}$, où x est un réel de l'intervalle $]0;1[$.

   (a) Justifier que $\overrightarrow{JK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

   (b) Utiliser la relation de Chasles $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AL}$ pour prouver que $\overrightarrow{IL} = x\overrightarrow{BD}$.

   (c) Quel théorème permeet de montrer le parallélisme de (IL) et (JK) ? Rédiger une solution.

3. ABC est un triangle, E est tel que $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, le point I est tel que $\overrightarrow{CI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et F est tel que $\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{3}$. Démontrer que I, E et F sont alignés.

Correction - Groupe 1

1. (a) A' est le milieu de $[MI]$ et de $[BC]$, donc $BICM$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BI}$, d'où $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$ **[1]**.
   De même $AJCM$ étant un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$ **[2]**.
   En comparant [1] et [2], on en déduit $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AJ}$.

   $AKBM$ et $BICM$ étant des parallélogrammes, on a $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MB}$, d'où $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CI}$.

(b) D'après la première question, $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AJ}$ donc $BIJA$ est un parallélogramme et les droites (AI) et (BJ) se coupent en le milieu de $[AI]$ puisque ce sont des diagonales.
De même l'égalité $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CI}$ équivaut à $AKIC$ parallélogramme donc (AI) et (CK) se coupent en le milieu de $[AI]$.
Finalement les droites (AI), (BJ) et (CK) se coupent en le milieu de $[AI]$.

2. (a) $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, donc en soustrayant membre à membre $\overrightarrow{CK} - \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}\right)$ d'où $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

   (b) Par Chasles $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AD} - x\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{BD}$

   (c) D'après la question 2a, $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{JK}$, donc $\overrightarrow{IL} = 2x\overrightarrow{JK}$, ainsi $(IL) /\!/ (JK)$.

3.
$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \quad \textbf{[1']}$$

D'autre part $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, d'où $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ puis $\overrightarrow{CF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et

$$\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CI} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} \quad \textbf{[2']}$$

De [1'], on déduit que $\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{FE}$ et en remplaçant dans [2']

$$\overrightarrow{IF} = \frac{2}{3}3\overrightarrow{FE} = 2\overrightarrow{FE}$$

d'où $(IF) /\!/ (FE)$, mais F est commun à ces deux droites parallèles, ainsi elles sont confondues et I, E et F sont alignés.

DEVOIR N°2 DU 03/10/02

Énoncé - Groupe 1

1. Résoudre $(2x+3)(x-4)+x^2-16=0$.
2. Résoudre $(2x+1)(1+3x)+1=9x^2$.
3. Résoudre $(x+3)(x-2)+2x^2-18=0$.
4. Résoudre $4(x+6)^2-9(x-3)^2=0$.
5. Résoudre $\dfrac{x^2+4x+2}{x+2}=2x+1$.
6. Résoudre $\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{3}{2x^2-x}>\dfrac{5}{x}$.
7. Trouver deux nombres tels que leur somme vaille $\dfrac{19}{3}$ et leur produit 10.

Correction - Groupe 1

1.
$$\begin{array}{rcl} (2x+3)(x-4)+x^2-16 & = & 0 \\ (2x+3)(x-4)+(x-4)(x+4) & = & 0 \\ (2x+3+x+4)(x-4) & = & 0 \\ (3x+7)(x-4) & = & 0 \end{array}$$
donc $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{7}{3},4\right\}$.

2.
$$\begin{array}{rcl} (2x+1)(1+3x)+1-9x^2 & = & 0 \\ (2x+1)(1+3x)+(1-3x)(1+3x) & = & 0 \\ (1+3x)(2x+1+1-3x) & = & 0 \\ (1+3x)(-x+2) & = & 0 \end{array}$$
donc $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{1}{3},2\right\}$.

3.
$$\begin{array}{rcl} (x+3)(x-2)+2x^2-18 & = & 0 \\ (x+3)(x-2)+2(x-3)(x+3) & = & 0 \\ (x+3)(x-2+2x-6) & = & 0 \\ (x+3)(3x-8) & = & 0 \end{array}$$
donc $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{8}{3},-3\right\}$.

4.
$$\begin{array}{rcl} 4(x+6)^2-9(x-3)^2 & = & 0 \\ (2x+12)^2-(3x-9)^2 & = & 0 \\ (2x+12-3x+9)(2x+12+3x-9) & = & 0 \\ (-x+21)(5x+3) & = & 0 \end{array}$$
donc $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{3}{5},21\right\}$.

5. On résout cette équation sur $\mathbb{R} - \{-2\}$.

$$\frac{x^2+4x+2}{x+2} = 2x+1 \Leftrightarrow x^2+4x+2 = (2x+1)(x+2) \Leftrightarrow x^2+4x+2 = 2x^2+4x+x+2$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - x = 0 \Leftrightarrow -x(x+1) = 0$$

donc $\mathcal{S} = \{-1, 0\} \cap \mathbb{R} - \{-2\} = \{-1, 0\}$.

6. Cette inéquation est définie pour $x \in \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$. Sur cet intervalle :

$$\frac{1}{2x-1} - \frac{3}{2x^2-x} > \frac{5}{x} \Leftrightarrow \frac{x-3-5(2x-1)}{x(2x-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{-9x+2}{x(2x-1)} > 0$$

d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{9}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-9x+2$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-9x+2}{x(2x-1)}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

donc $\mathcal{S} =]-\infty, 0[\cup \left]\frac{2}{9}, \frac{1}{2}\right[$.

7. Soit α et β les deux nombres cherchés. Comme

$$(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = x^2 - \frac{19}{3}x + 10 = P(x)$$

et $P(\alpha) = P(\beta) = 0$, les nombres α et β sont nécessairement les racines du polynômes $P(x)$:

$$x^2 - \frac{19}{3} + 10 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 19x + 30 = 0$$

Le discriminant vaut $(-19)^2 - 3 \times 30 \times 4 = 1$, donc les racines sont

$$\alpha = \frac{19+1}{6} = \frac{10}{3} \text{ et } \beta = \frac{19-1}{6} = 3$$

Réciproquement, on vérifie bien que $\frac{10}{3} \times 3 = 10$ et $\frac{10}{3} + 3 = \frac{19}{3}$.

Énoncé et correction - Groupe 2

Exercices 1,2,3, contrôle n°1, groupe 1. Page 2.

DEVOIR N°3 DU 10/10/02

Énoncé - Groupe 1

1. Résoudre $-2x^2 + 5x + 1 = 0$.
2. Résoudre $3x^2 - 7x - 1 = 0$.
3. Résoudre $x^2 - 2(1+\sqrt{3})x + 4 + 2\sqrt{3} = 0$.
4. Résoudre $x^3 - 1 = 0$.
5. Résoudre $\dfrac{4}{1-x} + \dfrac{3}{x-2} = 1$.
6. Résoudre $\dfrac{3x-2}{2x^2-5x-3} - \dfrac{2x+5}{3x^2-7x-6} = 0$.
7. Résoudre $(x^2-x)^2 = 14(x^2-x) - 24$.

Correction - Groupe 1

1. Remarquons d'abord que $-2x^2+5x+1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2-5x-1 = 0$. On calcule le discriminant : $\Delta = 5^2 - 4(-2)(1) = 33$. Donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{5-\sqrt{33}}{4}, \dfrac{5+\sqrt{33}}{4}\right\}$.
2. $\Delta = (-7)^2 - 4(3)(-1) = 61$. Donc $\left\{\dfrac{7-\sqrt{61}}{6}, \dfrac{7+\sqrt{61}}{6}\right\}$.
3. $\Delta = [2(1+\sqrt{3})]^2 - 4(1)(4+2\sqrt{3}) = 4(4+2\sqrt{3}) - 4(4+2\sqrt{3}) = 0$. Donc $\mathcal{S} = \{1+\sqrt{3}\}$.
4. 1 est racine. On peut mettre $x-1$ en facteur. Donc $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+ax+1)$ où a est un réel à déterminer. En développant on trouve $x^3-1 = x^3+(a-1)x^2+(1-a)x-1$ Donc $a = 1$ et $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$. Le discriminant de x^2+x+1 vaut -3 donc x^2+x+1 n'est pas factorisable. $\mathcal{S} = \{1\}$.
5. On résout sur $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.
$$\begin{array}{rcrcl} \dfrac{4}{1-x} + \dfrac{3}{x-2} = 1 & \Leftrightarrow & \dfrac{4(x-2)+3(1-x)}{(1-x)(x-2)} & = & 1 \\ & \Leftrightarrow & 4x-8+3-3x & = & (1-x)(x-2) \\ & \Leftrightarrow & x-5 & = & x-2-x^2+2x \\ & \Leftrightarrow & x^2-2x-3 & = & 0 \\ & \Leftrightarrow & (x-1)(x+3) & = & 0 \end{array}$$
Donc $\mathcal{S} = \{1, -3\} \cap \mathbb{R} - \{1, 2\} = \{1, -3\}$.
6.
$$\frac{3x-2}{2x^2-5x-3} - \frac{2x+5}{3x^2-7x-6} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x-2}{(x-3)(2x+1)} - \frac{2x+5}{(x-3)(3x+2)} = 0 \quad \textbf{[1]}$$
On résout l'équation sur $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{2}, 3\right\}$.
$$\begin{array}{rcrcl} \textbf{[1]} & \Leftrightarrow & \dfrac{(3x-2)(3x+2)-(2x+5)(2x+1)}{(x-3)(2x+1)(3x+2)} & = & 0 \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{9x^2-4-(4x^2+12x+5)}{(x-3)(2x+1)(3x+2)} & = & 0 \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{(x-3)(5x+3)}{(x-3)(2x+1)(3x+2)} & = & 0 \\ & \Leftrightarrow & 5x+3 & = & 0 \end{array}$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$

7.

$$(x^2-x)^2 = 14(x^2-x) - 24 \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^2 - x \\ X^2 - 14X + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^2 - x \\ (X-12)(X-2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = x^2 - x \\ X = 12 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} X = x^2 - x \\ X = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(12 = x^2 - x \text{ ou } 2 = x^2 - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - x - 12 = 0 \text{ ou } x^2 - x - 2 = 0\right) \Leftrightarrow \left((x-4)(x+3) = 0 \text{ ou } (x+1)(x-2) = 0\right)$$

D'où $\mathcal{S} = \{4, -3, -1, 2\}$.

Énoncé - Groupe 2

▶ EXERCICE 1

$ABCD$ est un quadrilatère quelconque. I est le milieu de $[AC]$ et J celui de $[BD]$. Les points K et L sont tels que $\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$ et $\overrightarrow{LC} = -2\overrightarrow{LD}$, M est le milieu de segment $[LK]$.

1. (a) Justifier l'existence du barycentre G de $(A,1)$, $(B,2)$, $(C,1)$ et $(D,2)$.
   (b) Prouver que G appartient à (KL) et à (IJ).
2. Justifier que M est confondu avec G et indiquer la position de M sur (IJ).

▶ EXERCICE 2

ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $AB = 4$ cm. On se propose de trouver l'ensemble Γ des points M du plan tels que $||-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|| = 4$.

1. Utiliser le barycentre G de $(A,-1)$, $(B,1)$ et $(C,2)$ pour réduire $-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$.
2. Montrer $M \in \Gamma \Leftrightarrow MG = 2$.
3. En déduire la nature de Γ.
4. Placer G et construire Γ.

▶ EXERCICE 3

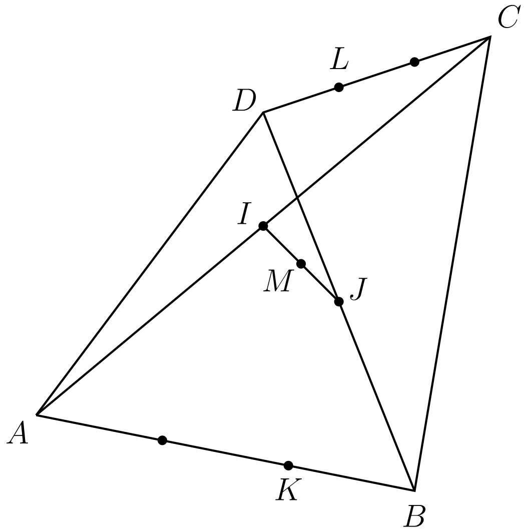
ABC est un triangle isocèle en A, de hauteur $[AH]$, tel que $AH = BC = 4$ (unité : 1 cm).

1. Placer le point G barycentre des points pondérés $(A,2)$, $(B,1)$ et $(C,1)$.
2. M désigne un point quelconque
   (a) Prouver que le vecteur $\overrightarrow{V} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est un vecteur de norme 8.
   (b) Trouver l'ensemble E des points M du plan tels que $||2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|| = ||\overrightarrow{V}||$. Tracer E.

Correction - Groupe 2

▶ EXERCICE 1

1. (a) La somme des coefficients est non nulle (égale à 6), donc le barycentre existe.
   (b) $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{0}$, donc $K = \text{Bar}\{(A,1),(B,2)\}$.
   $\overrightarrow{LC} + 2\overrightarrow{LD} = \overrightarrow{0}$, donc $L = \text{Bar}\{(C,1),(D,2)\}$.
   Le théorème d'associativité avec le point $G = \text{Bar}\{(A,1),(B,2),(C,1),(D,2)\}$ donne $G = \text{Bar}\{(K,3),(L,3)\}$, c'est-à-dire que G est le milieu de $[KL]$ et $G \in (KL)$.

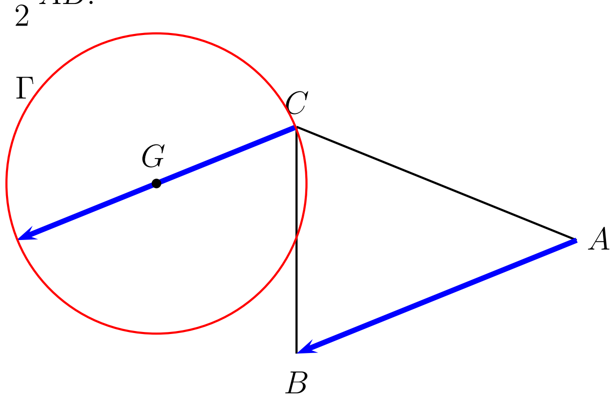


I est le milieu de $[AC]$ donc $I = \text{Bar}\{(A,1),(C,1)\}$.
J est le milieu de $[BD]$ donc $I = \text{Bar}\{(B,2),(D,2)\}$.
En utilisant le même théorème et en regroupant A et C d'une part, B et D d'autre part, on en déduit que $G = \text{Bar}\{(I,2)(J,4)\} = \text{Bar}\{(I,1)(J,2)\}$ et $G \in (IJ)$.

