Quelques contrôle de Première S

Gilles Auriol

auriolg@free.fr — http ://auriolg.free.fr

Voici l'énoncé de 7 devoirs de Première S, intégralement corrigés. Malgré tout les devoirs 1 et 5 nécessitent l'usage du théorème des valeurs intermédiaires, ils conviendront certainement mieux à la classe de Terminale S.

Contrôle d'été - Épisode 1

1. Soit $g : x \mapsto 4x^3 + x^2 - 4x - 5$ et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
   (a) Limites aux bornes de l'ensemble de définition, dérivée, tableau de variation avec valeurs des extrémums locaux.
   (b) Déduire du tableau de variation qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner un encradrement d'amplitude $0,1$ de α.
   (c) A l'aide des deux questions précédentes, construire le tableau de signe de $g(x)$.
   (d) Démontrer que $I\left(-\dfrac{1}{12}, -\dfrac{1007}{216}\right)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$.
   (e) Donner une équation de la tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse -1.
   (f) Quelle est l'abscisse du point en lequel $\mathcal{T}$ recoupe $\mathcal{C}_g$? Noter que l'on connaît déjà une racine du polynôme qui va être formé.
2. Considérons maintenant $f : x \mapsto \dfrac{4x-2}{(x+2)(x^2+1)}$.
   (a) Calculer la dérivée.
   (b) Étudier son signe grâce à la question 1.c, en déduire le tableau de variation.
   (c) Donner les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Correction du contrôle d'été - Épisode 1

1. (a) **(2 pts)** $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.
$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 12x^2 + 2x - 4$. Le discriminant vaut 14^2, donc les racines sont $\dfrac{-2 \pm 14}{24}$, c'est-à-dire $-\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$. D'où le tableau (le signe d'un polynôme du second degré étant celui du coefficient de x^2, sauf entre les racines s'il y en a) :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{83}{27}$	$\searrow$	$-\frac{25}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

(b) **(3 pts)** $\forall x \in \left[-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$, $g(x) \leqslant -\dfrac{83}{27} < 0$, donc α n'est pas dans cet intervalle !
Il s'agit de rien oublier pour justifier l'existence de cet α sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$: d'une part la fonction est strictement croissante sur cet intervalle et d'autre part elle y est continue (fonction polynôme), donc g réalise une bijection de $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ sur $J = \left]f\left(\dfrac{1}{2}\right), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \right[= \left]-\dfrac{25}{4}, +\infty\right[$. MAIS $0 \in J$, donc il existe un unique (bijection $\Longrightarrow$ **il existe** et **unique**) réel α de $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
Avec une calculette, on obtient facilement $1,2 < \alpha < 1,3$.
Si on rajoute α dans le tableau ci-dessus :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{83}{27}$	$\searrow$	$-\frac{25}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(c) **(2 pts)** L'examen de ce second tableau montre que pour $x < \alpha$, on a $g(x) < 0$, que pour $x > \alpha$, on a $g(x) > 0$ et que $g(\alpha) = 0$. On résume dans un tableau :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(d) **(3 pts)** D'après le cours on sait que : $I\left(-\dfrac{1}{12}, -\dfrac{1007}{216}\right)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{D}_g \begin{cases} -\dfrac{1}{6} - x \in \mathcal{D}_g & \textbf{[1]} \\ g\left(-\dfrac{1}{6} - x\right) = -\dfrac{1007}{108} - g(x) & \textbf{[2]} \end{cases}$$

L'assertion [1] est évidente puisque $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Prouver [2] revient à faire de longs calculs désagréables que voici :

D'une part (sachant que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, à retenir !)

$$
\begin{aligned}
g\left(-\frac{1}{6}-x\right) &= 4\left(-\frac{1}{6}-x\right)^3 + \left(-\frac{1}{6}-x\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{6}-x\right) - 5 \\
&= -4\left(\frac{1}{6}+x\right)^3 + \left(\frac{1}{6}+x\right)^2 + 4\left(\frac{1}{6}+x\right) - 5 \\
&= -4\left(\frac{1}{216} + \frac{3}{36}x + \frac{3}{6}x^2 + x^3\right) + \frac{1}{36} + \frac{2}{6}x + x^2 + \frac{4}{6} + 4x - 5 \\
&= -\frac{2}{108} - \frac{1}{3}x - 2x^2 - 4x^3 + \frac{3}{108} + \frac{1}{3}x + x^2 + \frac{4\times 18}{6\times 18} + 4x - \frac{540}{108} \\
&= -4x^3 - x^2 + 4x + \frac{-2+3+72-540}{108} \\
&= -4x^3 - x^2 + 4x - \frac{467}{108}
\end{aligned}
$$

d'autre part

$$
\begin{aligned}
-\frac{1007}{108} - g(x) &= -\frac{1007}{108} - 4x^3 - x^2 + 4x + \frac{540}{108} \\
&= -4x^3 - x^2 + 4x - \frac{467}{108}
\end{aligned}
$$

donc I est bien un centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$.

Remarque. I est même un point d'inflexion, *i.e.* la tangente n'est pas du même côté de la courbe avant et après ce point (localement). On démontre qu'une condition nécessaire (mais non suffisante) pour qu'un point d'abscisse x_0 soit un point d'inflexion de la courbe réprésentative d'une fonction f, est que $f''(x_0) = 0$. Si l'on pose $f(x) = ax^3 + b^2 + cx + d$, la dérivée seconde vaut $f''(x) = 6ax + 2b$, d'où $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{3a}$. Donc si un point d'inflexion existe sur une cubique d'équation $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ce ne peut-être que le point d'abscisse $-\dfrac{b}{3a}$. On montre que $\forall x \in \mathbb{R}, 2f\left(-\dfrac{b}{3a}\right) - f(x) = f\left(-\dfrac{2b}{3a} - x\right)$, chacun des membres valant $-ax^3 - bx^2 - cx - \dfrac{2bc}{3a} + \dfrac{4b^3}{27a^2} + d$, ce qui prouve que le point $I\left(-\dfrac{b}{3a}, f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$ est centre de symétrie. On vérifie ici que $-\dfrac{b}{3a} = -\dfrac{1}{12}$.

(e) **(1 pt)** Classique et peu payé ! $y = g'(-1)(x+1) + g(1)$, donc $\mathcal{T} : y = 6x + 2$.

(f) **(2 pts)** L'équation aux abscisses donne : $P(x) = 4x^3 + x^2 - 10x - 7 = 0$. Bien sûr -1 est racine car $\mathcal{T}$ est la tangente au point d'abscisse... -1 ! On peut donc mettre $x+1$ en facteur, d'où (En utilisant la méthode d'identification, de division de polynômes ou encore l'algorithme d'Horner) $P(x) = (x+1)(4x^2 - 3x - 7)$, mais -1 est encore racine du polynôme du second degré qui apparaît donc $P(x) = (x+1)(x+1)(4x-7) = (x+1)^2(4x-7)$. La droite $\mathcal{T}$ recoupe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $\dfrac{7}{4}$ (celui d'abscisse -1 ayant déjà été traité).

