Théorème de Steiner-Lehmus généralisé

Gilles Auriol
auriolg@free.fr — http ://auriolg.free.fr

On s'intéresse dans ce papier à la recherche de conditions nécessaires et suffisantes pour que les bissectrices, intérieures ou extérieures, issues de deux sommets d'un triangle triangle aient la même longueur.

Le cas de deux bissectrices intérieures est bien connu, c'est le théorème de Steiner-Lehmus qui affirme qu'il est nécessaire et suffisant que le triangle considéré soit isocèle. Ce résultat a été démontré par Steiner en 1842 après que Lehmus lui eut envoyé une lettre demandant une preuve géométrique. Une preuve est donnée dans [Cox67].

Lorsque l'une des bissectrices est extérieure, on obtient l'une ou l'autre des conditions suivantes

$$\sin^2 \frac{C}{2} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \quad \text{ou} \quad \cos^2 \frac{C}{2} = \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}$$

suivant que l'autre bissectrice est extérieure ou intérieure respectivement.

On développora deux preuves de ce résultat, l'une algébrique en exprimant les longueurs des bissectrices en fonction de celle des côtés, l'autre trigonométrique en les exprimant en fonction des angles. On en déduira des expressions des éléments du triangle en fonction de paramètres bien choisis. On donnera également des exemples simples de tels triangles.

Le point de départ de ce travail est un exercice de [Mai52] traitant du cas d'égalité des bissectrices extérieures. Je l'ai généralisé aux deux autres cas. On pourra consulter [Haj01] pour une autre démonstration de ces résultats.

Dans la suite ABC désignera un triangle non aplati. Comme il est de coutume, on notera $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ les longueurs des côtés, p le demi-périmètre, S l'aire du triangle, R et r les rayons respectifs des cercles circonscrit et inscrit, d_a (resp. d'_a) la longueur de la bissectrice intérieure (resp. extérieure) issue de A.

1 Sur les bissectrices

1 Théorème. — *Soit ABC un triangle non aplati.*

(i) Les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes en le point barycentre de

$$(A, a), (B, b), (C, c).$$

et on a

$$d_a^2 = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} \quad \text{et} \quad d_a = \frac{b \sin C}{\cos \frac{B-C}{2}}.$$

(ii) Les bissectrices extérieures des angles A et B et la bissectrice intérieure de l'angle C sont concourantes en le point barycentre de

$$(A, a), (B, b), (C, -c).$$

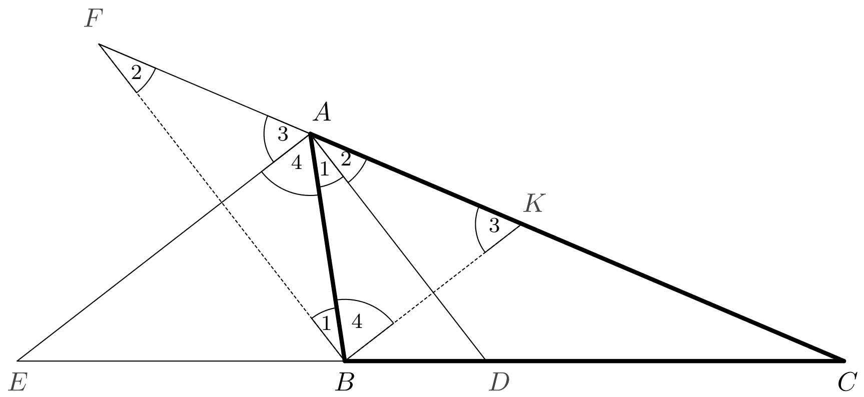
et on a

$$d_a'^2 = \frac{a^2 bc}{(b-c)^2} - bc \quad \text{et} \quad d'_a = \frac{b \sin C}{\sin \frac{|B-C|}{2}},$$

à condition que le triangle ne soit pas isocèle en A, auquel cas la bissectrice en question est parallèle à BC.

Bien sûr par permutation circulaire, le point (i) donne des résultats analogues pour les deux autres triplets de bissectrices.