2. Nous avons déjà justifié que G est le milieu de $[KL]$.
$G = \text{Bar}\{(I,1)(J,2)\}$ d'après la question précédente. Pour tout point X du plan on a donc $3\overrightarrow{XG} = \overrightarrow{XI} + 2\overrightarrow{XJ}$. En faisant $X = I$, on trouve $3\overrightarrow{IG} = 2\overrightarrow{IJ}$. Finalement G (c'est-à-dire M) est tel que $\overrightarrow{IG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$.

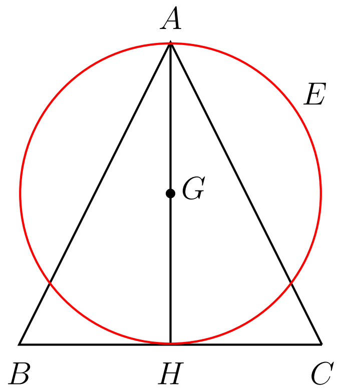
▶ EXERCICE 2

1. Comme $G = \text{Bar}\{(A,-1)(B,1)(C,2)\}$, pour tout point M du plan, $2\overrightarrow{MG} = -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$.
2. $||-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|| = 4 \Leftrightarrow ||2\overrightarrow{MG}|| = 4 \Leftrightarrow MG = 2$.
3. Γ est le cercle de centre G et de rayon 2.
4. En faisant $M = C$ dans $2\overrightarrow{MG} = -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$, on obtient $2\overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$, d'où $2\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



▶ **EXERCICE 3**

1. On a $G = \text{Bar}\{(A,2)(B,1)(C,1)\}$, donc $4\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$, donc pour $M = A$, on obtient $4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Or H est le milieu de $[BC]$, donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AH}$ et finalement $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AH}$.



2. (a) $\overrightarrow{V} = 2\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$ et comme H est le milieu de $[BC]$, on a $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MH}$ pour tout point M, donc

$$\overrightarrow{V} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MH} = 2(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MH}) = 2\overrightarrow{HA}$$

et en prenant les normes $||\overrightarrow{V}|| = 2HA = 8$.

(b) $||2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|| = ||\overrightarrow{V}|| \Leftrightarrow ||4MG|| = 8 \Leftrightarrow MG = 2$, donc E est le cercle de centre G et de rayon 2.

DEVOIR N°4 DU 17/10/02

Énoncé - Groupe 1

▶ **EXERCICE 1**
Voir exercice 1, contrôle n°3, groupe 2. Page 7.

▶ **EXERCICE 2**
$ABCD$ est un rectangle. Le but de l'exercice est de trouver l'ensemble Γ des points M du plan tels que $||\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}|| = ||\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}||$.

1. Prouver que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} = -2\overrightarrow{AB}$.
2. Réduire la somme $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.
3. (a) En déduire que l'ensemble Γ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
   (b) Justifier que les milieux de $[BC]$ et $[AD]$ sont sur Γ. Tracer Γ.

▶ **EXERCICE 3**
ABC est un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. A' est le pied de la bissectrice intérieure de $\widehat{ABC}$. A' est donc équidistant des côtés de l'angle. On note d cette distance et h la longueur de la hauteur issue de A.

1. (a) Exprimer de deux façons différentes les aires des triangles $AA'B$ et $AA'C$.
   (b) En déduire que $\dfrac{A'B}{A'C} = \dfrac{c}{b}$.
2. Prouver que A' est le barycentre de (B, b) et (C, c).
3. B' et C' sont les pieds des bissectrices de $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$. Exprimer B' comme barycentre de C et A, puis C' comme barycentre de A et B.
4. Démontrer que le point I, centre du cercle inscrit, c'est-à-dire point de concours des bissectrices, est barycentre de (A, a), (B, b) et (C, c).

Correction - Groupe 1

▶ **EXERCICE 1**
Voir page 7.

▶ **EXERCICE 2**

1.
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} &= \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD} \\
&= -\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD} \\
&= -\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD} \\
&= -\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} \\
&= -2\overrightarrow{AB} \text{ (car dans un rectangle } \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB})
\end{aligned}$$

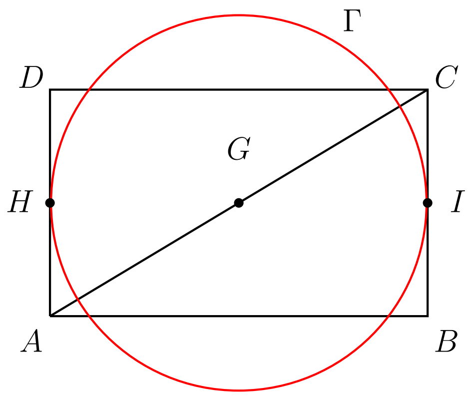
2. Soit $G = \text{Bar}\{(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)\}$. Ce point existe car la somme des coefficients est non nulle. Pour tout point M du plan on a

$$4\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} \quad \textbf{[1]}$$

3. (a)
$$M \in \Gamma \Leftrightarrow ||4\overrightarrow{MG}|| = ||-2\overrightarrow{AB}|| \Leftrightarrow 4MG = 2AB \Leftrightarrow MG = \frac{AB}{2}$$

   (b) En faisant $M = A$ dans la relation [1], $4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Mais dans un parallélogramme (a fortiori dans un rectangle), $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, donc $4\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AC}$, d'où la position de G : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, G est le milieu de $[AC]$.

   I est le milieu de $[BC]$, G celui de $[AC]$, donc par le théorème du milieu $GI = \frac{AB}{2}$, soit $I \in \Gamma$. De même, en utilisant le fait que H est le milieu de $[AD]$ on justifie que $HG = \frac{DC}{2} = \frac{AB}{2}$.
   On construit en utilisant ces derniers résulats :



▶ EXERCICE 3

1. (a) En considérant deux hauteurs différentes pour chacun des triangles :
$$\mathcal{A}(AA'B) = \frac{1}{2}\,h\,A'B = \frac{1}{2}\,cd \text{ et } \mathcal{A}(AA'C) = \frac{1}{2}\,h\,A'C = \frac{1}{2}\,bd$$

   (b) En divisant membre à membre les deux égalités précédentes :
$$\frac{\mathcal{A}(AA'B)}{\mathcal{A}(AA'C)} = \frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$$

2. D'après la question précédente, $bA'B = cA'C$. Par ailleurs les vecteurs $\overrightarrow{A'B}$ et $\overrightarrow{A'C}$ sont colinéaires de sens contraites, donc $b\overrightarrow{A'B} = -c\overrightarrow{A'C}$, d'où $b\overrightarrow{A'B} + c\overrightarrow{A'C} = 0$, ce qui traduit bien le fait que $A' = \text{Bar}\{(A,a),(B,b)\}$.
3. On recommence ce qui vient d'être fait à deux reprises. On désigne par h' (resp. h'') la longueur de la hauteur issue de B (resp. de C) et par d' (resp. d'') la distance de B' (resp. C') au côté $[BA]$ (resp. $[AC]$). On a alors
$$\mathcal{A}(BB'A) = \frac{1}{2}\,h'\,AB' = \frac{1}{2}\,cd' \text{ et } \mathcal{A}(BB'C) = \frac{1}{2}\,h'\,B'C = \frac{1}{2}\,ad'$$
   d'où, en divisant membre à membre,
$$\frac{\mathcal{A}(BB'A)}{\mathcal{A}(BB'C)} = \frac{AB'}{B'C} = \frac{c}{a}$$
   ainsi que

$$\mathcal{A}(CC'A) = \frac{1}{2}\, h''\, AC' = \frac{1}{2}\, bd'' \text{ et } \mathcal{A}(CC'B) = \frac{1}{2}\, h''\, BC' = \frac{1}{2}\, ad''$$

qui permet d'écrire

$$\frac{\mathcal{A}(CC'A)}{\mathcal{A}(CC'B)} = \frac{AC'}{BC'} = \frac{b}{a}$$

Les mêmes considérations que précédemment conduisent à $B' = \mathrm{Bar}\{(A,a),(C,c)\}$ et $C' = \mathrm{Bar}\{(A,a),(B,b)\}$

4. Soit $G = \mathrm{Bar}\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$. Ce point existe car $a+b+c \neq 0$. On utilise trois fois le théorème d'associativé :
   (a) $A' = \mathrm{Bar}\{(B,b),(C,c)\}$ d'où $G = \mathrm{Bar}\{(A,a)(A',b+c)\}$, donc $G \in (AA')$.
   (b) $B' = \mathrm{Bar}\{(A,a),(C,c)\}$ d'où $G = \mathrm{Bar}\{(B,b)(B',a+c)\}$, donc $G \in (BB')$.
   (c) $C' = \mathrm{Bar}\{(A,a),(B,b)\}$ d'où $G = \mathrm{Bar}\{(C,c)(C',a+b)\}$, donc $G \in (CC')$.

   ainsi G appartient au trois bissectrices donc $G = I$.
   On a donc redémontré que les bissectrices intérieures sont concourantes et que de plus leur point d'intersection est barycentre de (A,a), (B,b) et (C,c).

DEVOIR N°5 DU 07/11/02

Énoncé - Groupe 1

Soit $f : x \mapsto -x^2 + 4x$.

1. Parité, dérivée (en passant par la définition), tableau de variations.
2. Equation de la tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse 4.
3. Déterminer x tel que $B\left(\dfrac{x+1}{x-3}, \dfrac{3x+15}{x-3}\right) \in \mathcal{C}_f$.
4. Réprésenter $\mathcal{C}_f$ et la tangente $\mathcal{T}$.

Correction - Groupe 1

1. – Fonction polynôme donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   – $f(1) = 3$ et $f(-1) = -5$ donc f n'est ni paire ni impaire.
   – On forme le taux d'accroissement $a(h)$ de f en $x_0 \in \mathcal{D}_f$:

$$\begin{aligned}
a(h) &= \frac{-(x_0-h)^2 + 4(x_0+h) + x_0^2 - 4x_0}{h} \\
&= \frac{-x_0^2 - x_0 h - h^2 + 4x_0 + 4h + x_0^2 - 4x_0}{h} \\
&= \frac{-2x_0 h - h^2 + 4h}{h} \\
&= -2x_0 - h + 4
\end{aligned}$$

   D'où $f'(x_0) = -2x_0 + 4$, quand on fait tendre h vers 0. Donc $\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = -2x + 4$.
   – On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	

2. L'équation de la tangente au point d'abscisse 4 est :

$$\begin{aligned}
y &= f'(4)(x-4) + f(4) \\
&= -4(x-4) + 0
\end{aligned}$$

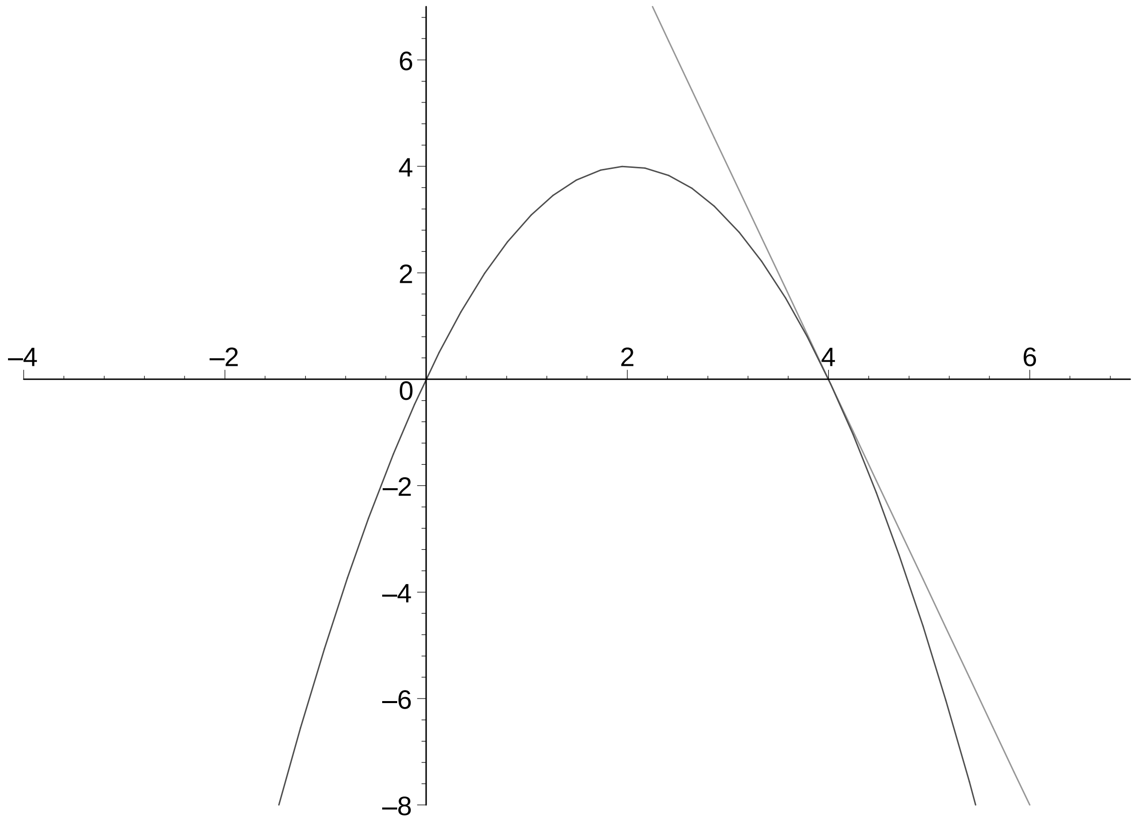
   Finalement $\mathcal{T} : y = -4x + 16$.

3.

$$\begin{aligned}
& & B\left(\frac{x+1}{x-3}, \frac{3x+15}{x-3}\right) &\in \mathcal{C}_f \\
\Leftrightarrow & & f\left(\frac{x+1}{x-3}\right) &= \frac{3x+15}{x-3} \text{ et } \frac{x+1}{x-3} \in \mathcal{D}_f \\
\Leftrightarrow & & \frac{3x+15}{x-3} &= -\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^2 + 4\left(\frac{x+1}{x-3}\right) \text{ et } \frac{x+1}{x-3} \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow & & (3x+15)(x-3) &= -(x+1)^2 + 4(x+1)(x-3) \text{ et } x \neq 3 \\
\Leftrightarrow & & 3x^2 - 9x + 15x - 45 &= -x^2 - 2x - 1 + 4(x^2 - 3x + x - 3) \text{ et } x \neq 3 \\
\Leftrightarrow & & 3x^2 + 6x - 45 &= -x^2 - 2x - 1 + 4x^2 - 8x - 12 \text{ et } x \neq 3 \\
\Leftrightarrow & & 16x &= 32 \text{ et } x \neq 3
\end{aligned}$$

   En conclusion $B \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow x = 2$.