2. (a) **(3 pts)** $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-2\}$. La dérivée est un peu indigeste :

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{4(x+2)(x^2+1) - (4x-2)[x^2+1+2x(x+2)]}{[(x+2)(x^2+1)]^2} \\
&= \frac{4x^3 + 4x + 8x^2 + 8 - (4x-2)(3x^2+4x+1)}{[(x+2)(x^2+1)]^2} \\
&= \frac{4x^3 + 4x + 8x^2 + 8 - 12x^3 - 16x^2 - 4x + 6x^2 + 8x + 2}{[(x+2)(x^2+1)]^2} \\
&= \frac{-8x^3 - 2x^2 + 8x + 10}{[(x+2)(x^2+1)]^2}
\end{aligned}
$$

(b) **(3 pts)** ... et en factorisant par -2 au numérateur :

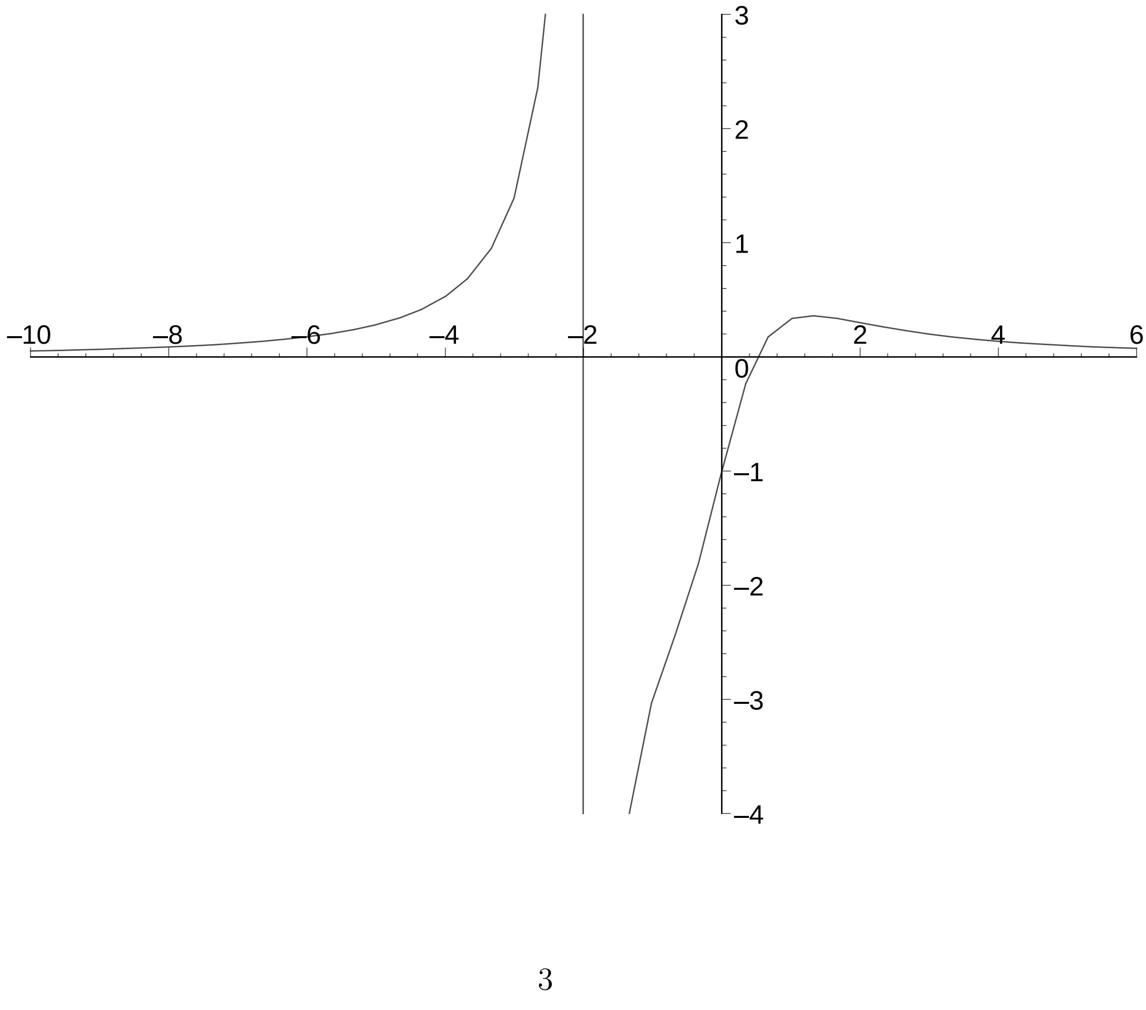
$$f'(x) = \frac{-2(4x^3 + x^2 - 4x - 5)}{[(x+2)(x^2+1)]^2} = \frac{-2g(x)}{[(x+2)(x^2+1)]^2}$$

donc le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $-2g(x)$, car le dénominateur est un carré (donc positif), d'où le tableau (je rappelle que $1,2 < \alpha < 1,3$) :

x	$-\infty$		-2		α		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

(c) **(1 pt)** Les limites (déjà dans le tableau) : Le terme terme dominant du dénominateur est x^3, donc : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x}{x^3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4}{x^2} = 0$. En en -2, c'est plus délicat à cause des notations ! $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{-10}{5(x+2)} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{-2}{x+2} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{-2}{h} = +\infty$, en ayant fait un changement de variable $h = x + 2$. On démontre de la même façon (= c'est ennuyeux à taper) que $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = -\infty$.

Pour remplir la feuille voici la représentation graphique de f.



Contrôle d'été - Épisode 2

1. Simplifier $\cos(19\pi - x) + \sin(17\pi + x) - \sin\left(\frac{19\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{17\pi}{2} - x\right)$.
2. Exprimer en fonction de $\cos 2x$ les expressions suivantes :
   (a) $\cos^2 x + 2\sin^2 x$
   (b) $3\cos^2 x - 2\sin^2 x$
   (c) $\dfrac{\sin 5x}{\sin x} - \dfrac{\cos 5x}{\cos x}$
3. Exprimer en fonction d'une tangente l'expression $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$.
4. Soit $f(\theta) = a\cos\theta + b\sin\theta$, avec a, b et θ des réels.
   (a) Montrer qu'on peut trouver un réel $\varphi \in]-\pi, \pi]$ tel que
   $$\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta)$$
   En déduire que $f(\theta) = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(\theta - \varphi)$.
   (b) **Application.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$.
5. On rappelle que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes de THEBYTCHEFF définie comme suit :
   $$\begin{cases} T_0(X) = 1 \text{ et } T_1(X) = X \\ \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X) \end{cases}$$
   possède la propriété suivante : $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, pour $\theta \in \mathbb{R}$.
   (a) Calculer $T_5(X)$. En déduire que $\forall a \in \mathbb{R}, \cos 5a = 16\cos^5 a - 20\cos^3 a + 5\cos a$.
   (b) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, 16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 = (x+1)(4x^2 - 2x - 1)^2$.
   (c) On pose $t = \cos\frac{\pi}{5}$. Démontrer que t est racine de $4x^2 - 2x - 1$ et que $t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$, par des arguments de signe.
   (d) En déduire $\sin\frac{\pi}{5}$; $\cos\frac{2\pi}{5}$; $\sin\frac{2\pi}{5}$; $\cos\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{\pi}{10}$.
   (e) Montrer, en observant que $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$, les égalités
   $$\cos\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{10} \quad \text{et} \sin\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{\pi}{10}.$$

Correction du contrôle d'été - Épisode 2

1. **(1,5 pt)**

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, f(x) &= \cos(19\pi - x) + \sin(17\pi + x) - \sin\left(\frac{19\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{17\pi}{2} - x\right)\\
&= \cos(\pi - x) + \sin(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{19\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{17\pi}{2} + x\right)\\
&= -\cos x - \sin x - \cos(-9\pi + x) + \sin(-8\pi + x)\\
&= -\cos x - \sin x - \cos(\pi + x) + \sin x\\
&= -\cos x - \sin x + \cos x + \sin x\\
&= 0
\end{aligned}$$

2. (a) **(1 pt)** $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + 2\sin^2 x = (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x = 1 + \sin^2 x$. Mais $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, d'où $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$. En remplaçant, $\cos^2 x + 2\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} + 1 = \dfrac{3 - \cos 2x}{2}$.

