L'intégrale de Gauss

Gilles Auriol
auriolg@free.fr — http ://auriolg.free.fr

D'après *Math'x Terminale S obligatoire (programme 2002)*, Didier.

Partie A. Étude de $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n x\, dx$ pour $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer à l'aide d'une intégration par partie que $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive puis strictement positive (sans calculer I_n).
3. En utilisant les questions précédentes, prouver que $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$.

   En déduire la limite de $\left(\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. On pose $t_n = (n+1)I_{n+1}I_n$.
   (a) Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   (b) En déduire que $t_n = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout entier naturel n.
5. On pose $v_n = nI_n^2$.
   (a) En écrivant $v_n = \dfrac{n}{n+1}\, t_n\, \dfrac{I_n}{I_{n+1}}$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$.
   (b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, I_n$.

Partie B. Encadrement de $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

1. Montrer que pour tout réel $u > -n$, on a $\ln\left(1+\dfrac{u}{n}\right) \leqslant \dfrac{u}{n}$. En déduire $\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n \leqslant e^u$ pour tout réel $u \geqslant -n$.
2. Montrer $\forall t \in [0;\sqrt{n}]$ on a $\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \dfrac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}$, puis que

$$\forall t \in [0;\sqrt{n}],\ \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \leqslant e^{-\frac{t^2}{2}} \leqslant \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}.$$

3. En déduire : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}\, \mathrm{d}t.$

Partie C. Autre expression de $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} dt$

Soit F une primitive de $t \mapsto \left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$ sur $[0;\sqrt{n}]$. On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \sqrt{n}\sin u \end{array}$.

1. Exprimer $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{d}t$ à l'aide de F.
2. Montrer que $F\circ\varphi$ est dérivable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et calculer sa dérivée.
3. En déduire que $\displaystyle\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} u\,\mathrm{d}u = F(\sqrt{n}) - F(0)$.
4. Prouver alors que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{d}t = \sqrt{n}\,I_{n+1}$.

Partie D. Majoration de $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}\,dt$

Soit G une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}$ sur $[0;\sqrt{n}]$. On pose $\theta : \begin{array}{ccc} \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \sqrt{n}\tan u \end{array}$.

1. Exprimer $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}\,\mathrm{d}t$ à l'aide de G.
2. Montrer que $F\circ\theta$ est dérivable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ et calculer sa dérivée.
3. En déduire que $\displaystyle\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{n-2} u\,\mathrm{d}u = G(\sqrt{n}) - G(0)$.
4. Prouver alors que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\,I_{n-2}$.

Partie E. Détermination de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

1. Déduire des questions précédentes que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a
$$\sqrt{n}\,I_{n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\,I_{n-2}.$$
2. Démontrer que $\displaystyle\left(\int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.
3. *(Hors programme TS)* En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

Correction

Partie A. Étude de $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n x\,dx$ pour $n \in \mathbb{N}$

1. Pour intégrer I_{n+2} par parties, on peut poser

$$\left\{\begin{array}{l} u(x) = \cos^{n+1} x \\ v'(x) = \cos x \end{array}\right. \quad \text{et choisir} \quad \left\{\begin{array}{l} u'(x) = -(n+1)\sin x \cos^n x \\ v(x) = \sin x \end{array}\right.$$

   Donc

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[\cos^{n-1} x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^n x\,\mathrm{d}x \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\cos^n x\,\mathrm{d}x \\ &= (n+1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} x\,\mathrm{d}x\right] \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

   On en déduit alors $I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$, d'où $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.

2. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x(\cos x - 1)\,\mathrm{d}x$$

   or $\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos x - 1 \leqslant 0$ et $\cos^n x \geqslant 0$, donc par croissance de l'intégrale $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

   De plus $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, donc comme $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \neq 0$, une récurrence immédiate montre que $I_{2n} \neq 0$. De même $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \neq 0$, donc on a $I_{2n+1} \neq 0$.

   Ainsi $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.

3. D'après la question 1, on a $\dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{I_{n+2}}{I_n}$ car la suite (I_n) est à termes strictement positifs ; sa décroissance donne $I_{n+2} \leqslant I_{n+1}$, d'où par division $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$, ce qui prouve que $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$. D'autre part, de $I_{n+1} \leqslant I_n$, on déduit $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$.