4. Représentation graphique



DEVOIR N°6 DU 21/11/02

Énoncé - Groupe 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{2x+3}{x^2+2x-3} + \dfrac{1}{1-x} \leqslant \dfrac{4x-3}{4(2x^2+7x+3)}$ **[1]**.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) = x^3 - 2x^2 - 71x + 72 < 0$.
3. Résoudre $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y-z=24 \\ 4x-2y+3z=6 \\ 6x-y+2z=22 \end{array}\right.$.
4. Simplifier $f(x) = \cos(19\pi - x) + \sin(17\pi + x) - \sin\left(\dfrac{19\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\dfrac{17\pi}{2} - x\right)$.

Correction - Groupe 1

1.

$$\textbf{[1]} \Leftrightarrow \frac{2x+3}{(x-1)(x+3)} - \frac{1}{x-1} \leqslant \frac{4x-3}{4(x+3)(2x+1)}$$

Donc $\mathcal{D}_{\textbf{[1]}} = \mathbb{R} - \{1, -3, -\frac{1}{2}\}$.

$$\begin{aligned}
\textbf{[1]} &\Leftrightarrow \frac{4(2x+1)(2x+3) - 4(x+3)(2x+1) - (4x-3)(x-1)}{4(x-1)(x+3)(2x+1)} \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{4(4x^2+8x+3) - 4(2x^2+7x+3) - (4x^2-7x+3)}{4(x-1)(x+3)(2x+1)} \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{4x^2+11x-3}{4(x-1)(x+3)(2x+1)} \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(x+3)(4x-1)}{4(x-1)(x+3)(2x+1)} \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{4x-1}{4(x-1)(2x+1)} \leqslant 0
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|ccccccccccc}
x & -\infty & & -3 & & -\frac{1}{2} & & \frac{1}{4} & & 1 & & +\infty \\
\hline
4x-1 & & - & & - & & - & 0 & + & & + & \\
\hline
x-1 & & - & & - & & - & & - & 0 & + & \\
\hline
2x+1 & & - & & - & 0 & + & & + & & + & \\
\hline
Q(x) & & - & \| & - & \| & + & 0 & - & \| & + & \\
\hline
\end{array}$$

Finalement $\mathcal{S} =]-\infty, -3[\cup \left]-3, -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left[\dfrac{1}{4}, 1\right[$.

2. A la calculatrice, on s'aperçoit que 1, 9 et -8 sont racines du polynôme $f(x)$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-9)(x+8) < 0$, d'où $\mathcal{S}' =]-\infty, -8[\cup]1, 9[$, car

x	$-\infty$		-8		1		9		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-9$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+8$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

3.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-z & = & 24 \\ 4x-2y+3z & = & 6 \\ 6x-y+2z & = & 22 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 2x+3y-24 \\ 4x-2y+3(2x+3y-24) & = & 6 \\ 6x-y+2(2x+3y-24) & = & 22 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 2x+3y-24 \\ 10x+7y & = & 78 \\ 10x+5y & = & 70 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 2x+3y-24 \\ 2y & = & 78-70 \\ x & = & 7-\dfrac{1}{2}y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 2x+3y-24 \\ y & = & 4 \\ x & = & 7-\dfrac{4}{2}=5 \end{array}\right.$$

Donc $(x,y,z)=(5,4,-2)$.

4.

$$\begin{aligned} \forall x\in\mathbb{R}, f(x) &= \cos(19\pi-x)+\sin(17\pi+x)-\sin\left(\frac{19\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{17\pi}{2}-x\right) \\ &= \cos(\pi-x)+\sin(\pi+x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{19\pi}{2}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{17\pi}{2}+x\right) \\ &= -\cos x-\sin x-\cos(9\pi+x)+\sin(-8\pi+x) \\ &= -\cos x-\sin x-\cos(\pi+x)+\sin x \\ &= -\cos x-\sin x+\cos x+\sin x \\ &= 0 \end{aligned}$$

DEVOIR N°7 DU 28/11/02

Énoncé - Groupe 1

1. Calculer la dérivée de $f : x \mapsto \dfrac{3-x}{x+1}$ (avec la définition, les formules n'étant pas connues).
2. Soit ABC un triangle équilatéral et I le milieu de $[BC]$. Déterminer les ensembles définis par
   (a) $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0\,[2\pi]$;
   (b) $M \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM})\,[2\pi]$;
   (c) $M \in \mathcal{R} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$;
   (d) $M \in \mathcal{S} \Leftrightarrow (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$.
3. Soit (E) l'équation $\sqrt{3}\cos x = \sin x$.
   (a) Montrer que si α est solution de (E), alors $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{4}$.
   (b) En déduire les solutions de (E) sur $[-\pi, \pi]$.

Correction - Groupe 1

1. Soit

$$\begin{aligned}
a(h) &= \frac{1}{h}\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right)\\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{3-x_0-h}{x_0+h+1} - \frac{3-x_0}{x_0+1}\right)\\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{(3-x_0-h)(x_0+1) - (3-x_0)((x_0+h+1))}{(x_0+h+1)(x_0+1)}\right)\\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{3x_0 - x_0^2 - hx_0 + 3 - x_0 - h - 3x_0 - 3h - 3 + x_0^2 + x_0h + x_0}{(x_0+h+1)(x_0+1)}\right)\\
&= \frac{-4}{(x_0+h+1)(x_0+1)}
\end{aligned}$$

   donc $\lim\limits_{h\to 0} a_h = \dfrac{-4}{(x_0+1)^2}$ et $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}, f'(x) = \dfrac{-4}{(x+1)^2}$.

2. (a)

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0\,[2\pi]\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \text{ et } \overrightarrow{MB} \text{ sont colinéaires et de même sens}\\
&\Leftrightarrow M \in (AB) \text{ et } M \notin [AB]
\end{aligned}$$

   donc $\mathcal{P}$ est la droite (AB) privée du segment $[AB]$.

   (b)

   (c)

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{R} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]\\
&\Leftrightarrow \text{le triangle } AMB \text{ est rectangle en } M \text{ est et direct}
\end{aligned}$$

   donc $\mathcal{R}$ est le demi-cercle de diamètre $[AB]$ passant par I car $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \dfrac{\pi}{2}$, alors que les points de l'autre demi-cercle vérifient $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$

(d)

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \\
&\Leftrightarrow (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \\
&\Leftrightarrow (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \\
&\Leftrightarrow (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IB}) = 0\,[2\pi] \text{ car } (\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BA}) = 0\,[2\pi] \\
&\Leftrightarrow \text{les vecteurs } \overrightarrow{IM} \text{ et } \overrightarrow{IB} \text{ sont colinéaires}
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{S}$ est la demi-droite $]IB)$.

3. (a) Soit α tel que , $\sqrt{3}\cos\alpha = \sin\alpha$, alors en élevant au carré $3\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$ d'où $3\cos^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ et enfin $\cos^2\alpha = \frac{1}{4}$ **[1]**.

   (b) Résolvons [1] sur $[-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned}
[1] &\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3}\right) \text{ ou } \left(x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie que seuls $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$ sont solutions. Donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right\}$.

DEVOIR N°8 DU 05/12/02

Énoncé - Groupe 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.
2. Soit ABC un triangle. Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M tels que

$$||\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}||=||2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}||$$

3. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon 4 cm. A est un point fixe de $\mathcal{C}$ et M est un de ce cercle tel que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})=-28512$ rad.
   (a) Détermination principale de l'angle en radians et en degrés.
   (b) Longueur de l'arc de cercle AM.
   (c) Placer M.

Correction - Groupe 1

1.
$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right) &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+x\right)\\ &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}=\mathbb{R}$.

2.
$$\begin{aligned}M\in\Delta &\Leftrightarrow & ||\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}|| &= ||2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}||\\ &\Leftrightarrow & ||\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AC}|| &= ||2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}||\\ &\Leftrightarrow & ||2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}|| &= ||2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}||\end{aligned}$$

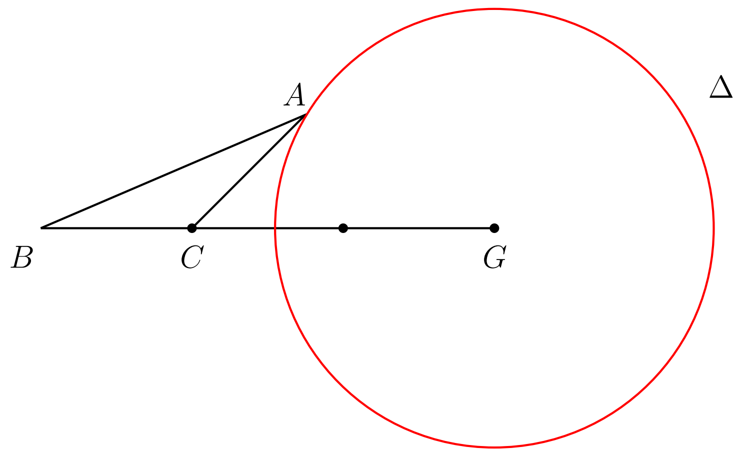
Soit $G=\text{Bar}\{(B,2),(C,-3)\}$. Alors pour tout point M du plan

$$-\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\quad \textbf{[1]}$$

donc

$$M\in\Delta\Leftrightarrow||-\overrightarrow{AG}||=||-\overrightarrow{MG}||\Leftrightarrow AG=MG$$

L'ensemble Δ est le cercle de centre G et de rayon AG.
Pour construire le point G appliquons [1] avec $M=C$. On a $-\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{CB}$ ou $\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{BC}$.



3. (a)

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) &= -28512 + 2k\pi\\ &= -(4537 + 0,82573)\times 2\pi + 2k\pi\\ &= -0,82573\times 2\pi + 2\pi(k-4537)\\ &= -5,1882 + 2k'\pi\end{aligned}$$

La détermination principale est comprise entre $-\pi$ et π. On ajoute un tour :

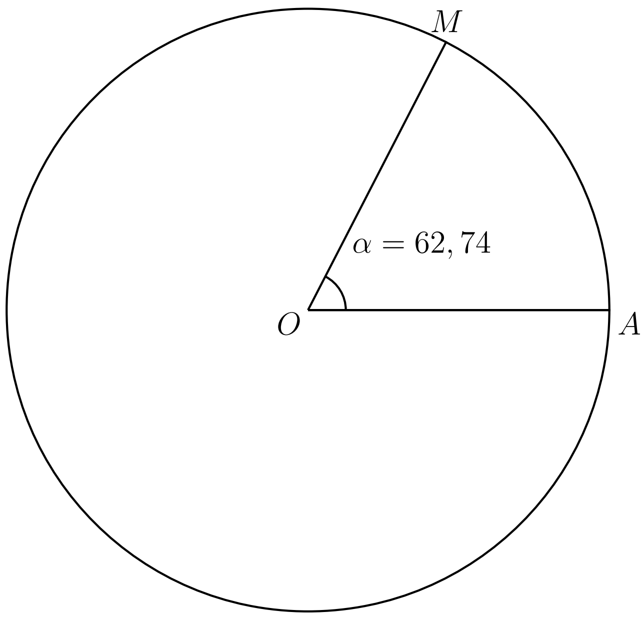
$$\alpha = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = -5,1882 + 2\pi = 1,0950 \text{ rad}$$

On convertit α en degré :

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{180}{\pi} \Longrightarrow x = \frac{180\alpha}{\pi} = 62,74^\circ$$

(b) L'arc AM mesure $r\alpha = 4 \times 1,0950 = 4,38$ cm.

(c) On donne à A une position simple.



DEVOIR N°9 DU 12/12/02

Énoncé - Groupe 1

Soit $f :\mapsto \sqrt{3x^2+4x-7}$.

1. Ensemble de définition.
2. Montrer que $\Delta : x = -\dfrac{2}{3}$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
3. Résoudre $f(x) = 3x+7$.
4. Résoudre $f(x) > 3x+7$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 2x + \cos 3x = 0$.

Correction - Groupe 1

1.
$$\begin{array}{rcl} x \in \mathcal{D}_f & \Leftrightarrow & 3x^2+4x-7 \geqslant 0 \\ & \Leftrightarrow & (x-1)(3x+7) \geqslant 0 \\ & \Leftrightarrow & x \leqslant -\dfrac{7}{3} \text{ ou } x \geqslant 1 \end{array}$$

Donc $\mathcal{D}_f = \left]-\infty, -\dfrac{7}{3}\right] \cup [1, +\infty[$.

2. $\Delta : x = -\dfrac{2}{3}$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{D}_f : \begin{cases} -\dfrac{4}{3} - x \in \mathcal{D}_f \ \mathbf{[1]} \\ f\left(-\dfrac{4}{3} - x\right) = f(x) \ \mathbf{[2]} \end{cases}$

[**1**] :
$$\begin{array}{rcl} x \in \mathcal{D}_f & \Leftrightarrow & x \leqslant -\dfrac{7}{3} \text{ ou } x \geqslant 1 \\ & \Leftrightarrow & -x \geqslant \dfrac{7}{3} \text{ ou } -x \leqslant -1 \\ & \Leftrightarrow & -\dfrac{4}{3} - x \geqslant 1 \text{ ou } -\dfrac{4}{3} - x \leqslant -\dfrac{7}{3} \\ & \Leftrightarrow & -\dfrac{4}{3} - x \in \mathcal{D}_f \end{array}$$

[**2**] :
$$\begin{array}{rcl} f\left(-\dfrac{4}{3} - x\right) & = & \sqrt{3\left(-\dfrac{4}{3} - x\right)^2 + 4\left(-\dfrac{4}{3} - x\right) - 7} \\ & = & \sqrt{3\left(\dfrac{16}{9} + \dfrac{8}{3}x + x^2\right) - \dfrac{16}{3} - 4x - 7} \\ & = & \sqrt{\dfrac{16}{3} + 8x + 3x^2 - \dfrac{16}{3} - 4x - 7} \\ & = & \sqrt{3x^2+4x-7} = f(x) \end{array}$$

3. Si l'équation $f(x) = 3x+7$ a des solutions, elles vérifient nécessairement $f^2(x) = (3x+7)^2$, beaucoup plus facile à résoudre :
$$\begin{array}{rrcl} f^2(x) = (3x+7)^2 \Leftrightarrow & 3x^2+4x-7 & = & 9x^2+42x+49 \\ \Leftrightarrow & -6x^2-38x-56 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & 3x^2+19x+28 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (x+4)(3x+7) & = & 0 \end{array}$$

Donc $\mathcal{S} \subset \left\{-4, -\frac{7}{3}\right\}$. Réciproquement on vérifie que la seule solution est en fait $-\frac{7}{3}$. Finalement $\mathcal{S} = \left\{-\frac{7}{3}\right\}$.

4. Dressons un tableau de signes pour résoudre l'inéquation $f(x) > 3x + 7$.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2 + 4x - 7$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$3x + 7$		$-$	0	$+$		$+$	

(a) Il est clair que l'ensemble $\left]-\frac{7}{3}, 1\right[$ ne répond pas à la question car $f(x)$ n'y est pas définie.