   (b) **(1 pt)** Des formules de duplication on déduit $\boxed{\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}}$ et $\boxed{\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}}$, que l'on retiendra. En remplaçant, $3\cos^2 x - 2\sin^2 x = \dfrac{5\cos 2x + 1}{2}$.

   (c) **(2 pts)** En réduisant au même dénominateur, on arrive à $f(x) = \dfrac{\sin 5x \cos x - \cos 5x \sin x}{\sin x \cos x}$ et l'on reconnaît le développement de $\sin(a - b)$ donc

$$f(x) = \frac{\sin(5x - x)}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\,\frac{\sin 4x}{\sin 2x} = 2\,\frac{2\cos 2x \sin 2x}{\sin 2x} = 4\cos 2x$$

3. **(2 pts)** $\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \dfrac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$, car d'après les formules encadrées ci-dessous, $1 - \cos x = 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$ et $1 - \sin x = 2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

4. (a) **(2,5 pts)** $f(\theta) = a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos\theta + \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin\theta\right)$. On remarque que

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

   donc on sait qu'il existe un unique $\varphi \in]-\pi, \pi]$ tel que $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. On en déduit une nouvelle écriture de $f(\theta)$:

$$f(\theta) = \sqrt{a^2 + b^2}\,(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta) = \sqrt{a^2 + b^2}\,\cos(\varphi - \theta) = \sqrt{a^2 + b^2}\,\cos(\theta - \varphi)$$

   (b) **(1,5 pt)** On factorise le premier membre de cette équation avec cette méthode. Ici notre $\sqrt{a^2 + b^2}$, c'est $\sqrt{3 + 1} = 2$, donc $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x\right)$. Il nous faut déterminer le réel φ de $]-\pi, \pi]$ tel que $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\varphi = \dfrac{1}{2}$, c'est $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

D'où l'écriture $2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x\right) = 2\,(\cos\varphi\cos x - \sin\varphi\sin x) = 2\,\cos(\varphi + x) = 2\,\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)$. Finalement l'équation équivaut à $2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right) = \cos\dfrac{\pi}{3}$ et d'après le cours

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = \cos\frac{\pi}{3} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{6} + x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{6} + x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\end{aligned}$$

5. (a) **(3 pts)** On calcule successivemeent :
   - $T_2(X) = 2X^2 - 1$
   - $T_3(X) = 2X(2X^2-1) - X = 4X^3 - 3X$
   - $T_4(X) = 2X(4X^3-3X) - (2X^2-1) = 8X^4 - 8X^2 + 1$
   - $T_5(X) = 2X(8X^4 - 8X^2 + 1) - (4X^3 - 3X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X$

   Il est immédiat que $\cos 5a = 16\cos^5 a - 20\cos^3 a + 5\cos a \quad$ **[1]**, car $T_5(\cos a) = \cos 5a$.

   (b) **(1 pt)** C'est du calcul niveau troisième...

   (c) **(2 pts)** En faisant $a = \dfrac{\pi}{5}$ dans [1], on obtient, en posant $t = \cos\dfrac{\pi}{5}$,

$$\begin{aligned}\cos\left(5\times\frac{\pi}{5}\right) = 16t^5 - 20t^3 + 5t \quad &\Leftrightarrow \quad -1 = 16t^5 - 20t^3 + 5t \\ &\Leftrightarrow \quad 16t^5 - 20t^3 + 5t + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (t+1)(4t^2 - 2t - 1)^2 = 0\end{aligned}$$

   mais il est clair que -1 n'est pas solution attendue (en effet $\cos\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = \pi + 2k\pi$), donc t est l'une des deux racines de $4t^2 - 2t - 1$, qui sont $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$. Comme $0 < \dfrac{\pi}{5} < \dfrac{\pi}{2}$, on a $t > 0$, donc $t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$, car l'autre racine est négative. Finalement $\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

   (d) **(5 × 0,5 pt)**
   - $\sin\dfrac{\pi}{5} > 0$, donc $\sin\dfrac{\pi}{5} = \sqrt{1-\cos^2\dfrac{\pi}{5}} = \sqrt{1 - \dfrac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{5}}{16}} = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.
   - $\cos\dfrac{2\pi}{5} = 2\cos^2\dfrac{\pi}{5} - 1 = 2\,\dfrac{6+2\sqrt{5}}{16} - 1 = \dfrac{-4+4\sqrt{5}}{16} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.
   - $\sin\dfrac{2\pi}{5} = \sqrt{1-\cos^2\dfrac{2\pi}{5}} = \sqrt{1-\dfrac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\dfrac{10+2\sqrt{5}}{16}} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.
   - $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, d'où, si $\cos x > 0$, $\cos x = \sqrt{\dfrac{\cos 2x + 1}{2}}$, ou encore $\cos\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{\cos x + 1}{2}}$. Ici on a $\cos\dfrac{\pi}{10} > 0$, donc $\cos\dfrac{\pi}{10} = \sqrt{\dfrac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}+1}{2}} = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.
   - $\sin\dfrac{\pi}{10} = \sqrt{1-\cos^2\dfrac{\pi}{10}} = \sqrt{1-\dfrac{10+2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\dfrac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \dfrac{\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, car $\sqrt{a^2} = |a|$ et ici $1-\sqrt{5} < 0$, d'où $|1-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-1$.

(e) **(+2 pts)** $\forall x \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et puisque $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$, on comprend pour quelle raison $\cos\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{10}$. De même $\sin\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{\pi}{10}$ en utilisant $\forall x \in \mathbb{R}, \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$. En plus on simplifie de façon substantielle les calculs !

Contrôle d'été - Épisode 3

1. Soit ABC un triangle. On définit les points, I, J et K par

$$\overrightarrow{BI} = \frac{4}{7}\,\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{AK} = \frac{3}{5}\,\overrightarrow{AB}$$

   (a) Écrire I, J et K comme des barycentres des points A, B et C.

   (b) En considérant le point $G = \text{Bar}\{(A,2)(B,3)(C,4)\}$ et en utilisant la propriété d'associativité, montrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

2. Soit ABC un triangle. Démontrer que les droites (AJ), (BJ) et (CK) sont concourantes, sachant que I, J et K sont définis de la façon suivante :

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{BC} \quad \overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{CA} \quad \overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\,\overrightarrow{AB}$$

   (même méthode que l'exercice précédent)

3. ABC est un triangle et M un point quelconque du plan.
   On désigne par P, Q et R les symétriques de M par rapport aux milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ du triangle ABC respectivement.

   (a) Déterminer trois réels a, b et c tels que
      – P soit le barycentre de (M,c), (A,a) et (B,b) ;
      – Q soit le barycentre de (M,c), (B,a) et (C,b) ;
      – R soit le barycentre de (M,c), (A,a) et (C,b).

   (b) G désigne le centre de gravité du triangle ABC et K celui de PQR.
   Démontrer que G est le milieu de $[MK]$.

4. $ABCD$ est un parallélogramme, $G = \text{Bar}\{(A,2)(B,1)\}$ et $H = \text{Bar}\{(C,2)(D,1)\}$.