2 Lemme. — *Les bissectrices d'un angle d'un triangle divisent le côté opposé en parties proportionnelles aux côtés adjacents.*



Preuve. — Soit AD le bissectrice intérieure de l'angle A et AE la bissectrice extérieure.

- Menons par B la parallèle BF à AD. Les angles $A_2 = A_1$ (bissectrice), $A_2 = F_2$ (angles correspondants) et $A_1 = B_1$ (angles alternes internes). Donc $F_2 = B_1$, le triangle AFB est isocèle et $AF = AB$.
  Considérons le triangle CBF et la parallèle DA au côté BF. Le théorème de Thalès donne $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AF}{AC}$ mais comme $AF = AB$ on en déduit
  $$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}.$$
- Menons par B la parallèle BK à AE. Comme précédemment on voit que $K_3 = B_4$, donc $AK = AB$. L'égalité $\dfrac{EB}{EC} = \dfrac{AK}{AC}$ donne donc
  $$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b},$$
  ce qu'il fallait établir. ■

Preuve (du théorème). — On notera que D est intérieur au segment BC et que E lui est extérieur. Par conséquent
$$-\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \frac{c}{b},$$
c'est dire que B, C, D, E est une division harmonique.
Remarquons qu'on a également $b\overline{DB} + c\overline{DC} = 0$ et $b\overline{EB} - c\overline{EC} = 0$.

(i) D'après ce qui précède
$$D = \mathrm{Bar}\{(B, b), (C, c)\}.$$
Par permutation circulaire les pieds des deux autres bissectrices intérieures sont barycentres de $(A, a), (B, b)$ et $(A, a), (C, c)$. Ainsi par associativité du barycentre les bissectrices intérieures sont concourantes en le barycentre de $(A, a), (B, b), (C, c)$.
De l'expression de D comme barycentre on déduit
$$(b + c)\overrightarrow{AD} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$$

d'où en mettant au carré

$$(b+c)^2AD^2 = (b+c)^2\overrightarrow{AD}^2 = b^2\overrightarrow{AB}^2 + 2bc\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + c^2\overrightarrow{AC}^2.$$

Or $\overrightarrow{AB}^2 = c^2$, $\overrightarrow{AC}^2 = b^2$ et

$$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{CB}^2 = c^2 + b^2 - a^2,$$

donc

$$(b+c)^2AD^2 = bc\left[bc + c^2 + b^2 - a^2 + bc\right] = bc(b+c)^2 - a^2bc,$$

ce qui donne l'expression voulue pour AD^2 après division par $(b+c)^2$.

La loi des sinus dans ADC s'écrit

$$\frac{AD}{\sin C} = \frac{AC}{\sin\widehat{CDA}}.$$

Or $\widehat{CDA} = \pi - C - \dfrac{A}{2} = \pi - C - \dfrac{\pi - B - C}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C-B}{2}$ donc $\sin\widehat{CDA} = \cos\dfrac{B-C}{2}$, d'où

$$AD = \frac{b\sin C}{\cos\frac{B-C}{2}}.$$

(ii) On sait que

$$E = \mathrm{Bar}\{(B,b),(C,-c)\}.$$

Par symétrie le pied de la bissectrice extérieure issue de B est barycentre de $(A,a),(C,-c)$, quant au pied de la bissectrice intérieure issue de C, il est barycentre de $(A,a),(B,b)$. Ces trois droites sont donc concourantes en le barycentre de $(A,a),(B,b),(C,-c)$.
En élevant au carré l'égalité $(b-c)\overrightarrow{AE} = b\overrightarrow{AB} - c\overrightarrow{AC}$ on parvient comme précédemment à

$$(b-c)^2AE^2 = a^2bc - bc(b-c)^2,$$

ce qui prouve la formule pour AE^2.