(b) Sur $\left[-\infty, -\frac{7}{3}\right]$ on a "positif > négatif" ce qui est vrai sauf pour $-\frac{7}{3}$ pour lequel il y a égalité.

(c) Sur $[1, +\infty[$, les deux membres de l'inéquation sont positifs et on peut élever au carré :

$$f(x) > 3x + 7 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 7 > (3x + 7)^2$$

en utilisant les calculs de la question précédente

$$\begin{aligned} f(x) > 3x + 7 \quad &\Leftrightarrow \quad (x + 4)(3x + 7) < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -4 < x < -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

ce qui est impossible sur $[1, +\infty[$. En conclusion : $\mathcal{S}' = \left[-\infty, -\frac{7}{3}\right[$.

5.

$$\begin{aligned} \sin 2x + \cos 3x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\sin 2x = \cos 3x \\ &\Leftrightarrow \quad \sin(-2x) = \cos 3x \\ &\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \cos 3x \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} + 2x = 3x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2} + 2x = -3x + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi \quad \text{ou} \quad 5x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{S}'' = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ -\frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$

DEVOIR N°10 DU 19/12/02

Énoncé - Groupe 1

1. Écrire la définition de $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.
2. Soit $f : x \mapsto -x + 2 - \dfrac{3}{x-1}$.
   (a) Calculer la dérivée de f (en revenant à la définition).
   (b) Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3.
   (c) Démontrer que $I(1,1)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Correction - Groupe 1

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathcal{D}_f\ (x \leqslant -\alpha \Longrightarrow f(x) \geqslant \varepsilon)$.
2. (a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

$$\begin{aligned} a(h) &= \frac{1}{h}\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(-x_0 - h + 2 - \frac{3}{x_0+h-1} + x_0 - 2 + \frac{3}{x_0-1}\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(-h + \frac{-3(x_0-1) + 3(x_0+h-1)}{(x_0+h-1)(x_0-1)}\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\frac{3h}{(x_0+h-1)(x_0-1)} - h\right) \\ &= \frac{3}{(x_0+h-1)(x_0-1)} - 1 \end{aligned}$$

d'où $\lim_{h\to 0} a(h) = \dfrac{3}{(x_0-1)^2} - 1$. La fonction f est donc dérivable pour tout $x \in \mathcal{D}_f$; sa dérivée est $f(x) = \dfrac{3}{(x-1)^2} - 1$.

(b) La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3 a pour équation $y = f'(3)(x-3) + f(3)$ c'est-à-dire $y = -\dfrac{1}{4}(x-3) - \dfrac{5}{2}$ et enfin $y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{7}{4}$.

(c) Un point $M(x,y)$ du repère de centre O a pour coordonnées $M(X,Y)$ dans le repère de centre I. Alors

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 1 \end{cases}$$

Puis

$$M(x,y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathcal{D}_f \\ y = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ y = -x + 2 - \dfrac{3}{x-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y + 1 \neq 1 \\ Y + 1 = -X - 1 + 2 - \dfrac{3}{X+1-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y \neq 0 \\ Y + 1 = -X - \dfrac{3}{X} \end{cases}$$

et en posant $g : x \mapsto -x - \dfrac{3}{x}$ (donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$),

$$M(x,y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathcal{D}_g \\ y = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow M(X,Y) \in \mathcal{C}_g$$

En résumé $\mathcal{C}_f = \mathcal{C}_g$. Or g est impaire donc $\mathcal{C}_g$ admet le centre du nouveau repère comme centre de symétrie, c'est-à-dire que $\mathcal{C}_f$ admet I comme centre de symétrie.

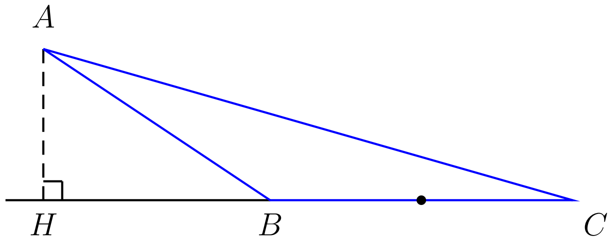
DEVOIR N°11 DU 16/01/03

Énoncé - Groupe 1

▶ EXERCICE 1

A. Plusieurs écritures d'un même produit scalaire

ABC est un triangle, H est le projeté orthongonal de A sur (BC) et I le milieu de $[BC]$.



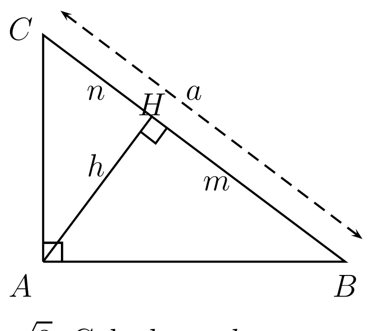
1. En écrivant $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$, démontrer que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}^2 + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} \quad \textbf{[1]}$$

2. (a) Démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.
   (b) En écrivant $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC}$ **[2]**.
   (c) Démontrer de même que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CB}$ **[3]**.
3. En écrivant $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$, prouver que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - IB^2$ **[4]**.

B. Caractérisation d'un triangle rectangle

1. Dire que le triangle ABC est rectangle en A équivaut à dire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Déduire alors du **A** que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) Le triangle ABC est rectangle en A,
   (ii) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BH} = BA^2$,
   (iii) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CH} = CA^2$,
   (iv) $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = -HA^2$,
   (v) $IA = IB = IC$ où I est le milieu du segment $[BC]$.
2. **Application.** ABC est un triangle rectangle en A.
   (a) En utilisant les notations portées sur la figure ci-dessous, déduire de la question précédente que $c^2 = am$, $b^2 = an$ et $h^2 = mn$.



   (b) On donne $n = 3$ et $h = \sqrt{3}$. Calculer a, b et c.

▶ **EXERCICE 2**

A. Questions préliminaires

1. A, B, C sont trois points distincts non alignés. Démontrer que le seul vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ est le vecteur nul.
2. OBC est un triangle isocèle en O. Démontrer que $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ [**1**].

B. ABC est un triangle, $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit de centre O, H son orthocentre et G son centre de gravité.

1. (a) En utilisant la relation [1] et $\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{HA}$, démontrer que

$$(\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

   (b) Démontrer de même que

$$(\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

   (c) En utilisant **A.1**, en déduire que : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

2. (a) En tenant compte de $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, démontrer que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.

   (b) En déduire que O, H et G sont alignés. La droite contenant ces points est appelée droite D'Euler du triangle ABC.

Correction - Groupe 1

▶ **EXERCICE 1**

A. Plusieurs écritures d'un même produit scalaire

1.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) \\ &= \overrightarrow{AH}^2 + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}\end{aligned}$$

   Mais H est le projeté orthogonal de A sur $\overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HB} = 0$. De fait $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}^2 + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$ [**1**].

2. (a)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

   (b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$, mais $\overrightarrow{AB}$ se projette orthogonalement en $\overrightarrow{HB}$ sur le support de $\overrightarrow{BC}$, donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} \quad [\mathbf{2}]\end{aligned}$$

   (c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC}$, mais $\overrightarrow{AC}$ se projette orthogonalement en $\overrightarrow{HC}$ sur le support de $\overrightarrow{BC}$, donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{HC} \\ &= \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CH} \quad [\mathbf{3}]\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB})\cdot(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC})\\ &= \overrightarrow{AI}^2+\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}\\ &= \overrightarrow{AI}^2-\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{IC}\ (\overrightarrow{IC}=-\overrightarrow{IB} \text{ car } I \text{ milieu de } [AB])\\ &= AI^2-IB^2\quad [\mathbf{4}]\end{aligned}$$

B. Caractérisation d'un triangle rectangle

1. **(i)** $\Leftrightarrow$ **(ii)** :

$$\begin{aligned} ABC \text{ rectangle en } A \Leftrightarrow&\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0\\ \Leftrightarrow&\quad \overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \text{ (d'après [2])}\\ \Leftrightarrow&\quad AB^2 = \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

(i) $\Leftrightarrow$ **(iii)** :

$$\begin{aligned} ABC \text{ rectangle en } A \Leftrightarrow&\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0\\ \Leftrightarrow&\quad \overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CH} = 0 \text{ (d'après [3])}\\ \Leftrightarrow&\quad AC^2 = \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CH}\end{aligned}$$

(i) $\Leftrightarrow$ **(iv)** :

$$\begin{aligned} ABC \text{ rectangle en } A \Leftrightarrow&\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0\\ \Leftrightarrow&\quad \overrightarrow{AH}^2+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC} = 0 \text{ (d'après [1])}\\ \Leftrightarrow&\quad \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC} = -AH^2\end{aligned}$$

(i) $\Leftrightarrow$ **(v)** :

$$\begin{aligned} ABC \text{ rectangle en } A \Leftrightarrow&\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0\\ \Leftrightarrow&\quad AI^2-IB^2 = 0 \text{ (d'après [4])}\\ \Leftrightarrow&\quad AI = IB\end{aligned}$$

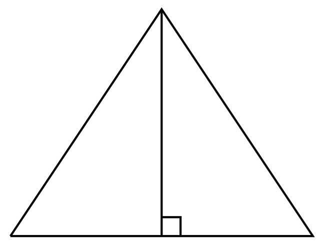
De plus I étant le milieu de $[BC]$, $IB = IC$.

2. (a) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BH} = \overline{BC}\times\overline{BH}$. En orientant (BC) de B vers C, par exemple, $\overline{BC}\times\overline{BH} = am$. D'après (ii), $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BH} = AB^2 = c^2$. Donc $c^2 = am$ [**R**].
   (b) $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CH} = \overline{CB}\times\overline{CH} = (-a)(-n) = an$ (en gardant la même orientation). D'après (iii), $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CH} = AC^2 = b^2$. Donc $c^2 = an$ [**R'**].
   (c) $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC} = \overline{HB}\times\overline{HC} = (-m)n = -mn$ (même orientation encore) ; comme $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC} = -AH^2$ d'après (iv), $-mn = -h^2$, ou encore $h^2 = mn$ [**R"**].
3. $n = 3$ et $h = \sqrt{3}$. D'après R", $m = \dfrac{h^2}{n} = \dfrac{(\sqrt{3})^2}{3} = 1$.
   Comme B, H et C sont alignés dans cet ordre, on a $a = m + n$ donc $a = 4$.
   D'après R : $c = \sqrt{am} = \sqrt{4} = 2$.
   D'après R' : $b = \sqrt{an} = \sqrt{4\times 3} = 2\sqrt{3}$.

▶ **EXERCICE 2**

A. Questions préliminaires

1. $Si \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, alors en désignant par (δ) le support de $\overrightarrow{u}$, $(\delta)/\!/(AB)$ et $(\delta)/\!/(BC)$ d'où $(AB)/\!/(AC)$, c'est-à-dire que A, B et C serait alignés, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
2. OBC est isocèle en O donc (OI), I étant le milieu de $[BC]$ est une hauteur du triangle. de $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI}$, on déduit $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC}$, or $(OI) \perp (BC)$ donc $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.



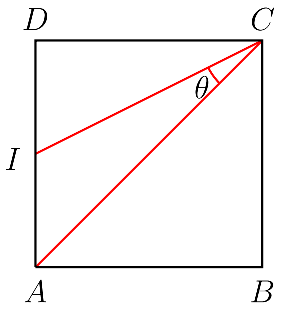
B.

1. (a) $OB = OC$ car O est le centre du cercle circonscrit donc OBC est isocèle en O et $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ **[1]** d'après **A.2**.
   $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{BC}$ car (HA) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC, donc $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, soit $(\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ **[2]**.
   En ajoutant [1] et [2] en factorisant par $\overrightarrow{BC}$, on obtient bien
   $$(\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \quad \textbf{[R]}$$
   (b) $OA = OB$ car O est le centre du cercle circonscrit donc OAB est isocèle en O et $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ **[1']** d'après **A.2**.
   $\overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{HB}$ car (HC) est la hauteur issue de C dans le triangle ABC, donc $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, ou encore $(\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ **[2']**.
   En ajoutant [1'] et [2'] en factorisant par $\overrightarrow{Ab}$, on obtient bien
   $$(\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \textbf{[RR]}$$
   (c) D'après R et RR on est dans le cas de **A.1**, car A, B et C ne sont pas alignés (ils forment un vrai triangle), donc $\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$, c'est-à-dire
   $$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$
2. (a) G est le centre de gravité du triangle ABC, donc l'isobarycentre des points A, B et C, on a $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC} \\ &= 3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} \\ &= 3\overrightarrow{OG} \end{aligned}$$
   (b) on a $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$, d'où $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$, les droites (OH) et (OG) sont parallèles avec un point commun, donc confondues et O, G et H sont alignés.

Énoncé - Groupe 2

▶ EXERCICE 1

$ABCD$ est un carré de côté a, le point I est le milieu du segment $[DA]$. Le but de l'exercice est le calcul de $\theta = \widehat{ACI}$.



1. Démontrer que $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA} = \dfrac{a^2}{2}\sqrt{10} \times \cos\theta$
2. (a) Démontrer que $\overrightarrow{CI} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD})$.
   (b) En déduire que $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA} = \dfrac{3}{2}a^2$.
3. Donner une valeur de θ en degrés tronquée au centième.

▶ EXERCICE 2

Dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on donne les droites d et d' d'équation respectives $y = x - 1$ et $y = -2x + 3$. On se propose de trouver l'angle aigu α formé par ces deux droites.

1. Tracer ces droites dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
2. (a) On note $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{l}1\\1\end{array}\right.$ et $\overrightarrow{v}\left|\begin{array}{l}1\\-2\end{array}\right.$. Pourquoi ces vecteurs sont-ils des vecteurs direteurs respectivement de d et d' ?
   (b) Calculer $\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et en déduire une valeur approchée de α.

▶ EXERCICE 3

Voir exercice 2, contrôle n°11, groupe 1. Page 25.