   (a) Démontrer que les segments $[AC]$, $[BD]$ et $[GH]$ ont le même milieu I.

   (b) Les droites (AC) et (GD) se coupent en E. Montrer que $E = \text{Bar}\{(G,3)(D,1)\}$ et que E est le milieu de $[AI]$.

5. Soit $ABCD$ un carré de centre O. Soit Γ l'ensemble des points M du plan tels que :

$$||\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|| = ||\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}||$$

   Démontrer que Γ est la médiatrice du segment $[AC]$.

Correction du contrôle d'été - Épisode 3

1. (a) **(1,5 pt)** On transforme les hypothèses :

$$\overrightarrow{BI} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{BI} = 4(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{BI} - 4\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$$

donc $I = \mathrm{Bar}\{(B,3)(C,4)\}$. Pour le point J :

$$\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JA} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JA} = \overrightarrow{0}$$

donc $J = \mathrm{Bar}\{(C,2)(A,1)\}$. Enfin :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{AK} = 3(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{0}$$

donc $K = \mathrm{Bar}\{(A,2)(B,3)\}$.

(b) **(1,5 pt)** Étant donné que $J = \mathrm{Bar}\{(C,2)(A,1)\}$, on a aussi $J = \mathrm{Bar}\{(C,4)(A,2)\}$. Utilisons trois fois la propriété d'associativité :
- $G = \mathrm{Bar}\{(A,2)[(B,3)(C,4)]\} = \mathrm{Bar}\{(A,2)(I,7)\}$, ce qui prouve que $G \in (AI)$.
- $G = \mathrm{Bar}\{[(A,2)(C,4)](B,3)\} = \mathrm{Bar}\{(J,6)(B,3)\}$, ce qui prouve que $G \in (BJ)$.
- $G = \mathrm{Bar}\{[(A,2)(B,3)](C,4)\} = \mathrm{Bar}\{(K,5)(C,4)\}$, ce qui prouve que $G \in (CK)$.

Le point G appartient aux droites (AI), (BJ) et (CK), donc ces trois droites sont concourantes.

2. **(3 pts)** Comme précédemment, les hypothèses deviennent :

$$I = \mathrm{Bar}\{(B,2)(C,1)\} \quad J = \mathrm{Bar}\{(A,3)(C,1)\} \quad K = \mathrm{Bar}\{(A,3)(B,2)\}$$

Soit $G = \mathrm{Bar}\{(A,3)(B,2)(C,1)\}$. En utilisant trois fois la propriété d'associativité, on montre que

$$G = \mathrm{Bar}\{(A,3)(I,3)\} = \mathrm{Bar}\{(B,2)(J,4)\} = \mathrm{Bar}\{(K,5)(C,1)\}$$

Donc G appartient aux droites (AI), (BJ) et (KC) et ces droites sont bien concourantes.

3. (a) **(2 pts)** Soit I le milieu de $[AB]$. Le point I est aussi le milieu de $[PM]$, donc $\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{PI}$, d'où $P = \mathrm{Bar}\{(M,-1)(I,2)\}$, mais $I = \mathrm{Bar}\{(A,1)(B,1)\}$, donc en utilisant le théorème d'associativité, on obtient $P = \mathrm{Bar}\{(M,-1)(A,1)(B,1)\}$.
De la même façon $Q = \mathrm{Bar}\{(M,-1)(B,1)(C,1)\}$ et $R = \mathrm{Bar}\{(M,-1)(A,1)(C,1)\}$.

(b) **(3 pts)** Soit F le milieu de $[MK]$, c'est-à-dire $F = \mathrm{Bar}\{(M,1)(K,1)\}$, ou encore $F = \mathrm{Bar}\{(M,3)(K,3)\}$, ce qui nous permet de remplacer $(K,3)$ par $(P,1)(Q,1)(R,1)$ car K est le centre de gravité du triangle PQR. Donc $F = \mathrm{Bar}\{(M,3)(P,1)(Q,1)(R,1)\}$. Remplaçons $(P,1)$, $(Q,1)$ et $(R,1)$ par les points pondérés de la question précédente ($-1+1+1 = 1$, il n'y a même pas de coefficients à ajuster !) on obtient :

$$F = \mathrm{Bar}\{(M,3)(M,-1)(A,1)(B,1)(M,-1)(B,1)(C,1)(M,-1)(A,1)(C,1)\}$$

Quel bonheur de constater qu'il n'y a plus de M, et que finalement :

$$F = \mathrm{Bar}\{(A,2)(B,2)(C,2)\}$$

Ce qui signifie que F est l'isobarycentre des points A, B et C, autrement dit c'est le centre de gravité du triangle ABC.

4. (a) **(3 pts)** $ABCD$ est un parallélogramme, donc les diagonales se coupent en leur milieu *i.e.* le point I est le milieu de $[AC]$ et $[BD]$.
Soit I' le milieu de $[GH]$, c'est-à-dire $I' = \text{Bar}\{(G,3)(H,3)\}$. En remplaçant $(G,3)$ par $(A,2)(B,1)$ et $(H,3)$ par $(C,2)(D,1)$, on obtient

$$I' = \text{Bar}\{(A,2)(B,1)(C,2)(D,1)\}$$

et en remplaçant $(A,2)(C,2)$ par $(I,4)$ et $(B,1)(D,1)$ par $(I,2)$, on arrive a

$$I' = \text{Bar}\{(I,4)(I,2)\} = \text{Bar}\{(I,6)\}$$

donc pour tout point M du plan $6\overrightarrow{MI'} = 6\overrightarrow{MI}$ et en particulier pour $M = I$, l'égalité $6\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{0}$ montre que $I = I'$ et I est bien le milieu des segments $[GH]$, $[AC]$ et $[BD]$.

(b) **(2 pts)** Soit $E' = \text{Bar}\{(G,3)(D,1)\}$. Alors $E' \in (GD)$. On remplace $(G,3)$, si bien que

$$E' = \text{Bar}\{(A,2)(B,1)(D,1)\}$$

ou encore, puisque I est le milieu de $[BD]$,

$$E' = \text{Bar}\{(A,2)(I,2)\}$$

ce qui traduit que E' est le milieu de $[AI]$ et que $E' \in (AI)$; on a déjà montré que $E' \in (GD)$ donc E' est l'intersection des droites (AI) et (GD). Finalement $E' = E$ et E est bien le milieu de $[AI]$.

5. **(4 pts)** Soit $G = \text{Bar}\{(B,1)(C,-1)(D,1)\}$ et $H = \text{Bar}\{(A,1)(B,-1)(D,-1)\}$.
On va montrer que $G = A$ et que $H = C$.
Pour G remplaçons $(B,1)(D,1)$ par $(O,2)$, le milieu de $[BD]$. On a alors $G = \text{Bar}\{(O,2)(C-1)\}$, donc pour tout point M l'égalité $\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MC}$ qui donne $\overrightarrow{OG} = -\overrightarrow{OC}$ en faisant $M = O$, d'où $G = A$.
Pour H. On remplace $(B,-1)(D-1)$ par $(I,-2)$, d'où $H = \text{Bar}\{(A,1)(I,-2)\}$. Pour tout point M, on a $-\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MI}$, et pour $M = I$, $-\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IA}$ donc $H = C$.