Pour la démonstration de la formule trigonométrique, envisageons deux cas.
– Supposons $B > C$. Alors E, B, C sont alignés dans cet ordre et la loi des sinus dans AEC donne

$$\frac{AE}{\sin\widehat{ACE}} = \frac{AC}{\sin\widehat{AEC}}$$

Mais $\widehat{ACE} = C$ et

$$\widehat{AEC} = \pi - C - \left(A + \frac{\pi - A}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - C - \frac{A}{2} = \frac{A+B+C}{2} - C - \frac{A}{2} = \frac{B-C}{2} \qquad (1)$$

d'où

$$AE = \frac{b\sin C}{\sin\frac{B-C}{2}}.$$

– Supposons $B < C$. Alors B, C, E sont alignés dans cet ordre donc $\widehat{ACE} = \pi - C$ et $\sin\widehat{ACE} = \sin C$. En permutant le rôle de B et C dans (1), on obtient $\widehat{AEC} = \dfrac{C-B}{2}$.

Les deux formules obtenues peuvent se regrouper en une seule : $AE = \dfrac{b\sin C}{\sin\frac{|B-C|}{2}}$. ∎

2 Théorème de Steiner-Lehmus généralisé

3 Théorème. — *Soit ABC un triangle.*

(i) Les bissectrices intérieures des angles A et B sont égales si et seulement si $a = b$.

(ii) Les bissectrices extérieures des angles A et B sont égales si et seulement si

$$a = b \quad ou \quad \sin^2 \frac{C}{2} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}.$$

(iii) La bissectrice intérieure de l'angle A et la bissectrice extérieure de l'angle B sont égales si et seulement si

$$\cos^2 \frac{C}{2} = \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}.$$

Preuve (algébrique). — (i) L'égalité $d_a = d_b$ se traduit par

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} \tag{2}$$

d'où

$$\begin{aligned}
d_a^2 - d_b^2 = 0 &\Leftrightarrow (b-a)c(b+c)^2(a+c)^2 - abc\left[a(a+c)^2 - b(b+c)^2\right] = 0\\
&\Leftrightarrow (b-a)c(a+bc+ac+c^2)^2 - abc\left[a^3 - b^3 + 2c(a^2-b^2) + c^2(a-b)\right] = 0\\
&\Leftrightarrow (b-a)c\left[(ab+2p)^2 + ab(a^2+ab+b^2+2ac+2bc+c^2)\right] = 0\\
&\Leftrightarrow (b-a)c\left\{(ab+2pc)^2 + ab\left[(2p)^2 - ab\right]\right\} = 0\\
&\Leftrightarrow (b-a)c\left(4abcp + 4p^2c^2 + 4abp^2\right) = 0,
\end{aligned}$$

et finalement

$$d_a^2 - d_b^2 = 0 \Leftrightarrow 4pc(b-a)(abc + pc^2 + abp) = 0. \tag{3}$$

On voit donc que l'égalité n'a lieu que si $a = b$.

(ii) L'égalité $d'_a = d'_b$ se traduit par

$$\frac{a^2bc}{(b-c)^2} - bc = \frac{ab^2c}{(a-c)^2} - ac. \tag{4}$$

C'est (2) dans laquelle on a remplacé c par $-c$. Soit x et y tels que

$$ab = x \quad \text{et} \quad a+b = c+2y. \tag{5}$$

L'équivalence (3) conduit à

$$d'_a = d'_b \Leftrightarrow 4cy(a-b)(-cx + yc^2 + xy) = 0.$$

Étudions la condition

$$xy + c^2y - cx = 0. \tag{$*$}$$

Comme $2p = a+b+c = 2c+2y$, on a $p = c+y$ puis

$$a+b = c+2y \Longleftrightarrow c-a = b-2y \Longleftrightarrow c-a+b = 2b-2y \Longleftrightarrow p-a = b-y.$$