   En mettant ces deux inégalités bout à bout, on arrive à $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$. Le théorème des gendarmes et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$ montre que la suite $\left(\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

4. (a) En utilisant la question 1, c'est-à-dire $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} - t_n &= (n+2)I_{n+2}I_{n+1} - (n+1)I_{n+1}I_n \\ &= I_{n+1}\left[(n+2)I_{n+2} - (n+1)I_n\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Ce qui prouve que (t_n) est constante.

(b) En particulier $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = t_0$. Or d'après les calculs de I_0 et I_1 (question 1),

$$t_0 = I_0 I_1 = \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Il en résulte que $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = \dfrac{\pi}{2}$.

5. (a) En passant à la limite dans $v_n = \dfrac{n}{n+1} t_n \dfrac{I_n}{I_{n+1}}$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_n}{I_{n+1}} = 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \dfrac{\pi}{2}$, on arrive à $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{\pi}{2}$.

(b) La suite (v_n) est à l'évidence à terme positifs, donc $\sqrt{v_n}$ est définie et

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, I_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{v_n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Partie B. Encadrement de $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

1. Soit u un réel avec $u > -n$. On a $u > -n \Longrightarrow \dfrac{u}{n} \in]-1;+\infty[$, donc $\ln\left(1+\dfrac{u}{n}\right)$ est défini.
Montrons que $\forall x \in]-1;+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$. Considérons pour cela la fonction définie par $f: \begin{array}{rcl}]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x)-x \end{array}$, elle est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{-x}{1+x}$,
donc f est croissante sur $]-1;0]$ et décroissante sur $[0;+\infty[$. De plus $f(0) = 0$, ce qui signifie que la fonction f admet un maximum nul sur $]-1;+\infty[$. Ainsi, $\forall x \in]-1;+\infty[$, $f(x) \leqslant 0$, soit $\ln(1+x) \leqslant x$, ou encore $\ln\left(1+\dfrac{u}{n}\right) \leqslant \dfrac{u}{n}$ **[1]**.
Prouvons que $\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n \leqslant e^u$ pour $u \geqslant -n$.
   - Si $u > -n$, en prenant l'exponontielle (croissante sur $\mathbb{R}$) de [1], on a $1+\dfrac{u}{n} \leqslant e^{\frac{u}{n}}$, donc en élevant à la puissance n, on a bien $\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n \leqslant e^u$.
   - Si $u = -n$, on a $0 \leqslant e^{-1}$, ce qui est vrai.
2. Comme $t \in [0;\sqrt{n}] \Longrightarrow 0 \leqslant t^2 \leqslant n \Longrightarrow -t^2 \geqslant -n$, on peut appliquer $\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n \leqslant e^u$ en prenant $u = -t^2$. On a alors $\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2}$.
Comme $-n \leqslant 0$ et $t^2 \geqslant 0$, on a $t^2 \geqslant -n$ et on peut encore appliquer cette inégalité en prenant $u = t^2$, d'où $\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{t^2}$. En passant à l'inverse, $e^{-t^2} \leqslant \dfrac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^n}$. En réunissant les deux inégalités obtenues : $\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \dfrac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^n}$.
Puisque $t \in [0;\sqrt{n}] \Longleftrightarrow \dfrac{t}{\sqrt{2}} \in \left[0;\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right]$, on peut utiliser cette nouvelle inégalité en prenant pour t le réel $\dfrac{t}{\sqrt{2}}$ et pour n le réel $\dfrac{n}{2}$, ce qui mène à $\left(1-\dfrac{t^2}{2}\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \leqslant e^{-\frac{t^2}{2}} \leqslant \dfrac{1}{(1+\frac{t^2}{2}\frac{2}{n})^{\frac{n}{2}}}$, c'est-à-dire $\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \leqslant e^{-\frac{t^2}{2}} \leqslant \dfrac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^{\frac{n}{2}}}$.

3. En intégrant sur $[0;\sqrt{n}]$ l'inégalité, on obtient par positivité :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^{\frac{n}{2}}} \mathrm{d}t.$$

Partie C. Autre expression de $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} dt$

On considère dorénavant $n \in \mathbb{N}$.