Réduisons les deux membres de l'équation en utilisant les définitions de G et H. On a $M \in \Gamma \Leftrightarrow ||\overrightarrow{MG}|| = ||\overrightarrow{MH}||$ d'où $M \in \Gamma \Leftrightarrow ||\overrightarrow{MA}|| = ||\overrightarrow{MC}||$, ou encore $M \in \Gamma \Leftrightarrow MA = MC$. L'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[AC]$ (on peut d'ailleurs voir que $(B,O,D) \in \Gamma^3$)

Contrôle d'été - Épisode 4

1. (a) Écrire sans utiliser le symbole Σ les sommes suivantes :

$$A=\sum_{k=2}^{7}k^2,\quad B=\sum_{k=0}^{4}\frac{k+1}{k+2},\quad C=\sum_{k=0}^{6}(2k-7)^2,\quad D=\sum_{j=1}^{4}j(j+1).$$

   (b) Exprimer en fonction de x les sommes suivantes, sans utiliser le symbole Σ :

$$A=\sum_{i=1}^{5}(2i-1)\,x^j,\quad B=\sum_{j=1}^{6}(-1)^j(7-j)\,x^j,\quad C=\sum_{j=3}^{7}(3j+2)\,(-1)^{j+1}x^{2j}$$

   (c) Écrire chacune des sommes suivantes avec Σ :
   $A=1+2+3+4+5+6+7$;
   $B=1+3+5+7+9$;
   $C=1-4+7-10+13-16$;
   $D=1+8+27+64+125$;
   $E=x-x^2+x^3-x^4+x^5$;
   $F=7x+5x^2+3x^3+x^4$.

2. On définit les deux suites u et v par $u_0=2$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{2u_n}$ et $v_n=\dfrac{u_n-1}{2u_n+1}$.

   (a) Démontrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n>0$.

   (b) Montrer que la suite v est géométrique ; calculer v_n puis u_n en fonction de n.

3. Calculer intelligemment les sommes suivantes :

   (a) $S=3+4+5+6+\cdots+98$;

   (b) $5+7+9+11+\cdots+121$;

   (c) $5+2-1-4-7-\cdots-34$;

   (d) $2+4+8+\cdots+256$;

   (e) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}-\cdots-\dfrac{1}{256}$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$1+\frac{x}{x+2}+\left(\frac{x}{x+2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x}{x+2}\right)^7=0$$

5. On raconte que l'inventeur du jeu d'échecs demanda pour récompense qu'on lui fasse don de quelques grains de blé : un grain pour la première case, deux grains pour la deuxième case, quatre grains pour la troisième et ainsi de suite en doublant à chaque case le nombre grains jusqu'à la 64^e case de l'échiquier.

   (a) Calculer le nombre de grain offerts pour la 64^e case.

   (b) Calculer le nombre total de grains de blé que représente la récompense.

   (c) Un grain de blé pèse 0,05 g. Sachant que la production annuelle de blé de nos jours et de l'ordre de 600 millions de tonnes, quel temps faudrait-il pour satisfaire la requête ?

Correction du contrôle d'été - Épisode 4

1. (a) **(1 pt)** $A = \displaystyle\sum_{k=2}^{7} k^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 139\,;$

   (1 pt) $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{71}{20}\,;$

   (1 pt) $C = \displaystyle\sum_{k=0}^{6} (2k-7)^2 = (-7)^2 + (-5)^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2 + 5^2 = 119\,;$

   (1 pt) $D = \displaystyle\sum_{j=1}^{4} j(j+1) = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 = 40.$

   (b) **(1 pt)** $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{5} (2i-1)\,x^i = x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 9x^5\,;$

   (2 pts) $B = \displaystyle\sum_{j=1}^{6} (-1)^j (7-j)\,x^j = -6x + 5x^2 - 4x^3 + 3x^4 - 2x^5 + x^6\,;$

   (2 pts) $C = \displaystyle\sum_{j=3}^{7} (3j+2)\,(-1)^{j+1} x^{2j} = 11x^6 - 14x^8 + 17x^{10} - 20x^{12} + 23x^{14}.$

   (c) **(4 × 1 + 2 × 2 pts)** $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{7} i, \quad B = \sum_{i=0}^{4} (2i+1), \quad C = \sum_{i=0}^{5} (-1)^i (3i+1)$

   $D = \displaystyle\sum_{i=1}^{5} i^3, \quad E = \sum_{i=1}^{5} (-1)^{i+1} x^i, \quad F = \sum_{i=0}^{3} (7-2i)\,x^{i+1}.$

2. (a) **(3 pts)** Initialisation : $u_0 = 1 > 0$
   Transmission : On suppose que pour un n de $\mathbb{N}$, on a $u_n > 0$. Alors $u_n + 1 > 0$ et $2u_n > 0$ donc $\dfrac{u_n+1}{2u_n} = u_{n+1} > 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

   (b) **(4 pts)** $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{2u_{n+1}+1} = \dfrac{\frac{u_n+1}{2u_n} - 1}{2 \times \frac{u_n+1}{2u_n} + 1} = \dfrac{u_n + 1 - 2u_n}{2u_n + 2 + 2u_n} = \dfrac{-u_n+1}{2(2u_n+1)} = -\dfrac{1}{2} v_n$, donc le suite v est géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{2u_0+1} = \dfrac{1}{5}$. Le terme général de la suite v est donc $v_n = \dfrac{1}{5}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{(-1)^n}{5 \times 2^n}$.
   Exprimons u_n en fonction de v_n :

   $$v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n + 1} \Leftrightarrow v_n\,(2u_n+1) = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n\,(1 - 2v_n) = 1 + v_n \Leftrightarrow u_n = \frac{1+v_n}{1-2v_n}$$

   tout ceci étant équivalent car $\forall n \in \mathbb{N}, 1 - 2v_n \neq 0$, en effet :

   $$v_n = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{5}{2}$$

   équation qui n'a pas de solution (voir cours de terminale).
   Finalement : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-2v_n} = \dfrac{1 + \frac{(-1)^n}{5 \times 2^n}}{1 - 2 \times \frac{(-1)^n}{5 \times 2^n}} = \dfrac{5 \times 2^n + (-1)^n}{5 \times 2^n - 2(-1)^n}$.

3. **(4 × 1 + 2 pts)**
   (a) En posant $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 3+n$, on s'aperçoit que $3 = v_0$ et $98 = v_{95}$, donc $S = (95-0+1) \times \dfrac{3+98}{2} = 4848$.
   (b) On pose $v_n = 5+2n$, alors $v_0 = 5$ et $v_{58} = 121$, d'où $S = (58-0+1)\dfrac{5+121}{2} = 3717$.
   (c) On pose $v_n = 5-3n$, alors $v_0 = 5$ et $v_{13} - 34$, donc $S = (13-0+1)\dfrac{5-34}{2} = -203$.
   (d) Si l'on pose $v_n = 2^n$, alors $v_1 = 2$ et $v_8 = 256$, donc $S = 2\,\dfrac{1-2^{(8-1+1)}}{1-2} = 510$.
   (e) Factorisons par -1 :

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \cdots - \frac{1}{256} = -\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{256}\right) = -S'$$

On calcule S'. Pour cela posons $v_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$, alors $v_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $v_8 = \dfrac{1}{256}$. Donc

$$S = -S' = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{(8-1+1)}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1-\frac{1}{256}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{255}{256}}{3} = \frac{85}{256}$$

4. **(5 pts)** Le premier membre est la somme des huit premiers termes de la suite géométrique de raison $\dfrac{x}{x+2}$ et de premier terme 1. Donc l'équation équivaut à :

$$\frac{1-\left(\frac{x}{x+2}\right)^8}{1-\frac{x}{x+2}} = 0 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{x}{x+2}\right)^8 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+2}\right)^8 = 1 \quad \text{et } x \neq -2$$

Deux possibilités :

$$\frac{x}{x+2} = -1 \quad \text{ou} \quad \frac{x}{x+2} = 1 \quad \text{et } x \neq -2$$

La première équation conduit à $x = -1$, la seconde à $0 = 2$, impossible. Finalement $\mathcal{S} = \{-1\}$.