Par symétrie en a et b, on trouve $p-b=a-y$. On retiendra donc

$$p=c+y\,; \quad p-a=b-y\,; \quad p-b=a-y \quad \text{et} \quad p-c=y \tag{6}$$

et en particulier la relation

$$(p-a)(p-b)=(b-y)(a-y)=ab-(c+2y)y+y^2=x-cy-y^2. \tag{7}$$

Rappelons que dans tout triangle les sinus des angles moitié s'expriment par

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

et les formules obtenues par permutation circulaire. La preuve en est fort simple :

$$\begin{aligned}2\sin^2\frac{C}{2}=1-\cos C=1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab}=\frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}\\ =\frac{(c-a+b)(c+a-b)}{2ab}=\frac{(2p-2a)(2p-2b)}{2ab}=2\,\frac{(p-a)(p-b)}{ab}.\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}\sin^4\frac{C}{2}=\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\iff\left(\frac{(p-a)(p-b)}{ab}\right)^2=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)^2}{abc^2}\\ \iff c^2(p-a)(p-b)=ab(p-c)^2.\end{aligned}$$

En utilisant (7), $p-c=y$ et $ab=x$,

$$\begin{aligned}c^2(p-a)(p-b)=ab(p-c)^2\iff c^2(x-cy-y^2)=xy^2\iff x(c^2-y^2)-c^2y(c+y)=0\\ \iff x(c-y)(c+y)-c^2y(c+y)=0\iff(c+y)(xc-xy-c^2y)=0\iff xy+c^2y-cx=0,\end{aligned}$$

on retrouve $(*)$ et l'équivalence annoncée est donc démontrée.

(iii) L'égalité $d_a=d'_b$ s'écrit

$$bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}=\frac{ab^2c}{(a-c)^2}-ac.$$

On constate qu'il suffit de changer b en $-b$ dans (4). Par conséquent

$$d_a=d'_b\Leftrightarrow 4cy(a+b)(xy+xc-yc^2)=0 \quad \text{où} \quad x=ab \text{ et } b+c=a+2y.$$

On a alors

$$p=a+y\,; \quad p-a=y\,; \quad p-b=c-y \quad \text{et} \quad p-c=b-y$$

d'où l'on déduit

$$p(p-c)=(a+y)(b-y)=ab+(b-a)y-y^2=x+(2y-c)y-y^2=x-cy+y^2.$$

Le cosinus de l'angle moitié est donné par

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

par conséquent

$$\cos^4\frac{C}{2} = \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2} \Longleftrightarrow \left(\frac{p(p-c)}{ab}\right)^2 = \frac{p(p-a)^2(p-c)}{abc^2} \Longleftrightarrow c^2p(p-c) = ab(p-a)^2$$
$$c^2(x-cy+y^2)-xy^2 = 0 \Longleftrightarrow x(c^2-y^2)-c^2y(c-y) \Longleftrightarrow (c-y)(cx+xy-c^2y) = 0.$$

Si l'on avait $y = c$, on aurait $b = a+c$, ce qui exclu, donc $c-y \neq 0$ et l'équivalence est établie. ■

La preuve trigonométrique repose sur des identités trigonométriques assez techniques regroupées dans le lemme suivant.

4 Lemme. — *Pour tous réels A, B, C tels que $A+B+C=\pi$ on a*
(a) $\sin B\sin\frac{A-C}{2} + \sin A\sin\frac{B-C}{2} = 2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} - \sin^2\frac{C}{2}\right)\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\right)$;
(b) $\sin B\sin\frac{A-C}{2} - \sin A\sin\frac{B-C}{2} = 2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}\right)\left(\sin\frac{A}{2}-\sin\frac{B}{2}\right)$;
(c) $\sin B\sin\frac{A-C}{2} + \sin A\cos\frac{B-C}{2} = -2\left(\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} - \cos^2\frac{C}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\right)$;
(d) $\sin B\sin\frac{A-C}{2} - \sin A\cos\frac{B-C}{2} = -2\left(\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{B}{2}\right)$;
(e) $\sin B\cos\frac{A-C}{2} - \sin A\cos\frac{B-C}{2} = 2\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{B}{2}\right)$.

