Irrationalité de $\zeta(3)$

Gilles Auriol
auriolg@free.fr — http ://auriolg@free.fr

Ce résultat est dû au mathématicien français Roger Apéry, en 1978. L'année suivante, Beukers a simplifié la preuve, c'est celle qui est proposée ici.

Commençons par quelques notations. Le symbole $\square$ désignera $]0,1[^2$. On notera d_n le plus petit commun multiple des entiers compris entre 1 et n. On montre en théorie des nombres que $d_n \leqslant 3^n$; pour une preuve voir par exemple l'ouvrage de Daniel Duverney, *Théorie des nombres*, Dunod, 1998.

Enfin pour tout entier n, on pose $P_n(x) = \dfrac{1}{n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n(1-x)^n)$. Voici les propriétés que nous utiliserons de ces polynômes (dits de Legendre).

1 Lemme. — *P_n est un polynôme à coefficients entiers de degré n et pour toute fonction de classe C^n on a*

$$\int_0^1 P_n(x)f(x)\ \mathrm{d}x = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{n!} f^{(n)}(x)\ \mathrm{d}x.$$

Preuve. — En développant par la formule du binôme de Newton puis en dérivant, il vient

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n+i}{n}(-1)^i x^{i+n},$$

ce qui prouve que P_n est à coefficients entiers.

Pour tout $0 \leqslant i \leqslant n-1$, le polynôme $\dfrac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}(x^n(1-x)^n)$ s'annule en 0 et en 1 puisque ces entiers sont racines d'ordre n du polynôme $x^n(1-x)^n$. En effectuant n intégrations par parties, on aboutit à la formule annoncée. ∎

2 Lemme. — *Pour tout $(x,y,z) \in]0,1[^3$, on a*

$$\frac{x(1-x)y(1-y)z(1-z)}{1-(1-xy)z} \leqslant (\sqrt{2}-1)^4.$$

Preuve. — Notons f la fonction de trois variables ainsi définie et montrons qu'elle peut se prolonger par continuité à $[0,1]^3$ en posant $f=0$ sur les faces du cube. Le dénominateur de cette fonction est nul si et seulement si $z=1$ et $xy=0$. Montrons par exemple que f tend vers 0 sur l'arête d'équation $x=0$ et $z=1$. Pour $0<a,b,c<1$, comme $1-c>0$, on a

$$f(a,b,c) = \frac{a(1-a)b(1-b)c(1-c)}{1-c+abc} \leqslant \frac{a(1-a)b(1-b)c(1-c)}{abc} = (1-a)(1-b)(1-c),$$

d'où la nullité de la fonction lorsque (a,b,c) tend par l'intérieur du cube vers $(0,y_0,1)$ où $y_0 \in [0,1]$.

La fonction f ainsi prolongée est continue sur le compact $[0,1]^3$; elle y atteint donc son maximum, et c'est certainement en des points intérieurs au cube puisqu'elle est nulle sur ses faces (et elle n'est pas identiquement nulle). On supposera donc dorénavant que $(x,y,z) \in]0,1[^3$. Nécessairement les coordonnées d'un point en lesquelles f atteint son maximum annulent les dérivées partielles en x,y,z. Cela donne respectivement, en chassant les dénominateurs et les facteurs du type $x,y,z,1-x,1-y,1-z$ qui sont non nuls, les équations

$$1-z-2x+2xz-x^2yz=0 \quad \mathbf{[1]}, \qquad 1-z-2y+2yz-xy^2z=0 \quad \mathbf{[2]}$$

$$\text{et}\quad (1-2z)(1-(1-xy)z)+(1-xy)z(1-z)=0 \quad \mathbf{[3]}$$

En soustrayant [2] à [1], il vient $(x-y)(-2+2z-xyz)=0$. Mais $-2+2z-xyz = z(2-xy)-2 \leqslant 0$, avec égalité si et seulement si $z=1$ et $xy=0$, cas que nous avons écarté. Ainsi $x=y$. En remplaçant dans [1],

$$z=\frac{1-2x}{x^3-2x+1} \quad \mathbf{[4]},$$

à condition de s'être assuré de la non nullité du dénominateur, ce qui est clair une fois remarqué que $x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1)$. En injectant dans [3],