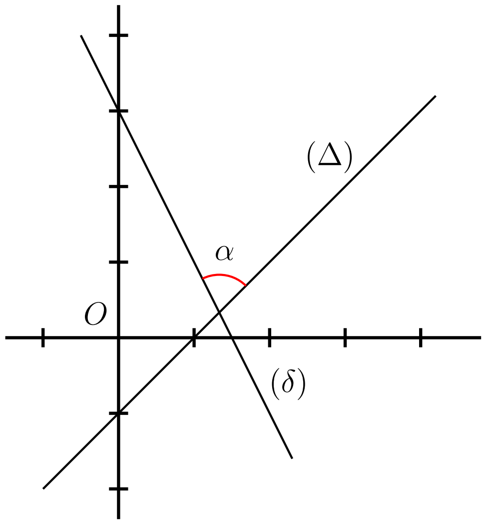
Correction - Groupe 2

▶ EXERCICE 1

1. On calcule CI et CA. Le théorème de Pythagore appliqué dans DIC rectangle en D donne
$$CI^2 = DI^2 + DC^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5}{4}a^2 \text{ d'où } CI = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$
Comme $[CA]$ est une diagonale du carré, $CA = a\sqrt{2}$, d'où le produit scalaire,
$$\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA} = CI \times CA \times \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}a \times a\sqrt{2} \times \cos\theta = \frac{a^2}{2}\sqrt{10} \times \cos\theta$$
2. (a) Le point I est le milieu de $[AD]$, donc $\overrightarrow{CI} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD})$
   (b) Donc
$$\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(CA^2 + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA}).$$
   Le vecteur $\overrightarrow{CA}$ se projette orthogonalement sur (CD) en le vecteur $\overrightarrow{CD}$, donc $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = a^2$. Par ailleurs $CA^2 = 2a^2$, donc on a bien $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA} = \dfrac{1}{2}(2a^2 + a^2) = \dfrac{3}{2}a^2$.
3. D'après les questions précédentes, $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA} = \dfrac{a^2}{2}\sqrt{10} \times \cos\theta = \dfrac{3}{2}a^2$, d'où $\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ et enfin $\theta \simeq 18,43°$.

► **EXERCICE 2**

1. Dans un répère orthonormé, on trace $\Delta : y = x - 1$ et $\delta : y = -2x + 3$.



2. (a) On sait qu'un vecteur directeur d'une droite d'équation $y = mx + p$ est $\overrightarrow{w}\left|\begin{array}{l}1\\ m\end{array}\right.$, donc $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{l}1\\ 1\end{array}\right.$ dirige Δ et $\overrightarrow{v}\left|\begin{array}{l}1\\ -2\end{array}\right.$ dirige δ.

   (b) Pour calculer $\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on évalue de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$. D'une part

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \sqrt{10} \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

   et d'autre part, puisqu'on est en repère orthonormal,

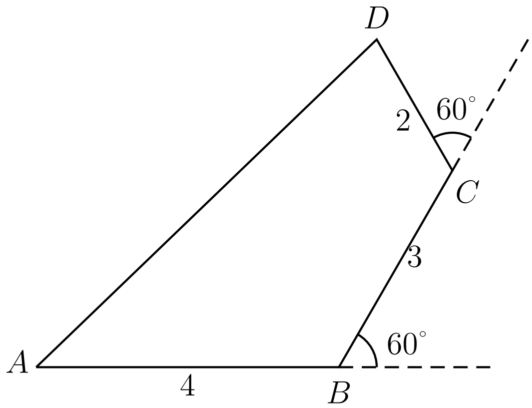
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 1 \times 1 - 1 \times 2 = -1$$

   d'où $\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \dfrac{-1}{\sqrt{10}}$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \simeq -108,43^\circ$.
   Ce qui nous intéresse c'est l'angle géométrique entre les deux droites, donc $\alpha = -108,43 + 180 = 71,57^\circ$.

DEVOIR N°12 DU 23/01/03

Énoncé - Groupe 1

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - x + 7}{2 - x}$.
   (a) Limites aux bornes de l'ensemble de définition
   (b) Montrer que la droite $\Delta : y = -x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.
   (c) Étudier les positions relatives de Δ et $\mathcal{C}_f$.
   (d) Montrer que le point d'intersection des asymptotes est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
2. Le but de l'exercice est de calculer AD.



   (a) Développer $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})^2$.
   (b) Calculer AD.

Correction - Groupe 1

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{2\}$. Décomposons $f(x)$ en éléments simples :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = \frac{-x^2 + x - 7}{x - 2} = \frac{-x(x-2) - x - 7}{x - 2} = -x + \frac{-(x-2) - 9}{x - 2} = -x - 1 - \frac{9}{x - 2}$$

   (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$. De même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$.
   $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \dfrac{9}{2 - x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \dfrac{9}{2 - x} = -\infty$.
   La droite $\delta : x = 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.
   (b) Soit $d(x) = f(x) - (-x - 1)$. On a

$$d(x) = -x - 1 - \frac{9}{x - 2} - (-x - 1) = -\frac{9}{x - 2} = \frac{9}{2 - x}$$

   et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = 0$, donc $\Delta : y = -x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.
   (c) Le signe de $d(x)$ dépend de celui de $2 - x$, d'où
   – Si $x < 2$, $d(x) > 0$ soit $f(x) - (-x - 1) > 0$ ou encore $f(x) > -x - 1$, c'est-à-dire que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ.
   – Si $x > 2$, $d(x) < 0$ soit $f(x) - (-x - 1) < 0$ ou encore $f(x) < -x - 1$, c'est-à-dire que $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de Δ.

(d) Les coordonnées du point d'intersection I des asymptotes $\delta : x = 2$ et $\Delta : y = -x - 1$ vérifient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ y & = & -x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ y & = & -3 \end{array}\right.$$

Il s'agit donc de vérifier que $I(2, -3)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. Or, en général

$$I(a, b) \text{ centre de symétrie de } \mathcal{C}_f \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{D}_f : \left\{\begin{array}{l} 2a - x \in \mathcal{D}_f \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{array}\right.$$

Ici il s'agit donc de vérifier que $\forall x \in \mathcal{D}_f : \left\{\begin{array}{ll} 4 - x \in \mathcal{D}_f & [\mathbf{1}] \\ f(4 - x) = -6 - f(x) & [\mathbf{2}] \end{array}\right.$

[**1**] :

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x \neq 2 \Leftrightarrow -x \neq -2 \Leftrightarrow 4 - x \neq 2 \Leftrightarrow 4 - x \in \mathcal{D}_f$$

[**2**] :

$$f(4 - x) = -(4 - x) - 1 - \frac{9}{4 - x - 2} = x - 5 - \frac{9}{-x + 2}$$

et

$$-6 - f(x) = -6 + x + 1 + \frac{9}{x - 2} = -5 + x - \frac{9}{-x + 2}$$

donc $f(4 - x) = -6 - f(x)$ et I est bien un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

2. (a)

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD})$$

On calcule les trois produits scalaires de la parenthèse :
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 \times 3 \times \cos(60^\circ) = 6$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 4 \times 2 \times \cos(120^\circ) = -4$
- $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = -3 \times 2 \times \cos(120^\circ) = 3$

Donc $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})^2 = 4^2 + 3^2 + 2^2 + 2(6 - 4 + 3) = 39$.
Par ailleurs $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})^2 = \overrightarrow{AD}^2 = AD^2$, donc $AD = \sqrt{39}$.

DEVOIR N°13 DU 07/02/03

Énoncé - Groupe 1

On donne les points $A\left|\begin{array}{l}3\\1\end{array}\right.$ $B\left|\begin{array}{l}2\\4\end{array}\right.$ et $C\left|\begin{array}{l}1-\sqrt{5}\\2\end{array}\right.$ et un repère orthonormal.

1. (a) Donner une équation de la médiane m_A issue de A dans le triangle ABC.
   (b) Donner une équation de la hauteur h_A issue de A dans le triangle ABC.
   (c) Donner une équation de la médiatrice Δ de [BC].
2. (a) Donner une valeur arrondie au degré de l'angle $\theta = \widehat{BAC}$.
   (b) donner l'aire S de ABC.
3. Soit $G = \text{Bar}\{(A,1),(B,2),(C,3)\}$. Donner les coordonnées de G.
4. Donner une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.
5. (a) Déterminer l'ensemble (P) des points tels que $MA = 2MB$.
   (b) Déterminer l'ensemble (Q) des points tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 10$.
   (c) Déterminer l'ensemble (R) des points tels que $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BA} = -4$.

Correction - Groupe 1

1. (a) Soit I le milieu de [BC] : $I\left|\begin{array}{l}\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\\3\end{array}\right.$, donc $\overrightarrow{AI}\left|\begin{array}{l}-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\\2\end{array}\right.$. La droite m_A a une équation de la forme $ax+by+c$ avec $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{l}-b\\a\end{array}\right.$ comme vecteur directeur, donc

$$m_A : 2x + \left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)y + c = 0$$

or $A \in m_A$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de m_A :

$$6 + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{15}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

en remplaçant c par sa valeur et en multipliant par 2 :

$$\boxed{m_A : 4x + (3+\sqrt{5})y - 15 - \sqrt{5} = 0}$$

(b) Le vecteur $\overrightarrow{BC}\left|\begin{array}{l}-1-\sqrt{5}\\-2\end{array}\right.$ est normal à h_A. l'équation de h_A est de la forme

$$h_A : (-1-\sqrt{5})x - 2y + c = 0$$

or $A \in h_A$ donc

$$-3 - 3\sqrt{5} - 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = 5 + 3\sqrt{5}$$

d'où (après multiplication par -1)

$$\boxed{h_A : (1+\sqrt{5})x + 2y - 5 - 3\sqrt{5} = 0}$$

(c) Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est normal à Δ donc son équation à la même forme que celle de h_A, c'est-à-dire
$$\Delta : (-1-\sqrt{5})x - 2y + c = 0$$
mais $I \in \Delta$, donc
$$(-1-\sqrt{5})\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) - 6 + c = 0 \Leftrightarrow c = 5 + \sqrt{5}$$
après calcul. Finalement
$$\boxed{\Delta : (1+\sqrt{5})x + 2y - \sqrt{5} - 5 = 0}$$

2. (a) On a $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l}-1\\3\end{array}\right.$ et $\overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l}-2-\sqrt{5}\\1\end{array}\right.$, d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2+\sqrt{5}+3 = 5+\sqrt{5}$. On en déduit aussi que $AB = \sqrt{10}$ et que $AC = \sqrt{10+4\sqrt{5}}$. Par ailleurs
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC\cos\theta = \sqrt{10}\sqrt{10+4\sqrt{5}}\cos\theta = 2\sqrt{25+10\sqrt{5}}\cos\theta$$
donc
$$\cos\theta = \frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{25+10\sqrt{5}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$
d'où l'on déduit $\theta \simeq 58^\circ$.

(b) Comme $0 \leqslant \theta \leqslant 90^\circ$ on a $\sin\theta \geqslant 0$ et :
$$\begin{aligned}\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta &= \frac{4(5+2\sqrt{5})-(1+\sqrt{5})^2}{(2\sqrt{5+2\sqrt{5}})^2} = \frac{6\sqrt{5}+14}{4(5+2\sqrt{5})}\\ &= \frac{(3\sqrt{5}+7)(5-2\sqrt{5})}{2(5+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})} = \frac{15\sqrt{5}-30+35-14\sqrt{5}}{2(25-20)} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\end{aligned}$$
donc
$$\begin{aligned}S = \frac{1}{2}AB\times AC\sin\theta &= \frac{1}{2}\sqrt{10}\sqrt{10+4\sqrt{5}}\,\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{2}\sqrt{(10+4\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{50+10\sqrt{5}+20\sqrt{5}+20} = \frac{1}{2}\sqrt{70+30\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{(5+3\sqrt{5})^2}\end{aligned}$$
Donc : $\boxed{S = \frac{5}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5}}$.

3. $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,2),(C,3)\}$, donc pour tout point M du plan $6\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$. En faisant $M = O$ (origine du repère) et en calculant
$$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}\left|\begin{array}{l}3+2\times 2+3(1-\sqrt{5}) = 10-3\sqrt{5}\\ 1+2\times 4+3\times 2 = 15\end{array}\right. \quad \text{et } 6\overrightarrow{OG}\left|\begin{array}{l}6x_G\\6y_G\end{array}\right.$$
et en écrivant l'égalité vectorielle par les coordonnées : $\boxed{G\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{5}{2}\right)}$.

4. Soient a et b les coordonées du centre du cercle et r son rayon. Les points A, B et C sont sur le cercle. On obtient donc le système

$$\left\{\begin{array}{rcl}(3-a)^2+(1-b)^2 &=& r^2\\ (2-a)^2+(4-b)^2 &=& r^2\\ (1-\sqrt{5}-a)^2+(2-b)^2 &=& r^2\end{array}\right.$$

On conserve la première équation et on remplace r^2 dans les deux autres par sa valeur donnée dans la première.

$$\left\{\begin{array}{rcl}(3-a)^2+(1-b)^2 &=& r^2\\ 4-4a+a^2+16-8b+b^2 &=& 9-6a+a^2+1-2b+b^2\\ 6-2\sqrt{5}-2a(1-\sqrt{5})+a^2+4-4b+b^2 &=& 9-6a+a^2+1-2b+b^2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}(3-a)^2+(1-b)^2 &=& r^2\\ 2a-6b &=& -10\\ a(2\sqrt{5}+4)-2b-2\sqrt{5} &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}(3-a)^2+(1-b)^2 &=& r^2\\ a &=& 3b-5\\ (3b-5)(2\sqrt{5}+4)-2b-2\sqrt{5} &=& 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}(3-a)^2+(1-b)^2 &=& r^2\\ a &=& 3b-5\\ b(6\sqrt{5}+10)-12\sqrt{5}-20 &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}(3-a)^2+(1-b)^2 &=& r^2\\ a &=& 3\times 2-5=1\\ b=2 && \end{array}\right.$$

d'où l'on déduit finalement que $r^2=5$. L'équation du cercle circonscrit au triangle ABC est donc $\boxed{(x-1)^2+(y-2)^2=5}$.

5. (a) Soit $M\left|\begin{array}{l}x\\ y\end{array}\right.$ un point du plan, alors $\overrightarrow{MA}\left|\begin{array}{l}3-x\\ 1-y\end{array}\right.$ et $\overrightarrow{MB}\left|\begin{array}{l}2-x\\ 4-y\end{array}\right.$ d'où

$$\begin{array}{rrcl}M\in(P) & \Leftrightarrow & MA &=& 2MB\\ & \Leftrightarrow & MA^2 &=& 4MB^2\\ & \Leftrightarrow & (3-x)^2+(1-y)^2 &=& 4\left[(2-x)^2+(4-y)^2\right]\\ & \Leftrightarrow & 10-6x-2y+x^2+y^2 &=& 4\left(20-4x-8y+x^2+y^2\right)\\ & \Leftrightarrow & 10-6x-2y &=& 80-16x-32y+3x^2+3y^2\\ & \Leftrightarrow & 0 &=& 3x^2+3y^2-10x-30y+70\\ & \Leftrightarrow & 0 &=& x^2+y^2-\dfrac{10}{3}x-10y+\dfrac{70}{3}\\ & \Leftrightarrow & 0 &=& \left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2-\dfrac{25}{9}+(y-5)^2-25+\dfrac{70}{3}\\ & \Leftrightarrow & \dfrac{40}{9} &=& \left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2+(y-5)^2\end{array}$$

Donc (P) est le cercle de centre $\omega\left(\dfrac{5}{3},5\right)$ et de rayon $r=\dfrac{2}{3}\sqrt{10}$.