5. (a) **(1 pt)** En posant $v_n = 2^n$, on met $v_0 = 1$ grain de blé sur la première case, $v_1 = 2$ sur la seconde, ainsi de suite donc $v_{63} = 2^{63} \simeq 9,223 \cdot 10^{18}$ sur la 64^e.
   (b) **(2 pts)** Soit S la somme cherchée :

$$S = \sum_{i=0}^{63} v_i = \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1$$

   (c) **(2 pts)** 1 grain $\longleftrightarrow$ 0,05 g
   20 grains $\longleftrightarrow$ 1 g, mais 1 tonne = 1000 kg = 10^6 g, donc
   $2 \cdot 10^7$ grains $\longleftrightarrow$ 1 tonne
   $2 \cdot 10^7 \times 6 \cdot 10^8 = 1,2 \cdot 10^{16}$ grains $\longleftrightarrow$ 600 millions de tonnes
   donc il faudra $\dfrac{2^{64}-1}{1,2 \cdot 10^{16}} \simeq 1537$ ans pour satisfaire la requête !

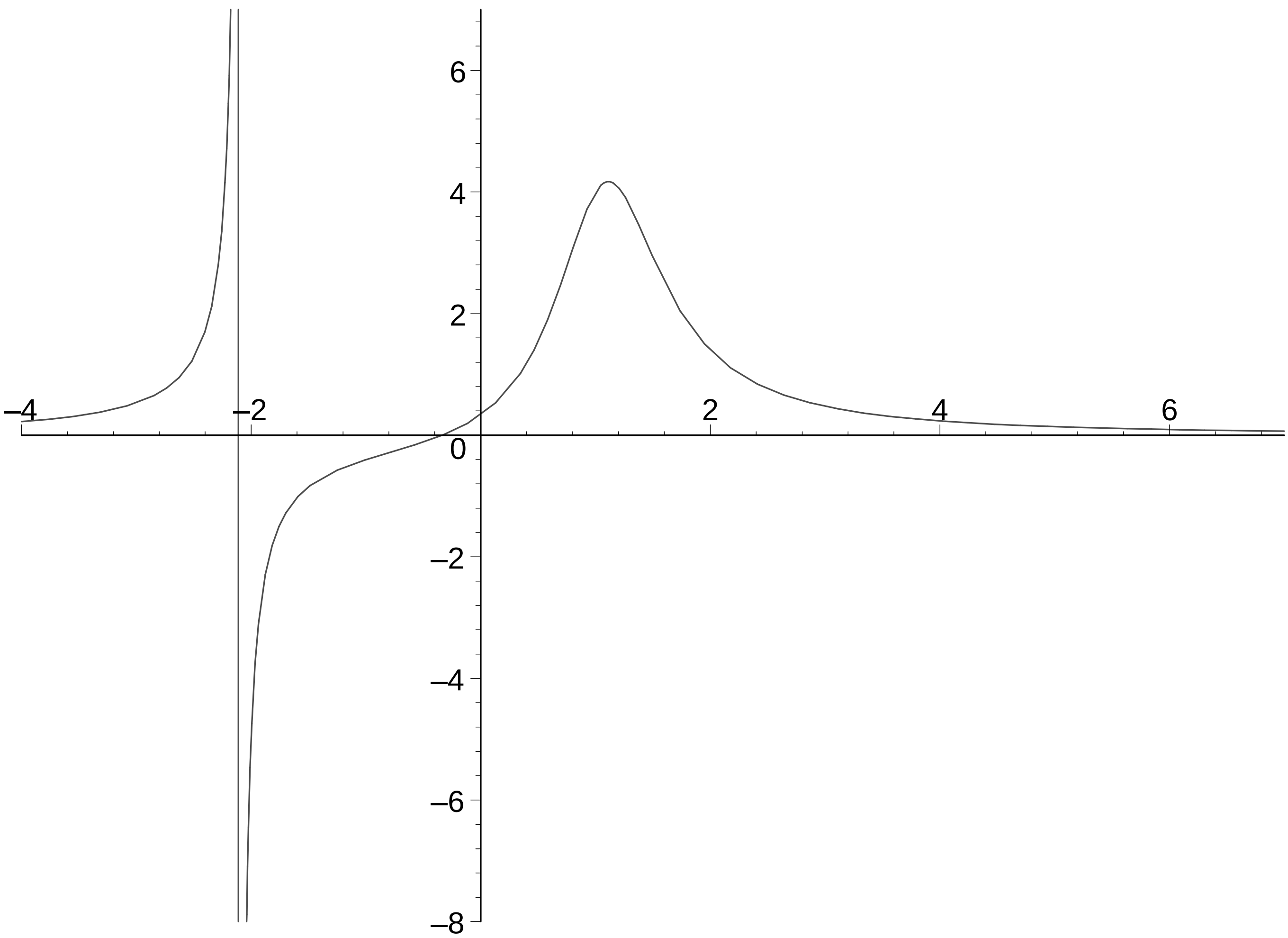
(Barème sur 40 points)

Contrôle d'été - Épisode 5

Soit $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{x^3-3x+3}$.

1. Procéder à une étude de fonction pour déterminer le nombre α tel que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{\alpha\}$. Donner un encradement d'amplitude 10^{-1} de ce nombre.
2. On pose $P(x) = 2x^3+x^2-4$. Montrer que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$. Montrer que le polynôme P n'admet qu'une seule racine β, en donner un encadrement d'amplitude 10^{-1}.
   Donner de signe de P et en déduire le tableau de variations de f.
3. Donner les limites aux bornes de l'ensemble de définition. Interpréter géométriquement et compléter le tableau de variations de f.

Voici la représentation graphique pour éviter les inepties.



Correction du contrôle d'été - Épisode 5

1. $x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x^3 - 3x + 3 \neq 0$. Étudions la fonction $g : x \mapsto x^3 - 3x + 3$. On a $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. D'où le tableau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f est strictement croissante et continue sur l'intervalle $]-\infty, -1]$, donc elle réalise une bijection de $]-\infty, -]$ sur $]-\infty, 5]$. Or $0 \in]-\infty, 5]$, donc il existe un unique réel α dans $]-\infty, -1]$ tel que $f(\alpha) = 0$. Avec la calculatrice on trouve $-2,2 < \alpha < -2,1$.
Ce n'est pas la peine de chercher une autre racine dans $]-1, +\infty[$ car pour tout réel x de cet intervalle, $f(x) \geqslant 1$.