$$\left(1-\frac{2(1-2x)}{x^3-2x+1}\right)\left(1-(1-x^2)\frac{1-2x}{x^3-2x+1}\right)+(1-x^2)\frac{1-2x}{x^3-2x+1}\times\frac{x^3}{x^3-2x+1}=0,$$

d'où en multipliant par $(x^3-2x+1)^2$ et en réduisant les facteurs,

$$(x^3+2x-1)(x^2(1-x))+(1-x^2)(1-2x)x^3=0$$

et en divisant par $x^2(1-x)\neq 0$, on arrive à

$$x^3+x^2-3x+1=0,$$

qui se factorise en $(x-1)(x^2+2x-1)=0$. Finalement x est la racine comprise entre 0 et 1 du trinôme x^2+2x-1, c'est-à-dire $x=\sqrt{2}-1=y$. Il reste à injecter dans [4] pour trouver $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On a alors

$$1-(1-xy)z = 1-(1-(\sqrt{2}-1)^2)\frac{\sqrt{2}}{2} = 1-(2\sqrt{2}-2)\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}-1$$

et enfin

$$f(x,y,z)=\frac{(1-\sqrt{2})^2(2-\sqrt{2})^2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{(1-\sqrt{2})^2(\sqrt{2}(\sqrt{2}-1))^2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2}}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}-1)^4,$$

calcul miraculeux s'il en est ! ■

3 Lemme. — *Soit $r,s\in\mathbb{N}$. On a*

$$I_{r,s}=\int_{\square}-\frac{x^ry^s\ln(xy)}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \in \begin{cases} 2\zeta(3)+\dfrac{1}{d_r^3}\mathbb{Z} & si\ r=s\geqslant 1\\ \dfrac{1}{d_r^3}\mathbb{Z} & si\ r>s\end{cases}$$

et $I_{0,0}=2\zeta(3)$.

Preuve. — Le théorème de convergence monotone permet d'écrire

$$\begin{aligned} I_{r,s}=\int_{\square}-\frac{x^ry^s\ln(xy)}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{\square}-x^ry^s\ln(xy)\sum_{n=0}^{+\infty}(xy)^n\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\int_{\square}-x^{r+n}y^{s+n}\ln(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_{\square}-x^{r+n}y^{s+n}\ln(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}\end{aligned}$$

Une intégration par parties montre

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \int_0^1 -x^k\ln(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{(k+1)^2},$$

d'où par le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\int_{\square} -x^{r+n}y^{s+n}\ln(x)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_0^1 -x^{r+n}\ln(x)\ \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 y^{s+n}\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{(r+n+1)^2(s+n+1)}$$

et finalement

$$I_{r,s} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(r+n+1)(s+n+1)}\left(\frac{1}{r+n+1}+\frac{1}{s+n+1}\right).$$

Le résultat pour $I_{0,0}$ est clair. Si $r = s \geqslant 1$, il vient

$$I_{r,s} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(r+n+1)^3} = 2\left(\zeta(3) - 1 - \frac{1}{2^3} - \cdots - \frac{1}{r^3}\right) \in 2\zeta(3) + \frac{1}{d_r^3}\mathbb{Z}$$

Si $r > s$, on a la décomposition en élément simple

$$\frac{1}{(r+n+1)(s+n+1)} = \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{s+n+1} - \frac{1}{r+n+1}\right)$$

donc en remplaçant

$$I_{r,s} = \frac{1}{r-s}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(s+n+1)^2} - \frac{1}{(r+n+1)^2}\right).$$

On observe alors que la série est télescopique ; il reste

$$I_{r,s} = \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{(s+1)^2} + \cdots + \frac{1}{r^2}\right)$$

d'où le résultat. ∎

Preuve (de l'irrationalité de $\zeta(3)$). — Considérons l'intégrale

$$I_n = \int_{\square} -\frac{P_n(x)P_n(y)\ln(xy)}{1-xy}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Puisque P_n est de degré n à coefficients entiers, I_n est une combinaison linéaire à coefficients entiers d'intégrales de la forme $I_{r,s}$ avec $r, s \leqslant n$. Le lemme 3 montre alors qu'il existe a_n et b_n deux entiers tels que $I_n = 2a_n\zeta(3) + \dfrac{b_n}{d_n^3}$. En supposant $\zeta(3)$ rationnel, il s'écrit $\zeta(3) = \dfrac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers positifs. On peut écrire I_n sous la forme

$$I_n = \frac{A_n}{bd_n^3},\ A_n \in \mathbb{Z}.$$

Nous allons montrer que $I_n \neq 0$ et que A_n tend vers 0 lorsque n vers $+\infty$, ce qui constituera une contradiction.