1. Si F est une primitive de $t \mapsto \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$, il est clair que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{d}x = F(\sqrt{n}) - F(0)$.
2. La fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} \left[0;\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \sqrt{n}\,\sin u \end{array}$ est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et à valeurs dans $\left[0;\sqrt{n}\right]$, comme le montre les implications $u \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \Longrightarrow \sin u \in [0;1] \Longrightarrow \sqrt{n}\,\sin u \in \left[0;\sqrt{n}\right]$. De plus F est dérivable sur $[0;\sqrt{n}]$, donc $F\circ\varphi$ est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
   La dérivée de $F\circ\varphi$ est

$$\begin{aligned}
(F\circ\varphi)'(u) &= \varphi'(u)\times F'(\varphi(u)) \\
&= \sqrt{n}\,\cos u \times \left(1-\frac{(\sqrt{n}\sin u)^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \sqrt{n}\,\cos u \times (1-\sin^2 u)^{\frac{n}{2}} \\
&= \sqrt{n}\,\cos u \times (\cos^2 u)^{\frac{n}{2}} \text{ car } \cos u \geqslant 0 \\
&= \sqrt{n}\,\cos^{n+1} u
\end{aligned}$$

3. En intégrant l'égalité obtenue sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} u\,\mathrm{d}u &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (F\circ\varphi)'(u)\,\mathrm{d}u \\
&= [(F(\varphi(u))]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= F(\varphi(\frac{\pi}{2})) - F(\varphi(0)) \\
&= F(\sqrt{n}) - F(0)
\end{aligned}$$

4. D'après les questions 1 et 3,

$$F(\sqrt{n}) - F(0) = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t\,\mathrm{d}t = \sqrt{n}\,I_{n+1}$$

Partie D. Majoration de $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^{\frac{n}{2}}} dt$

1. Si G est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^{\frac{n}{2}}}$, il est clair que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^{\frac{n}{2}}} \mathrm{d}t = G(\sqrt{n}) - G(0)$.

2. La fonction θ est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et à valeurs dans $[0;\sqrt{n}]$, comme le montre les implications $u \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right] \Longrightarrow \tan u \in [0;1] \Longrightarrow \sqrt{n}\,\tan u \in \left[0;\sqrt{n}\right]$. De plus G est dérivable sur $[0;\sqrt{n}]$, donc $G\circ\theta$ est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

   Puisque $\tan'(x) = 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, la dérivée de $G\circ\theta$ est

$$\begin{aligned}
(G\circ\theta)'(u) &= \theta'(u)\times G'(\theta(u))\\
&= \sqrt{n}\,(1+\tan^2 u)\times \frac{1}{\left(1+\frac{(\sqrt{n}\tan u)^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}\\
&= \sqrt{n}(1+\tan^2 u)\times \frac{1}{(1+\tan^2 u)^{\frac{n}{2}}}\\
&= \sqrt{n}\,\frac{1}{\cos^2 u}\,(\cos^2 u)^{\frac{n}{2}}\\
&= \sqrt{n}\,\frac{1}{\cos^2 u}\,\cos^n u \text{ car } \cos u \geqslant 0\\
&= \sqrt{n}\cos^{n-2} u
\end{aligned}$$

3. En intégrant l'égalité obtenue sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{n-2} u\,\mathrm{d}u &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (G\circ\theta)'(u)\,\mathrm{d}u\\
&= [(G(\theta(u))]_0^{\frac{\pi}{4}}\\
&= G(\theta(\frac{\pi}{4})) - G(\theta(0))\\
&= G(\sqrt{n}) - G(0)
\end{aligned}$$

4. D'après les questions 1 et 3,

$$G(\sqrt{n}) - G(0) = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^{\frac{n}{2}}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{n-2} t\,\mathrm{d}t \ \mathbf{[2]}.$$

   Mais $I_{n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{n-2} t\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} t\,\mathrm{d}t$ d'après la relation de Chasles. Comme $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{n-2} t\,\mathrm{d}t$ et $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} t\,\mathrm{d}t$ sont $\geqslant 0$, on a $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{n-2} t\,\mathrm{d}t \leqslant I_{n-2}$. En remplaçant dans [2], on parvient à

$$\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^{\frac{n}{2}}}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\,I_{n-2}.$$

Partie E. Détermination de $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

1. On a démontré à la question C.4 que $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{n}\,I_{n+1}$ et à la question D.4 que $\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^{\frac{n}{2}}}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\,I_{n-2}$. Or d'après B.3,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} \mathrm{d}t.$$

donc en remplaçant on arrive immédiatement à

$$\sqrt{n}\, I_{n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\, I_{n-2}.$$

2. D'après le théorème des gendarmes et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, I_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ démontré dans en A.5, on a la convergence de $\left(\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, on peut écrire

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

3. On effectue le changement de variable $x = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$ (quand t décrit $\mathbb{R}_+$, x décrit aussi $\mathbb{R}_+$), d'où $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}}$ et $x^2 = \dfrac{t^2}{2}$, donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

De plus la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est paire, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$