(b)

$$\begin{array}{rrcl}M\in(Q) & \Leftrightarrow & \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &=& 10\\ & \Leftrightarrow & (3-x)(2-x)+(1-y)(4-y) &=& 10\\ & \Leftrightarrow & x^2+y^2-5x-5y+10 &=& 10\\ & \Leftrightarrow & \left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4}+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4} &=& 0\end{array}$$

Donc (Q) est le cercle de centre $\omega'\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2}\right)$ et de rayon $r'=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$.

(c) $M \in (R) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BA} = -4 \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4$. Or $\overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{l} -1 \\ 3 \end{array} \right.$, donc

$$\begin{array}{rcrcl} M \in (R) & \Leftrightarrow & -(2-x)+3(4-y) & = & -4 \\ & \Leftrightarrow & x-3y+14 & = & 0 \end{array}$$

Donc (R) est la droite d'équation $x - 3y + 14 = 0$.

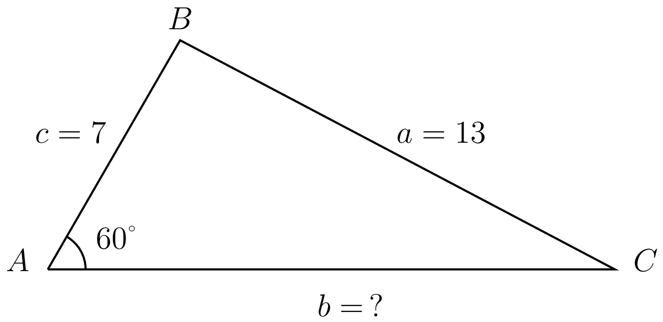
DEVOIR N°14 DU 13/02/03

Énoncé - Groupe 1

ABC est un triangle tel que $\widehat{A} = 60^\circ$, $c = 7$ et $a = 13$ (notation habituelle : $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$)

1. Faire un figure
2. Calculer b. Donner une valeur approchée de $\widehat{B}$. Calculer la surface S, le rayon R du cercle circonscrit et le rayon r du cercle inscrit.
3. Calculer la longueur de la médiane issue de A.
4. Déterminer les ensembles des points M tels que
   (a) $M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 1$
   (b) $M \in (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = -4$
   (c) $M \in (R) \Leftrightarrow MA = 2MB$.

Correction - Groupe 1



1.

2. – D'après la relation d'Al-Kashi $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$ c'est-à-dire :

$$169 = b^2 + 49 - 7c \Leftrightarrow b^2 - 7c - 120 = 0 \Leftrightarrow (b-15)(b+8) = 0$$

La seule valeur acceptable est $b = 15$, car $-8 < 0$.

– De $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$, on déduit $\cos\widehat{B} = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{13^2+7^2-15^2}{2\times 13\times 7} = -\dfrac{1}{26}$. D'où $\widehat{B} \simeq 92,2^\circ$.

– $S = \dfrac{1}{2}\,bc\sin\widehat{A} = \dfrac{1}{2}\times 7\times 15\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{105}{4}\sqrt{3}$.

– $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{7\times 13\times 15}{4\times\frac{105}{4}\sqrt{3}} = \dfrac{7\times 13\times 15}{7\times 15\times\sqrt{3}} = \dfrac{13}{\sqrt{3}} = \dfrac{13}{3}\sqrt{3}$.

– $r = \dfrac{S}{p}$ ou p est le demi-périmètre. Ici $p = \dfrac{1}{2}(7+13+15) = \dfrac{35}{2}$, donc $r = \dfrac{105}{4}\sqrt{3}\times\dfrac{2}{35} = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$.

3. D'après le théorème de la médiane $b^2 + c^2 = \dfrac{a^2}{2} + 2AI^2$, ou

$$AI^2 = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(15^2 + 7^2 - \frac{13^2}{2}\right) = \frac{379}{4}$$

donc $AI = \dfrac{1}{2}\sqrt{379} \simeq 9,73$.

4. (a) On désigne par I le milieu de $[BC]$, on a donc $\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IB}$.

$$\begin{array}{rrcl} M \in (P) & \Leftrightarrow & \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} & = & 1 \\ & \Leftrightarrow & (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) & = & 1 \\ & \Leftrightarrow & \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IB}^2 & = & 1 \\ & \Leftrightarrow & MI^2 & = & 1 + \left(\dfrac{13}{2}\right)^2 \\ & \Leftrightarrow & MI & = & \dfrac{1}{2}\sqrt{173} \end{array}$$

donc (P) est le cercle de centre I et de rayon $\dfrac{1}{2}\sqrt{173}$.

(b) $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overline{BM} \times \overline{BC}$ où H désigne le projeté orthogonal de M sur (BC), donc $M \in (Q) \Leftrightarrow \overline{BM} \times \overline{BC} = -4 \Leftrightarrow \overline{BH} = -\dfrac{4}{13}$ en orientant (BC) de B vers C.
(Q) est donc la droite perpendiculaire à (BC) telle que le point d'intersection de celle-ci avec (BC) vérifie $\overline{BH} = -\dfrac{4}{13}$, en conservant la même orientation.

(c) Soit $G = \text{Bar}\{(A, 1), (B, 2)\}$ et $H = \text{Bar}\{(A, 1), (B, -2)\}$. Pour tout point M du plan on a $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$ et $-\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}$.
L'ensemble (R) s'en déduit facilement :

$$\begin{array}{rrcl} M \in (R) & \Leftrightarrow & MA & = & 2MB \\ & \Leftrightarrow & \overrightarrow{MA}^2 - 4\overrightarrow{MB}^2 & = & 0 \\ & \Leftrightarrow & (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) & = & 0 \\ & \Leftrightarrow & -\overrightarrow{MH} \cdot 3\overrightarrow{MG} & = & 0 \\ & \Leftrightarrow & \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MG} = 0 & & \end{array}$$

ce qui caractérise le cercle de diamètre $[GH]$.

Énoncé et correction - Groupe 2

Voir contrôle n°13, groupe 1. Page 32.

DEVOIR N°15 DU 20/02/03

Énoncé - Groupe 1

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - x - 2}{3 - x}$.

1. Étude de f.
   (a) Ensemble de définition
   (b) Parité
   (c) Dérivée
   (d) Limites aux bornes de l'ensemble de définition.
   (e) Tableau de variations
2. Équation de la tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse 2 et position relative de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}_f$.
3. Déterminer a, b et c tels que $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = ax + b + \dfrac{c}{3 - x}$.
4. Démontrer que la droite $\Delta : y = -x - 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.
5. Montrer que $I(3, -5)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Correction - Groupe 1

1. (a) $x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow 3 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{3\}$.
   (b) $f(1) = -1$ et $f(-1) = 0$. Donc f n'est ni paire ni impaire.
   (c) $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = \dfrac{-x(-x+3) + 2x - 2}{-x+3} = -x + \dfrac{2x - 2}{-x+3} = -x + \dfrac{-2(-x+3) + 4}{-x+3}$. Donc $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = -x - 2 + \dfrac{4}{3 - x}$. D'où la dérivée :

$$f'(x) = -1 + \frac{4}{(3-x)^2} = \frac{4 - (3-x)^2}{(3-x)^2} = \frac{(x-1)(5-x)}{(3-x)^2}$$

   et son signe dépend de celui de $(x - 1)(5 - x)$.
   (d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$. De même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
   $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \dfrac{5}{3 - x} = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$. On trouve de la même façon $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} = -\infty$.

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-x+5$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty \, \| \, -\infty$	$\nearrow$	-9	$\searrow$	$-\infty$

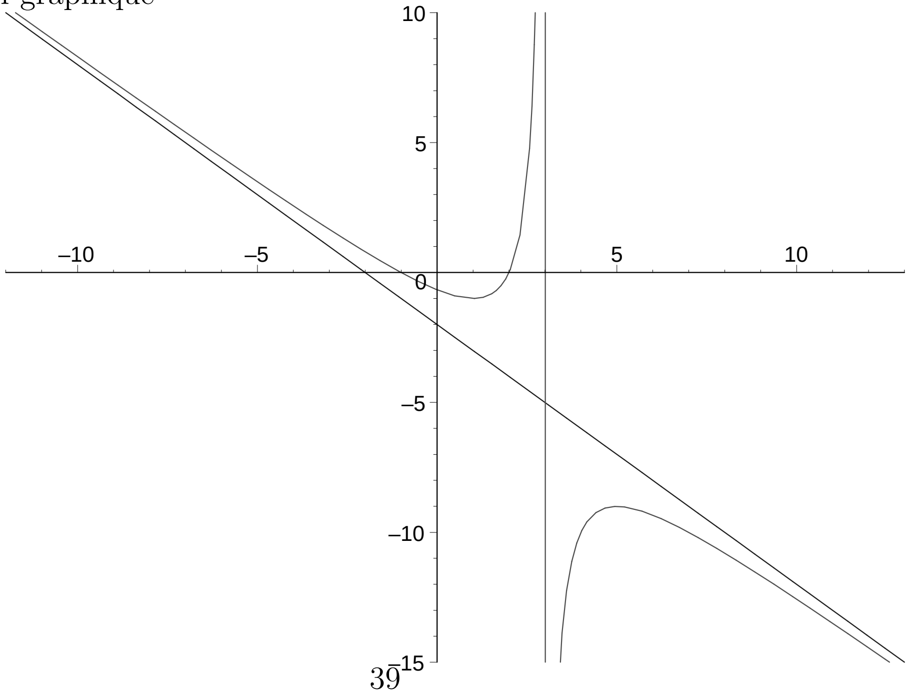
   (e)

2. La tangente cherchée à pour équation $y = f'(2)(x-2) + f(2)$ c'est-à-dire $y = 3(x-2)+0$, ou encore $\mathcal{T} : y = 3x - 6$.
   On étudie le signe de la différence $f(x) - (3x-6)$:

$$\begin{aligned} f(x) - (3x-6) &= -x - 2 + \frac{4}{-x+3} - 3x + 6 \\ &= -4x + 4 + \frac{4}{-x+3} \\ &= \frac{(-4x+4)(-x+3)+4}{-x+3} \\ &= \frac{4x^2 - 16x + 16}{-x+3} \\ &= \frac{4(x-2)^2}{-x+3} \end{aligned}$$

   Le signe de la différence est donnée par celui de $-x+3$ d'où :
   – si $x < 3$, $f(x) - (3x-6) > 0$, donc $f(x) > 3x - 6$ et $\mathcal{T}$ est au-dessous de $\mathcal{C}_f$.
   – si $x > 3$, $f(x) - (3x-6) < 0$, donc $f(x) < 3x - 6$ et $\mathcal{T}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$.
3. On a déjà démontré que $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = -x - 2 + \dfrac{4}{3-x}$.
4. $f(x) - (-x-2) = \dfrac{4}{3-x}$. Donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = 0$ et Δ est bien asymptote à $\mathcal{C}_f$.
5. $I(3,-5)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{D}_f : \begin{cases} 6 - x \in \mathcal{D}_f & [\mathbf{1}] \\ f(6-x) = -10 - f(x) & [\mathbf{2}] \end{cases}$.
   [1] :
$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x \neq 3 \Leftrightarrow -x \neq -3 \Leftrightarrow 6 - x \neq 3 \Leftrightarrow 6 - x \in \mathcal{D}_f$$

   [2] :
$$f(6-x) = -6 + x - 2 + \frac{4}{-6+x+3} = -8 + x + \frac{4}{x-3}$$
   et
$$-10 - f(x) = -10 + x + 2 - \frac{4}{-x+3} = -8 + x + \frac{4}{x-3}$$
   donc I est bien un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
6. Représentation graphique



DEVOIR N°16 DU 27/03/03

Énoncé - Groupe 1

Soit $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$ et $f(x) = \dfrac{P(x)}{(x+2)^2}$.

1. (a) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x+1)^3 + 2$.
   (b) Démontrer que $\forall x \in]-\infty, -2,2], P(x) < 0,3$.
2. (a) Trouver les réels a, b, c et d tels que $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2} + \dfrac{d}{(x+1)^2}$.
   (b) Démontrer que $\Delta : y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ et déterminer leur position relative.
   (c) Étudier f : parité, dérivée, limites aux bornes de l'ensemble de définition, tableau de variations.
   (d) Soit I le point d'intersection de Δ et $\mathcal{C}_f$. Déterminer l'équation de la tangente en I à $\mathcal{C}_f$.
   (e) Tracer $\mathcal{C}_f$ et Δ dans un repère orthonormé.

Correction - Groupe 1

1. (a) $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)^3 + 2 = x^2 + 3x^2 + 3x + 1 + 2 = P(x)$.
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) = 3(x+1)^2 > 0$, donc P est croissante sur $\mathbb{R}$ et $x \leqslant -2,2 \Longrightarrow P(x) \leqslant P(-2,2) = 0,272 < 0,3$.
2. (a) Il est évident que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ car $x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow (x+2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$.

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2} + \frac{d}{(x+2)^2} \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = \frac{(ax+b)(x+2)^2 + c(x+2) + d}{(x+2)^2} \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = \frac{(ax+b)(x^2+4x+4) + c(x+2) + d}{(x+2)^2} \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = \frac{ax^3 + 4x^2 + 4ax + bx^2 + 4bx + 4b + cx + 2c + d}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

en identifiant les coefficients du numérateur avec ceux de $P(x)$ on est conduit au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ 4a + b & = & 3 \\ 4a + 4b + c & = & 3 \\ 4b + 2c + d & = & 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & -1 \\ c & = & 3 \\ d & = & 1 \end{array} \right.$$

donc $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = x - 1 + \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{1}{(x+2)^2}$.

   (b) $f(x) - (x-1) = \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{1}{(x+2)^2}$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = 0 + 0 = 0$, et la droite Δ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.

   Pour les positions relatives, étudions le signe de $f(x) - (x-1) = \dfrac{3x+7}{(x+2)^2}$, qui est immédiat :

– si $x < -\dfrac{7}{3}$, $f(x) - (x-1) < 0$, soit $f(x) < x - 1$ et $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de Δ.

– si $x > -\dfrac{7}{3}$ et $x \neq 2$, $f(x) - (x-1) > 0$, soit $f(x) > x - 1$ et $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ.

(c) ▶ $f(-1) = 2$ et $f(1) = \dfrac{10}{9}$ donc f n'est ni paire ni impaire.

▶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$. De même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to-2 \\ x<-2}} f(x) = \dfrac{P(-2)}{0^+} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$. La limite est la même à droite de 2.