Preuve. — On exprime en fonction des angles moitié :

$$\begin{aligned}\sin B\sin\frac{A-C}{2} + \sin A\sin\frac{B-C}{2} &= 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A-C}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}\\ &= 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{A-C}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\sin(x+y)\sin(x-y) &= \sin^2 x\cos^2 y - \sin^2 y\cos^2 x\\ &= \sin^2 x(1-\sin^2 y) - \sin^2 y(1-\sin^2 x) = \sin^2 x - \sin^2 y,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\sin B\sin\frac{A-C}{2} + \sin A\sin\frac{B-C}{2} &= 2\sin\frac{B}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{C}{2}\right) + 2\sin\frac{A}{2}\left(\sin^2\frac{B}{2} - \sin^2\frac{C}{2}\right)\\ &= 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\right) - 2\sin^2\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\right),\end{aligned}$$

ce qui prouve l'égalité (a).

Pour obtenir les quatre autres identités, il suffit de procéder aux changements de variables indiqués dans le tableau ci-dessous.

A	B	C	$\sin A$	$\sin B$	$\sin\frac{A-C}{2}$	$\sin\frac{B-C}{2}$	$\sin\frac{A}{2}$	$\sin\frac{B}{2}$	$\sin\frac{C}{2}$
$-A$	$2\pi-B$	$-C$	$-\sin A$	$-\sin B$	$-\sin\frac{A-C}{2}$	$\sin\frac{B-C}{2}$	$-\sin\frac{A}{2}$	$\sin\frac{B}{2}$	$-\sin\frac{C}{2}$
$\pi+A$	B	$C-\pi$	$-\sin A$	$\sin B$	$-\sin\frac{A-C}{2}$	$-\cos\frac{B-C}{2}$	$\cos\frac{A}{2}$	$\sin\frac{B}{2}$	$-\cos\frac{C}{2}$
$\pi-A$	$-B$	$\pi-C$	$\sin A$	$-\sin B$	$-\sin\frac{A-C}{2}$	$-\cos\frac{B-C}{2}$	$\cos\frac{A}{2}$	$-\sin\frac{B}{2}$	$\cos\frac{C}{2}$
$A-\pi$	$B+\pi$	C	$-\sin A$	$-\sin B$	$-\cos\frac{A-C}{2}$	$\cos\frac{B-C}{2}$	$-\cos\frac{A}{2}$	$\cos\frac{B}{2}$	$\sin\frac{C}{2}$

Par exemple l'identité (d) se déduit de (a) en remplaçant (A, B, C) par $(\pi - A, -B, \pi - C)$. Ceci est licite car la somme des arguments vaut π. ■

La preuve trigonométrique du théorème est maintenant très rapide.

Preuve (trigonométrique). — Grâce à la loi des sinus et le théorème 1, les longueurs des bissectrices sont :

$$d'_a = \frac{c \sin B}{\sin \frac{|B-C|}{2}} \quad \text{et} \quad d'_b = \frac{a \sin C}{\sin \frac{|A-C|}{2}} = \frac{c \sin A}{\sin \frac{|A-C|}{2}}.$$

et

$$d_a = \frac{b \sin C}{\cos \frac{B-C}{2}} = \frac{c \sin B}{\cos \frac{B-C}{2}} \quad \text{et} \quad d_b = \frac{a \sin C}{\cos \frac{A-C}{2}} = \frac{c \sin A}{\cos \frac{A-C}{2}}.$$

(i) Les bissectrices intérieures interceptent toujours le côté opposé. On a

$$d_a = d_b \iff \sin B \cos \frac{A-C}{2} = \sin A \cos \frac{B-C}{2},$$

donc l'égalité (e) du lemme 4 se réduit à

$$d_a = d_b \iff \cos \frac{A}{2} = \cos \frac{B}{2} \iff A = B,$$

ce qui revient à dire que ABC est isocèle en C.

(ii) Bien sûr ABC n'est isocèle ni en A ni en B sans quoi l'une des deux bissectrices extérieures considérée n'intercepterait pas le côté opposé. On a

$$d'_a = d'_b \iff \sin B \sin \frac{|A-C|}{2} = \sin A \sin \frac{|B-C|}{2}.$$

– Si $A - C$ et $B - C$ sont de signe contraire (c'est-à-dire si $A < C < B$ ou $B < C < A$), alors d'après l'égalité (a) du lemme 4,

$$d'_a = d'_b \iff \sin B \sin \frac{A-C}{2} + \sin A \sin \frac{B-C}{2} = 0 \iff \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} = 0$$

car $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} > 0$.