2. Un calcul conduit à $f'(x) = \dfrac{-3(2x^3 + x^2 - 4)}{(x^3 - 3x + 3)^2}$, donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$. On procède à l'étude de P. La dérivée vaut $P'(x) = 6x^2 + 2x = 2x(3x+1)$; les limites sont évidentes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{107}{24}$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Un argument similaire au précédent montre que P réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[-4, +\infty[$ et comme $0 \in [-4, +\infty[$, il existe un unique réel β tel que $f(\beta) = 0$. Grâce à la calculatrice, on peut avancer que $1,1 < \beta < 1,2$.
Le signe : si $x < \beta$, alors $f(x) < 0$; si $x = \beta$, alors $f(x) = 0$ et si $x > \beta$, alors $f(x) > 0$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$-3P(x)$		$+$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	0

3. Encadrons le numérateur quand x tend vers α :

$$-2,2 < \alpha < -2,1 \Leftrightarrow -6,6 < 3\alpha < -6,3 \Leftrightarrow -5,6 < 3\alpha + 1 < -5,3$$

D'après le tableau de variations de g, $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x<\alpha}} g(x) < 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x>\alpha}} g(x) > 0$, donc

$$\lim_{\substack{x\to\alpha \\ x<\alpha}} f(x) = \frac{0^-}{0^-} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to\alpha \\ x>\alpha}} f(x) = \frac{0^-}{0^+} = -\infty$$

d'où le tableau ci-dessus. Géométriquement, ces résultats prouvent que les droites d'équation $y = 0$ et $x = \alpha$ sont des asymptotes à la courbe représentative de f.

Contrôle d'été - Épisode 6

1. Soit ABC un triangle.
   (a) Démontrer que pour tout point M du plan : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.
   (b) On note H le point d'intersection des hauteurs issues de B et de C. Démontrer en utilisant l'identité précédente que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.
   (c) En déduire que, dans tout triangle, les trois hauteurs sont concourantes.
2. Soit un quadrilatère $ABCD$, les points I milieu de $[AC]$ et J milieu de $[BD]$.
   (a) Montrer que $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2 = 4IJ^2+AC^2+BD^2$ en appliquant le théorème de la médiane dans les triangles ABC, ACD et BID.
   (b) En déduire que la somme des carrés des côtés d'un quadrilatère est supérieure ou égale à la somme des carrés des diagonales. À quelle condition a-t-on égalité ?
3. Les points I et J sont les milieux des côtés $[AB]$ et $[AC]$ du carré $ABCD$ et M est l'intersection des droites (CI) et (AJ).
   Donner la valeur exacte du cosinus de l'angle $\widehat{CMJ}$ en calculant de deux façons différentes $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{IC}$.
4. **Rappel.** Soit $\overrightarrow{u}\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{v}\left|\begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix}\right.$ deux vecteurs, alors par définition le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le réel $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$.

   L'objet de l'exercice est d'établir que l'aire S d'un triangle ABC où A, B et C sont trois points d'un plan muni d'un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est calculée par $S = \dfrac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right|$. On suppose que le triangle ABC n'est pas plat (donc $A \neq B \neq C$).

   (a) Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). Montrer que $AH^2 = \dfrac{(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}{AB^2}$ et en déduire que $CH^2 = \dfrac{1}{AB^2}\left(AB^2 \times AC^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2\right)$.
   (b) Montrer que l'aire S satisfait à $S^2 = \dfrac{1}{4}\left(AB^2 \times AC^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2\right)$ **[1]**.
   (c) Montrer que $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, (xy' - x'y)^2 + (xx' + yy')^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)$.
   En déduire que pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan

   $$\left(\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\right)^2 + \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right)^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 \times ||\overrightarrow{v}||^2 \quad \mathbf{[2]}$$

   (d) Déduire de [1] et [2] l'égalité annoncée.
   (e) **Application.** On donne les points $A\left|\begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix} -7 \\ -9 \end{matrix}\right.$ et $C\left|\begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix}\right.$. Calculer l'aire du triangle ABC.
   (f) Démontrer que tout triangle ayant ses sommets sur les nœuds d'un quadrillage formé de carreaux carrés de 1 cm × 1 cm a une aire supérieure ou égale à 0,5 cm^2.
   Aide. On peut choisir un repère orthonormal de façon que les nœuds du quadrillage soient les points à coordonnées entières dans ce repère. Montrer alors que si le triangle ABC a des sommets à coordonnées entières, $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$ est un entier naturel non nul.

Correction du contrôle d'été - Épisode 6

1. (a) **(2 pts)** Posons $\lambda = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BM}$. En décomposant avec A :

$$\begin{aligned}\lambda &= \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM})\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AM}\\ &= \overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA})\\ &= 0\end{aligned}$$

(b) **(1 pt)** Par construction $(AB)\perp(CH)$ et $(CA)\perp(BH)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BH} = 0$. En faisant $M = H$ dans λ on obtient l'équation

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BH} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH} = 0$$

ce qui traduit que $(BC)\perp(AH)$.

(c) **(1 pt)** Soit h_A la hauteur issue de A. Alors $h_A\perp(BC)$ et $A\in h_A$, donc d'après la question précédente $h_A = (AH)$ d'où $H\in h_A$. Étant donné que, par construction, H est le point d'intersection des hauteurs issues de B et C, on peut conclure que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes (en H ici).

2. (a) **(2 pts)** Le théorème de la médiane appliqué dans le triangle ABC donne $AB^2+BC^2 = 2BI^2 + \frac{1}{2}AC^2$.

De même dans le triangle ACD, on a $CD^2 + AD^2 = 2DI^2 + \frac{1}{2}AC^2$. On ajoutant membre à membre ces deux égalités, on arrive à

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2(BI^2 + DI^2) + AC^2$$

Mais le même théorème dans le triangle BID conduit à $BI^2 + ID^2 = 2IJ^2 + \frac{1}{2}BD^2$, et en remplaçant ci-dessus on arrive à l'égalité attendue.

(b) **(2 pts)** La somme des carrés des côtés est $\Sigma = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$; la somme des carrés des diagonales est $\sigma = AC^2 + BD^2$, donc l'égalité de la question précédente s'écrit $\Sigma - \sigma = 4IJ^2$. Or $4IJ^2 \geqslant 0$, puisque c'est un carré, d'où $\Sigma \geqslant \sigma$. L'égalité a lieu si et seulement si $4IJ^2 = 0 \Leftrightarrow I = J$, ce qui revient à dire que l'égalité a lieu si et seulement si les diagonales du quadrilatère se coupent en leur milieu, caractérisation des parallélogrammes.

3. **(4 pts)** Évaluons le produit scalaire $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{IC}$.
Par définition $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{IC} = AJ\times IC\times\cos\widehat{CMJ}$. Or d'après le théorème de Pythagore, $AJ^2 = AB^2 + BJ^2$ d'où $AJ^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ soit $AJ = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. De même, le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle BIC donne $IC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Finalement $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{IC} = \frac{5}{4}a^2\cos\widehat{CMJ}$.
Dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$, il est évident que $\overrightarrow{AJ}\left|\begin{array}{l} a\\ a/2\end{array}\right.$ et $\overrightarrow{IC}\left|\begin{array}{l} a/2\\ a\end{array}\right.$, d'où le produit scalaire $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{IC} = a\times\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\times a = a^2$.
En résumé $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{IC} = a^2 = \frac{5}{4}a^2\cos\widehat{CMJ}$, d'où l'on déduit $\cos\widehat{CMJ} = \frac{4}{5}$.