▶

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = 1 - \frac{3}{x+2} - \frac{2(x+4)}{(x+2)^4} &= \frac{(x+2)^3 - 3(x+2) - 2}{(x+2)^3} \\
= \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 3x - 6 - 2}{(x+2)^3} &= \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{(x+2)^3} \\
&= \frac{x(x+3)^2}{(x+2)^3} = \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2 \times \frac{x}{x+2}
\end{aligned}$$

▶ Le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $x(x+2)$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		-3		-2		0		$+\infty$
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty \| +\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

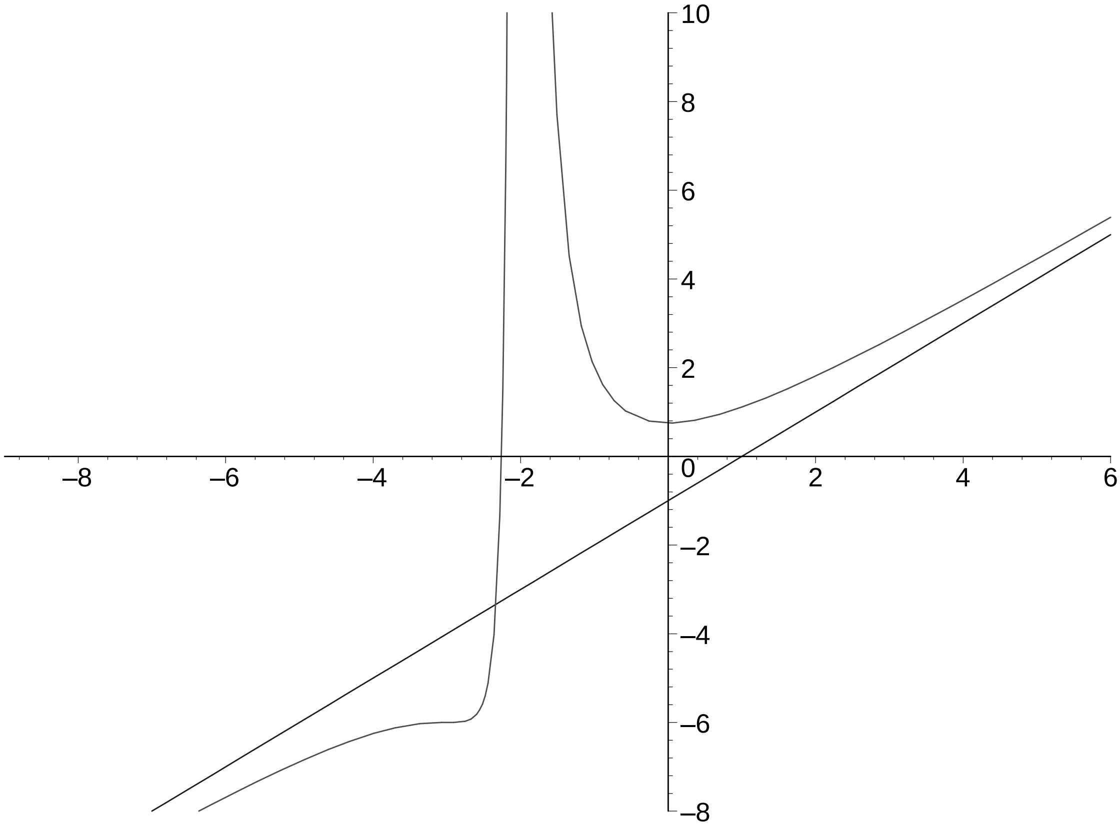
(d) I est le point d'intersection de $\Delta : y = x - 1$ et $\mathcal{C}_f$, donc ses coordonnées vérifient $f(x) = x - 1$, mais on a vu que $f(x) - (x-1) = \dfrac{3x+7}{(x+2)^2}$, donc

$$f(x) = x - 1 \Leftrightarrow f(x) - (x-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x+7}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{3}$$

donc l'équation réduite de la tangente est

$$\begin{aligned}
y &= f'\left(-\frac{7}{3}\right)\left(x + \frac{7}{3}\right) + f\left(-\frac{7}{3}\right) \\
&= \frac{-\frac{7}{3}\left(-\frac{7}{3}+3\right)^2}{\left(-\frac{7}{3}+2\right)^3}\left(x + \frac{7}{3}\right) + \frac{\left(-\frac{7}{3}+1\right)^3 + 2}{\left(-\frac{7}{3}+2\right)^2} \\
&= \frac{-\frac{7}{3} \times \frac{4}{9}}{-\frac{1}{27}}\left(x + \frac{7}{3}\right) + \frac{-\frac{64}{27} + 2}{\frac{1}{9}} \\
&= 28\left(x + \frac{7}{3}\right) - \frac{10}{3} \\
&= 28x + 62
\end{aligned}$$

(e) Représentation graphique



DEVOIR N°17 DU 03/04/03

Énoncé - Groupe 1

▶ **EXERCICE 1**

ABC est un triangle, O le mileu de $[BC]$.
On note f la transformation qui à tout point M du plan associe $M' = f(M)$ de la manière suivante :
• N est le milieu de $[AM]$.
• M' est le milieu de $[ON]$.

1. (a) Construire un triangle ABC et placer O.
   (b) Placer sur la figure $A' = f(A)$.
2. On note G le centre de gravité du triangle ABC.
   (a) Démontrer que $f(G) = G$.
   (b) Construire $B' = f(B)$ et démontrer que B, G et B' sont alignés.
3. (a) Démontrer que pour tout point M, $2\overrightarrow{GM'} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GN}$ et que $2\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GM}$.
   (b) En déduire que $4\overrightarrow{G'M} = \overrightarrow{GM}$ et que f est l'homothétie de centre G et de rapport $\dfrac{1}{4}$.

▶ **EXERCICE 2**

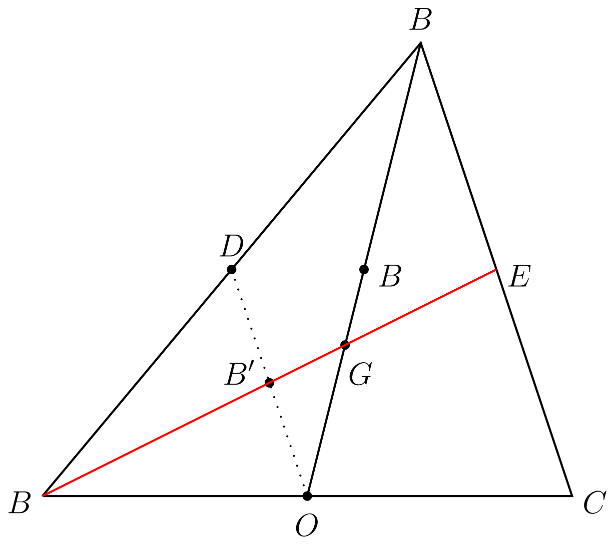
On donne le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ et les points $A(-1, 0)$ et $B(3, 0)$ dans un repère orthonormé $(O~;~\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}$.

1. Tracer $\mathcal{C}$ et placer A et B
2. N est le point tel que $MANB$ soit un parallélogramme.
   (a) Démontrer que la droite (MN) passe un point fixe I dont on donnera les coordonnées.
   (b) Construire le lieu de N lorsque M décrit $\mathcal{C}$ et trouver une équation de ce lieu.
3. Le point P est tel que $MABP$ soit un parallélogramme. Quel est le lieu de P lorsque M décrit $\mathcal{C}$? Donner une équation de ce lieu.

Correction - Groupe 1

▶ **EXERCICE 1**

1. (a) Voir figure.
   (b) Suivant le procédé de construction, on doit construire le milieu N de $[AA]$, donc $N = A$ puis A' est le milieu de $[ON]$. Donc A' est le milieu du segment $[OA]$, voir figure.
2. (a) Il est évident que $G' = G$.
   (b) Soit D le milieu de $[AB]$. B' est donc le milieu de $[OD]$.
   Par l'homothétie h de centre B et de rapport 2, $h(D) = A$ et $h(O) = C$, donc $h([DO]) = [AC]$ et comme l'homothétie conserve le milieu (puisqu'elle conserve les barycentres), le milieu B' de $[DO]$ à pour image le milieu de $[AC]$ que l'on note E. Ainsi B, B', E sont alignés et (BE) est la médiane issue de B dans le triangle ABC, donc $G \in (BE)$. De fait B, B', G sont alignés.

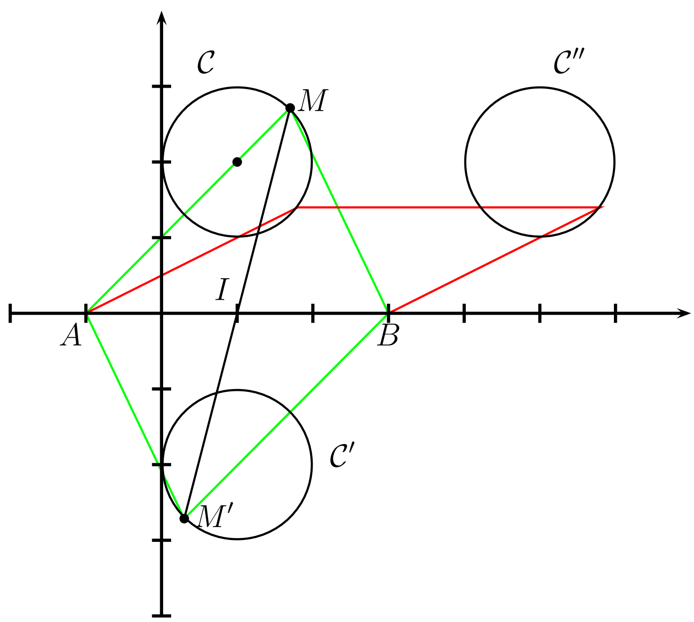


3. (a) Par construction $M' = \mathrm{Bar}\{(O,1)(N,1)\}$, donc pour tout point X du plan on a $2\overrightarrow{XM'} = \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{XN}$ et en particulier pour $X = G$, $2\overrightarrow{GM'} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GN}$ **[1]**.
De même $N = \mathrm{Bar}\{(A,1)(M,1)\}$, donc pour tout point X du plan $2\overrightarrow{XN} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XM}$ et $2\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GM}$ **[2]** pour $X = G$.

D'après [1], $4\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{GO} + 2\overrightarrow{GN}$ et en remplaçant d'après [2], $4\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GM}$. Or $2\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{0}$ car G est le centre de gravité du triangle ABC. Ainsi $\overrightarrow{GM'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GM}$ et f est l'homothétie de centre G et de rapport $\frac{1}{4}$.

▶ **EXERCICE 2**

1. (a) L'équation du cercle $\mathcal{C}$ s'écrit aussi $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$. Donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right.$ et de rayon 1.



2. (a) Si $ANBM$ est un parallélogramme, alors les segments $[AB]$ et $[MN]$ se coupent en leur milieu. Or le milieu de $[AB]$ est fixe, c'est le point $I(1;0)$, donc la droite variable (MN) passe par I.

(b) De plus N est l'image de M par h, en appelant h l'homothétie de centre I et de rapport -1. Donc $\mathcal{C}' = h(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $\Omega' = h(\Omega)$, avec $\overrightarrow{I\Omega'} = -\overrightarrow{I\Omega}$ d'où $\Omega \left| \begin{array}{l} 1 \\ -2 \end{array} \right.$ et de rayon $1 \times |-1| = 1$. L'équation de $\mathcal{C}'$ est donc

$$\mathcal{C}' : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1.$$

3. Le point P est le translaté de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, donc $\mathcal{C}'' = t(\mathcal{C})$. Par une translation, les longueurs sont conservés (donc le rayon de $\mathcal{C}''$ est 1) et l'image Ω'' du centre de $\mathcal{C}$ est telle que $\overrightarrow{O\Omega''} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{u}$ donc $\Omega'' \left| \begin{array}{l} 5 \\ 2 \end{array} \right.$ et

$$\mathcal{C}'' : (x-5)^2 + (y-2)^2 = 1$$

Énoncé - Groupe 2

▶ **EXERCICE 1**

On donne les points $A(6,0)$, $B(0,6)$ et $C(-2,0)$.

1. (a) Placer A, B, C dans un repère orthonormé et contruire le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC.
   (b) Trouver une équation du cercle $\mathcal{C}$.
2. On note M le point de $\mathcal{C}$, distinct de B, de même ordonnée que B.
   Le point M se projette orthogonalement en I sur (AC), en J sur (AB), en K sur (CB).
   (a) Calculer l'abscisse du point M.
   (b) Trouver une équation des droites (AB), (BC), (MJ) et (MK).
   (c) En déduire les coordonnées de I, J et K.
3. Démontrer que I, J et K sont trois points alignés.

▶ **EXERCICE 2**

ABC est un triangle quelconque, G son centre de gravité, I, J et K sont les milieux respectfs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

1. (a) En utilisant le théorème de la médiane vérifier que

$$BJ^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}\right) \text{ et } CK^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}\right)$$

   (b) En déduire BG^2 et CG^2 en fonction de a, b et c.
2. Démontrer que $\big($Les médianes (BJ) et (CK) sont perpendiculaires$\big) \Leftrightarrow 5a^2 = b^2 + c^2$.

Correction - Groupe 2

▶ **EXERCICE 1**

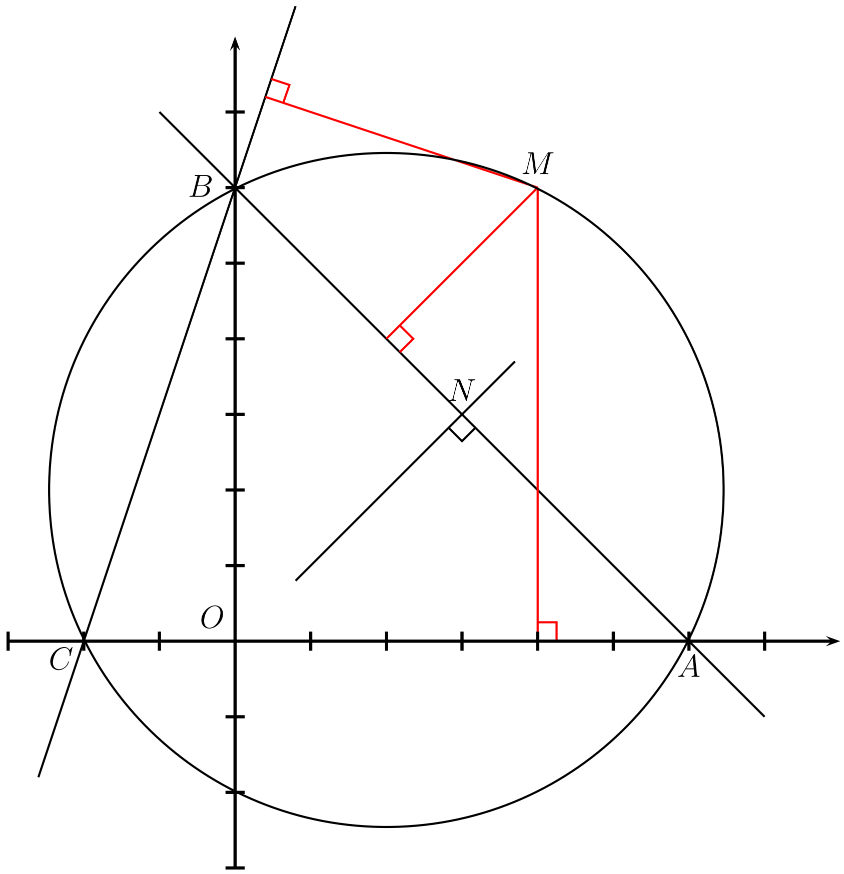
1. (a) Voir figure.