Commençons par remarquer que pour tout $(x, y) \in \square$,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{1-(1-xy)z} = \left[-\frac{\ln(1-(1-xy)z)}{1-xy}\right]_{z=0}^{z=1} = -\frac{\ln(xy)}{1-xy}.$$

Soit M un majorant de la fonction $(x, y) \longmapsto |P_n(x)P_n(y)|$ sur le compact $[0, 1]^2$. Il vient par le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\int_{\square}\int_0^1 |P_n(x)|\frac{|P_n(y)|}{1-(1-xy)z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \leqslant M\int_{\square}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{1-(1-xy)z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = M\times I_{0,0} < +\infty,$$

si bien que le théorème de Fubini puis le lemme 1 permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{\square}\left(\int_0^1 P_n(x)\frac{P_n(y)}{1-(1-xy)z}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= \int_{\square}\left(\int_0^1 (-1)^n\frac{x^n(1-x)^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{P_n(y)}{1-(1-xy)z}\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= \int_{\square}\left(\int_0^1 (-1)^n\frac{x^n(1-x)^n}{n!}\left(\frac{P_n(y)(-1)^n n! y^n z^n}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= \int_{\square}P_n(y)\left(\int_0^1 \frac{(1-x)^n x^n y^n z^n}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Il faut justifier cette dernière égalité. C'est encore le théorème de Fubini puisque $|P_n(y)|$ est borné et l'intégrale sur $]0,1[$ est finie comme le montre le changement de variable $w = \dfrac{1-z}{1-(1-xy)z}$. Il est involutif et échange 0 et 1. Les calculs utiles sont les suivants

$$\mathrm{d}z = \frac{-xy\,\mathrm{d}w}{(1-(1-xy)z)^2},\ \text{et } 1-(1-xy)z = \frac{xy}{1-(1-xy)w}.$$

En remplaçant et en continuant les calculs (et en utilisant encore Fubini puis Fubini-Tonelli),

$$\begin{aligned}
I_n &= -\int_{\square}P_n(y)\left(\int_0^1 \frac{(1-x)^n(1-w)^n}{1-(1-xy)w}\,\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= -\int_{\square}\left(\int_0^1 (-1)^n\frac{y^n(1-y)^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n}\left(\frac{(1-x)^n(1-w)^n}{1-(1-xy)w}\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}w\\
&= -\int_{\square}\left(\int_0^1 (-1)^n\frac{y^n(1-y)^n}{n!}\left(\frac{(1-x)^n(1-w)^n(-1)^n n! x^n w^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}}\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}w\\
&= -\int_{\square}\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n w^n(1-w)^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= -\int_{\square}\int_0^1 (f(x,y,w))^n\frac{1}{1-(1-xy)w}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}w
\end{aligned}$$

où f est la fonction du lemme 2. On a ainsi $I_n < 0$ et

$$0 < |A_n| = bd_n|I_n| \leqslant bd_n(\sqrt{2}-1)^{4n}\int_{\square}\int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)w}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}w.$$

Cette dernière intégrale triple est $I_{0,0} = 2\zeta(3)$, et utilisant la majoration $d_n \leqslant 3^n$ on arrive à

$$0 < |A_n| \leqslant 2\zeta(3)b\times(27(\sqrt{2}-1)^4)^n < 2\zeta(3)b\times 0.8^n,$$

d'où une contradiction puisque A_n est un entier coincé strictement entre 0 et 1 pour n assez grand. ■

Référence. — $\zeta(3)$, Bogdan Nica. Article disponible sur Internet.