4. (a) **(2 pt)** Le point H étant le projeté orthogonal de C sur (AB), on a l'égalité $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overline{AB}\times\overline{AH}$; en élevant au carré les longueurs algébriques disparaissent : $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2 = AB^2\times AH^2$. Une division par AB^2 fournit l'expression de AH^2.
Le théorème de Pythagore dans le triangle ACH donne

$$CH^2 = AC^2 - AH^2 = AC^2 - \frac{(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}{AB^2} = \frac{1}{AB^2}\left(AB^2\times AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2\right)$$

(b) **(1 pt)** L'aire est donnée par $S = \dfrac{1}{2}AB\times CH$, en passant au carré et en remplaçant CH^2 :

$$S^2 = \frac{1}{4}AB^2\times\frac{1}{AB^2}\left(AB^2\times AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2\right) = \frac{1}{4}\left(AB^2\times AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2\right) \quad \textbf{[1]}$$

(c) **(1,5 pt)** Il suffit de développer et de comparer chacun des membres pour établir l'identité (due à Lagrange).
En repère orthonormal, on sait que, étant donné deux vecteurs $\overrightarrow{u}\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{v}\left|\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}\right.$, le déterminant de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ vaut $xy' - x'y$, leur produit scalaire vaut $xx' + yy'$ et $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$. En mettant au carré et en comparant à l'identité de Lagrange :

$$(xy'-x'y)^2 + (xx'+yy')^2 = (x^2+y^2)(x'^2+y'^2)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\right)^2 + \left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right)^2 = ||\overrightarrow{u}||^2\times||\overrightarrow{v}||^2 \quad \textbf{[2]}$$

(d) **(1 pt)** En faisant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ dans [2], on obtient

$$AB^2\times AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2 = \left(\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right)^2$$

et en divisant par 4, la formule [1] permet d'écrire

$$S^2 = \frac{1}{4}\left(\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right)^2$$

et on prend la racine carrée pour conclure, en enlevant le signe de $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

(e) **(0,5 pt)** $A\left|\begin{matrix}-2\\-1\end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix}-7\\-9\end{matrix}\right.$ et $C\left|\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right.$, d'où $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}-5\\-8\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{AC}\left|\begin{matrix}3\\5\end{matrix}\right.$. Par suite

$$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix}-5 & 3\\-8 & 5\end{vmatrix} = -25+24 = -1$$

et l'aire vaut $S = \dfrac{1}{2}\times|-1| = \dfrac{1}{2}$.

(f) **(2 pts)** Posons $\delta = \det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. On sait que $\delta = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow (AB)/\!/(AC) \Leftrightarrow (AB) = (AC) \Leftrightarrow$ les points A, B et C sont alignés. Absurde car ABC est un vrai triangle. Donc $\delta \neq 0$.
Si les coordonnées des points A, B et C sont des nombres entiers, celles de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ le sont aussi. Le déterminant δ étant la différence d'un produit d'entiers, il est lui-même entier.
Puisque δ est un *entier non nul*, on a $\delta \leqslant -1$ ou $\delta \geqslant 1$, dans les deux cas $|\delta| \geqslant 1$, et en multipliant par $\dfrac{1}{2}$, on obtient $S = \dfrac{1}{2}|\delta| \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Contrôle d'été - Épisode 7

Étant donné un triangle ABC, de cercle circonscrit Γ (centre O, rayon R), de cercle inscrit $\mathcal{C}$ (centre I, rayon r), on pose $d = OI$. Cet exercice propose de montrer que $d^2 = R(R-2r)$.

A' est le point d'intersection de la bissectrice (AI) avec le cercle Γ ; S est le projeté orthogonal de I sur (AC) ; A'' est le point diamétralement opposé à A' sur Γ. On note α l'angle $\widehat{BAI}$.

1. En utilisant le théorème de l'angle inscrit, montrer que $\widehat{A'BC} = \widehat{BA''A} = \alpha$.
   Justifier que les angles $\widehat{A'BI}$ et $\widehat{AIB}$ sont supplémentaires et en déduire que le triangle $IA'B$ est isocèle en A'.

2. Exprimer IA en fonction de r et α, et BA' en fonction de R et α (utiliser les triangles rectangles AIS et $BA'A''$).

3. Évaluer de deux façons différentes le produit scalaire $\omega = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IA'}$,
   – d'une part en projetant,
   – d'autre part en montrant que $\omega = \overrightarrow{IA''} \cdot \overrightarrow{IA'}$ puis en décomposant ces deux vecteurs avec le point O grâce à la relation de Chasles.

   En déduire l'égalité $d^2 = R(R-2r)$.

4. En déduire que pour tout triangle $R \geqslant 2r$.

Correction du contrôle d'été - Épisode 7

1. Par le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{A'BC} = \widehat{A'AC}$ et $\widehat{BAA'} = \widehat{BA''A'}$. Mais la droite (AA') est la bissectrice de $\widehat{BAC}$, donc $\widehat{BAA'} = \widehat{A'AC}$; de plus $\widehat{BAA'} = \widehat{BAI} = \alpha$. En résumé :

$$\widehat{A'BC} = \widehat{BA''A} = \alpha.$$

$\widehat{A'BI} = \widehat{A'BC} + \widehat{CBI} = \alpha + \widehat{CBI}$, mais (BI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CBA}$, donc $\widehat{CBI} = \widehat{IBA}$ d'où $\widehat{A'BI} = \alpha + \widehat{IBA}$ **[1]**.
En considérant le triangle ABI, on a $\widehat{BAI} + \widehat{IBA} + \widehat{BIA} = \pi$, mais $\widehat{BAI} = \alpha$, donc $\alpha + \widehat{IBA} = \pi - \widehat{BIA}$ et en comparant avec [1], on arrive bien à $\widehat{A'BI} = \pi - \widehat{BIA}$ **[2]**.

De façon évidente, $\widehat{BIA'} = \widehat{AIA'} - \widehat{BIA} = \pi - \widehat{BIA}$, donc d'après [2], $\widehat{BIA'} = \widehat{A'BI}$, ce qui prouve que le triangle $IA'B$ est isocèle en A'.

2. Dans le triangle ASI rectangle en S (puisque (AS) est tangente à $\mathcal{C}$ en S), on a

$$IA = \frac{SI}{\sin \widehat{IAS}} = \frac{r}{\sin \widehat{BAI}} = \frac{r}{\sin \alpha}.$$

puisque $\widehat{IAS} = \widehat{BAI}$, étant donné que (AI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.
Le triangle $A'A''B$ est rectangle en B puisque $[A'A'']$ est un diamètre de Γ (donc $A'A'' = 2R$).
De plus le triangle $IA'B$ étant isocèle en A on a $IA' = BA'$, d'où

$$IA' = BA' = A'A'' \sin \widehat{BA''A'} = 2R \sin \alpha.$$

3. Évaluons de deux façons le produit scalaire $\omega = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IA'}$.
   - Les points A, I, A' sont alignés dans cet ordre, donc $\omega = \overline{IA} \times \overline{IA'}$. Orientons par exemple (AA') de A vers A'. On a alors $\omega = \dfrac{-r}{\sin \alpha} \times 2R \sin \alpha = -2Rr$.
   - Le triangle $AA'A''$ est rectangle en A donc le vecteur $\overrightarrow{IA''}$ se projette orthogonalement sur $\overrightarrow{IA'}$ en $\overrightarrow{IA}$. Ce qui permet d'écrire $\omega = \overrightarrow{IA''} \cdot \overrightarrow{IA'}$. On décompose chacun de ces vecteurs avec le point O,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IA''} \cdot \overrightarrow{IA'} &= (\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA''}) \cdot (\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA'}) \\ &= (\overrightarrow{IO} - \overrightarrow{OA'}) \cdot (\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA'}) \\ &= IO^2 - OA'^2 \\ &= d^2 - R^2. \end{aligned}$$

Finalement $\omega = -2Rr = d^2 - R^2$ d'où $d^2 = R(R - 2r)$.

4. Les longueurs R et r sont positives (strictement), donc

$$d^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow R(R-2r) \geqslant 0 \Leftrightarrow R - 2r \geqslant 0 \Leftrightarrow R \geqslant 2r.$$