(b) Le centre du cercle circonscrit est le point de concours des médiatrices.
Il est clair que la droite d'équation $x = 2$ est la médiatrice du segment $[BC]$.
La médiatrice $\mathcal{M}$ du segment $[AB]$ est normal au vecteur $\overrightarrow{BA}(6, -6)$, ainsi qu'à $\overrightarrow{u}(1, -1)$ qui est colinéaire à $\overrightarrow{BA}$. L'équation de $\mathcal{M}$ est de la forme $x - y + c = 0$, avec c à déterminer. Mais le milieu N de $[AB]$ appartient à $\mathcal{M}$, donc ses coordonnées, $N(3, 3)$, vérifient l'équation de $\mathcal{M}$, c'est-à-dire $3 - 3 + c = 0$, d'où l'on tire $c = 0$. Finalement $\mathcal{M} : y = x$.
On résout le système formé par les équations des deux médiatrices :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 2 \end{array}\right.$$

Donc les coordonnées du centre du cercle sont $(2, 2)$, donc l'équation de $\mathcal{C}$ est de la forme $(x-2)^2 + (y-2)^2 = r^2$. Or $A \in \mathcal{C}$, donc $(0-2)^2 + (6-2)^2 = r^2$. En conclusion

$$\mathcal{C} : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 20$$



2. (a) M a pour ordonnée 6.

$$M \left| \begin{array}{l} x \\ 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow (x-2)^2 + (6-2)^2 = 20 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0$$

D'où $x = 0$, qui correspond au point B et $x = 4$, valeur qui nous intéresse. Donc $M(4, 6)$.

(b) (AB) est dirigée par $\overrightarrow{BA}(6, -6)$ et par $\overrightarrow{u}(1, -1)$ qui est colinéaire à $\overrightarrow{BA}$, donc (AB) admet un équation de la forme $x + y + c = 0$, comme $A \in (AB)$, $6 + c = 0$, d'où $c = -6$

et $\boxed{(AB) : x + y - 6 = 0}$.

De même (BC) étant dirigée par $\overrightarrow{BC}(-2,-6)$ colinéaire à $\overrightarrow{u}(1,3)$, l'équation de (BC) est de la forme $3x - y + c = 0$ et en utilisant le fait que $B \in (BC)$, on trouve $\boxed{(BC) : 3x - y + 6 = 0}$.

(MJ) est parallèle à $\mathcal{M}$, donc la seule chose qui change est la constante. D'après 1.b, (MJ) l'équation est de la forme $x - y + c = 0$, comme $M \in (MJ)$, $4 - 6 + c = 0$, d'où $c = 2$ et $\boxed{(MJ) : x - y + 2 = 0}$.

La droite (MK) est normal à $\overrightarrow{CB}(2,6)$ ou encore à $(1,3)$, donc (MK) admet un équation de la forme $x + 3y + c = 0$. Mais $M \in (MK)$, donc $4 + 3 \times 6 + c = 0$ d'où $c = -22$, donc $\boxed{(MK) : x + 3y - 22 = 0}$.

(c) I à des coordonnées évidentes : $I(4,0)$.

Comme $J = (AB) \cap (MJ)$, les coordonnées (x,y) de J vérifient le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y - 6 & = & 0 \\ x - y + 2 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -x + 6 \\ y & = & x + 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow J(2,4)$$

De la même façon, puisque $K = (BC) \cap (MK)$, les coordonnées (x,y) de K vérifient

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x - y + 6 & = & 0 \\ x + 3y - 22 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 3x + 6 \\ x + 3(3x + 6) - 22 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 3x + 6 \\ 10x - 4 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 3 \times \dfrac{2}{5} + 6 \\ x & = & \dfrac{2}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow J\left(\frac{2}{5}, \frac{36}{5}\right)$$

3.

$$\text{dét}(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) = \begin{vmatrix} 2-4 & \dfrac{2}{5} - 4 \\ 4-0 & \dfrac{36}{5} - 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -\dfrac{18}{5} \\ 4 & \dfrac{36}{5} \end{vmatrix} = -2 \times \frac{36}{5} + 4 \times \frac{18}{5} = 0$$

ce qui prouve que les vecteur $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires, donc que les droites (IJ) et (IK) sont parallèles; ayant un point commun, I, elles sont confondues, ce qui montre bien que les points I, J et K sont alignés.

▶ **EXERCICE 2**

1. (a) Grâce au théorème de la médiane, on a $a^2 + c^2 = \dfrac{b^2}{2} + 2BJ^2$ et $a^2 + b^2 = \dfrac{c^2}{2} + 2CK^2$, ce qui, moyennant quelques transformations, permet d'écrire :

$$BJ^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}\right) \text{ et } CK^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}\right)$$

(b) G étant le centre de gravité du triangle, $\overrightarrow{CG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CK}$, d'où, en élevant au carré, $CG^2 = \dfrac{4}{9}CK^2$, donc

$$CG^2 = \frac{4}{9} \times \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}\right) = \frac{2}{9}\left(a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}\right)$$

De même de $\overrightarrow{BG} = \dfrac{2}{3}\,\overrightarrow{BJ}$, on déduit que $BG^2 = \dfrac{4}{9}\,BJ^2$, d'où

$$BG^2 = \frac{4}{9} \times \frac{1}{2}\left(a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}\right) = \frac{2}{9}\left(a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}\right)$$

2. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{array}{rcrcl}
(BJ) \perp (CK) & \Leftrightarrow & BG^2 + CG^2 & = & BC^2 \\
& \Leftrightarrow & \dfrac{2}{9}\left(a^2 + c^2 - \dfrac{b^2}{2}\right) + \dfrac{2}{9}\left(a^2 + b^2 - \dfrac{c^2}{2}\right) & = & a^2 \\
& \Leftrightarrow & 2\left(a^2 + c^2 - \dfrac{b^2}{2}\right) + 2\left(a^2 + b^2 - \dfrac{c^2}{2}\right) & = & 9a^2 \\
& \Leftrightarrow & 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2 & = & 9a^2 \\
& \Leftrightarrow & b^2 + c^2 & = & 5a^2
\end{array}$$

DEVOIR N°18 DU 10/04/03

Énoncé - Groupe 1

▶ EXERCICE 1

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$.

1. (a) Calculer les coordonnées du centre I et le rayon du cercle $\mathcal{C}$.
   (b) Construire le cercle $\mathcal{C}$.
2. Le cercle $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en A et B et l'axe des ordonnées en C et D (L'ordonnée de D est négative).
   (a) Calculer les coordonnées des points A, B, C et D.
   (b) Démontrer que l'image de D par la réflexion d'axe (AB) est l'orthocentre du triangle ABC.

▶ EXERCICE 2

A et B sont deux points donnés et O est le milieu de $[AB]$. On pose $AB = d$. Le but de l'exercice est de trouver l'ensemble $\mathcal{L}_k$ des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$ où k est un réel donné.

1. Démontrer que $\mathcal{L}_k$ est l'ensemble des points M tels que $OM^2 = \dfrac{2k - d^2}{4}$.
2. Discuter, selon le signe de $2k - d^2$, la nature de l'ensemble $\mathcal{L}_k$.
3. Dessiner cet ensemble lorsque $d = 6$ et $k = 24$.

Correction - Groupe 1

▶ EXERCICE 1

1. (a)

$$\begin{array}{rrcl}
\mathcal{C} : & x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 & = & 0 \\
\mathcal{C} : & (x-1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 - 8 & = & 0 \\
\mathcal{C} : & (x-1)^2 + (y-1)^2 & = & 10
\end{array}$$

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre $I \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right.$ et de rayon $\sqrt{10}$.

   (b) Voir figure.

2. (a) Les ordonnées de A et B sont nulles donc en faisant $y = 0$ dans l'équation du cercle $\mathcal{C}$, on déduit que les abscisses x des points A et B doivent vérifier :

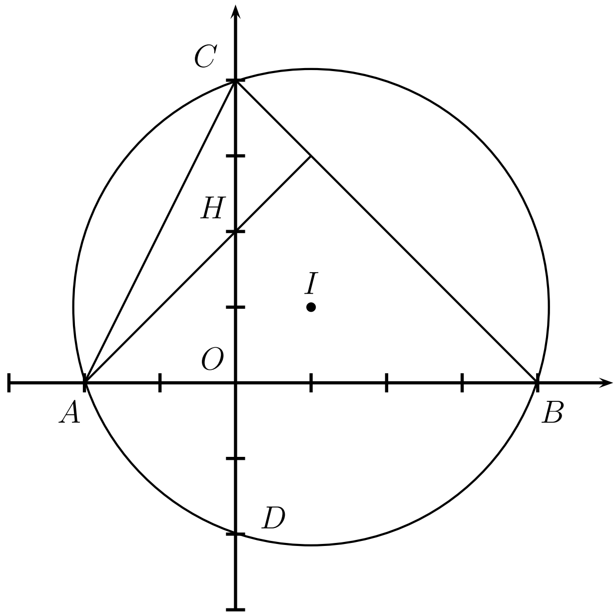
$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+2) = 0$$

d'où les points $A \left| \begin{array}{l} -2 \\ 0 \end{array} \right.$ et $B \left| \begin{array}{l} 4 \\ 0 \end{array} \right.$.

De même en faisant $x = 0$ dans l'équation du cercle, les ordonnées de C et D vérifient

$$y^2 - 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow (y-4)(y+2) = 0$$

d'où $C \left| \begin{array}{l} 0 \\ 4 \end{array} \right.$ et $D \left| \begin{array}{l} 0 \\ -2 \end{array} \right.$.



(b) Soit H l'orthocentre du triangle ABC.
L'abscisse de H est nulle car l'axe des ordonnées est une hauteur du triangle.

Cherchons une équation de la hauteur h_A issue de A dans le triangle ABC. Le vecteur $\overrightarrow{BC}\left|\begin{array}{l}-4\\4\end{array}\right.$ est normal à h_A donc $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{l}1\\-1\end{array}\right.$ est également normal à h_A car colinéaire à $\overrightarrow{BC}$. L'équation de h_A est de la forme $x - y + c = 0$, avec c à déterminer.
Mais $A \in h_A$, donc les coordonnées de A vérifient l'équation de h_A, c'est-à-dire $-2 + c = 0 \Leftrightarrow c = 2$. Finalement $h_A : y = x + 2$. En faisant $x = 0$ dans l'équation de h_A on obtient l'ordonnée de H, à savoir 2.
Les coordonnées de H sont $H\left|\begin{array}{l}0\\2\end{array}\right.$.

Des coordonnées de H on déduit que $\overrightarrow{OH} = -\overrightarrow{OD}$. De plus $(DH)\perp(AB)$ donc la réflexion d'axe (AB) échange bien H et D.

▶ EXERCICE 2

1.
$$\begin{array}{rcrcl}
M \in \mathcal{L}_k & \Leftrightarrow & MA^2 + MB^2 & = & k \\
 & \Leftrightarrow & \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 & = & k \\
 & \Leftrightarrow & (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 & = & k \\
 & \Leftrightarrow & \overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2 & = & k \\
 & \Leftrightarrow & 2MO^2 + OA^2 + OB^2 + 2\overrightarrow{MO}\cdot(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) & = & k
\end{array}$$

Or O est le milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{0}$ et $OA = OB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{d}{2}$, par suite

$$\begin{array}{rcrcl}
M \in \mathcal{L}_k & \Leftrightarrow & 2MO^2 + \dfrac{d^2}{2} & = & k \\
 & \Leftrightarrow & MO^2 & = & \dfrac{2k - d^2}{4}
\end{array}$$

2. D'où la discussion :

– Si $2k - d^2 < 0$ ou $k < \dfrac{d^2}{2}$, alors $M \in \mathcal{L}_k \Leftrightarrow MO^2 < 0$, ce qui est impossible donc $\mathcal{L}_k$ est l'ensemble vide.
– Si $2k - d^2 = 0$ ou $k = \dfrac{d^2}{2}$, alors $M \in \mathcal{L}_k \Leftrightarrow MO^2 = 0 \Leftrightarrow M = O$, donc $\mathcal{L}_k = \{O\}$.
– Si $2k - d^2 > 0$ ou $k > \dfrac{d^2}{2}$, alors $M \in \mathcal{L}_k \Leftrightarrow MO^2 = 0 \Leftrightarrow MO = \dfrac{\sqrt{2k - d^2}}{2}$. L'ensemble $\mathcal{L}_k$ est alors le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{\sqrt{2k - d^2}}{2}$.

3. Pour $d = 6$ et $k = 24$, on a $2k - d^2 = 12 > 0$, donc l'ensemble est un cercle de centre O et de rayon $\dfrac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$ d'après la question précédente.

   La représentation graphique ne présente aucune difficulté (et aucun intérêt d'ailleurs).

Énoncé - Groupe 2

▶ EXERCICE 1

Voir Contrôle n°17, exercice 1, groupe 1. Page 43.

▶ EXERCICE 2

$ABCD$ est un tétraèdre de centre de gravité G, donc G est l'isobarycentre de A, B, C, D. On note $A'B', C', D'$ les centres de gravité respectifs des faces BCD, ACD, ABD et ABC.

1. (a) Prouver que G est le barycentre de $(A, 1)$ et $(A', 3)$.
   (b) En déduire que $\overrightarrow{GA'} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{GA}$.
2. En déduire que le tétraèdre $A'B'C'D'$ est l'image du tétraèdre $ABCD$ par une homothétie que l'on précisera.

Correction - Groupe 2

▶ EXERCICE 1

Voir page 43.

▶ EXERCICE 2

1. (a) A' est le centre de gravité de BCD, donc $A' = \text{Bar}\{(B, 1)(C, 1)(D, 1)\}$. Le théorème de d'associativité permet de remplacer dans

$$G = \text{Bar}\{(A, 1)(B, 1)(C, 1)(D, 1)\}$$

   les points pondérés $(B, 1)(C, 1)(D, 1)$ par $(A', 3)$ donc $G = \text{Bar}\{(A, 1)(A', 3)\}$.
   (b) Comme $G = \text{Bar}\{(A, 1)(A', 3)\}$, on a par définition du barycentre $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{0}$, d'où $\overrightarrow{GA'} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{GA}$.
2. En procédent comme au 1, on obtient $\overrightarrow{GB'} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC'} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{GD'} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{GD}$.

   En appelant h l'homothétie de centre G et de rapport $-\dfrac{1}{3}$, on voit donc que A', B', C', D' sont les images respectives de A, B, C, D par h, ainsi le tétraèdre $A'B'C'D'$ est l'image du tétraèdre $ABCD$ par h.