– Dans le cas contraire (c'est-à-dire si $A, B > C$ ou $A, B < C$), d'après (b)

$$d'_a = d'_b \iff \sin B \sin \frac{A-C}{2} - \sin A \sin \frac{B-C}{2} = 0 \iff \sin \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} \iff A = B$$

car $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} > 0$.

(iii) Le triangle n'est pas isocèle en B. L'égalité des bissectrices s'écrit

$$d_a = d'_b \iff \sin B \sin \frac{|A-C|}{2} = \sin A \cos \frac{B-C}{2}.$$

– Si $A < C$, l'égalité (c) du lemme montre que $d_a = d'_b \iff \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} - \cos^2 \frac{C}{2} = 0$.

– Si $A > C$, l'égalité (d) conduit à

$$d_a = d'_b \Longleftrightarrow \cos\frac{A}{2} = \sin\frac{B}{2} \Longleftrightarrow A + B = \pi,$$

prouvant ainsi que l'égalité des bissectrices ne peut avoir lieu dans ce cas. ∎

5 Théorème. — *Soit ABC un triangle non isocèle dont les bissectrices extérieures issues de A et B sont égales. On pose*

$$x = ab \quad \text{et} \quad y = p - c.$$

D'après la démonstration du théorème précédent, x, y et c satisfont

$$xy + c^2y - cx = 0. \tag{$*$}$$

En plus de l'égalité $\sin^2\frac{C}{2} = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$, on dispose alors des relations suivantes.

$$\sin\frac{C}{2} = \frac{y}{c}; \quad S = y^2\sqrt{\frac{c+y}{c-y}}; \quad R = \frac{c^3}{4y\sqrt{c^2-y^2}}; \quad r = \frac{y^2}{\sqrt{c^2-y^2}}; \quad r = 4R\sin^3\frac{C}{2}.$$

De plus $C \leqslant 60°$, et si I désigne le centre du cercle inscrit

$$CI^2 = AI \cdot BI.$$

Preuve. — Notons que $y \neq c$, car sinon $(*)$ impliquerait $c^3 = 0$. Ainsi $(*)$ se peut se réécrire

$$x = \frac{c^2y}{c-y} \tag{$**$}$$

On a alors d'après (7),

$$(p-a)(p-b) = \frac{c^2y}{c-y} - cy - y^2 = \frac{c^2y - (cy+y^2)(c-y)}{c-y} = \frac{y^3}{c-y}.$$

On obtient

$$\sin^2\frac{C}{2} = \frac{(p-a)(p-b)}{ab} = \frac{y^3}{x(c-y)}.$$

Mais la condition $(*)$ équivaut à $x(c-y) = c^2y$, donc $\sin^2\frac{C}{2} = \frac{y^2}{c^2}$ et

$$\boxed{\sin\frac{C}{2} = \frac{y}{c}} \tag{8}$$

On en déduit

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = (c+y)\,\frac{y^3}{c-y}\,y = \frac{y^4(c+y)}{c-y},$$

d'où l'aire du triangle :

$$\boxed{S = y^2\sqrt{\frac{c+y}{c-y}}}$$

La formule $R = \dfrac{abc}{4S}$ implique

$$R = \frac{xc}{4}\frac{1}{y^2}\sqrt{\frac{c-y}{c+y}} = \frac{c^2y}{c-y}\frac{c}{4y^2}\sqrt{\frac{c-y}{c+y}}$$

et donc

$$\boxed{R = \frac{c^3}{4y\sqrt{c^2-y^2}}} \tag{9}$$

L'égalité $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{S}{c+y}$ donne

$$\boxed{r = \frac{y^2}{\sqrt{c^2-y^2}}} \tag{10}$$

La formule de transformation $2\sin p \sin q = \cos(p-q) - \cos(p+q)$ appliquée à $\sin^2\dfrac{C}{2} = \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}$ donne

$$2\sin^2\frac{C}{2} = \cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}.$$

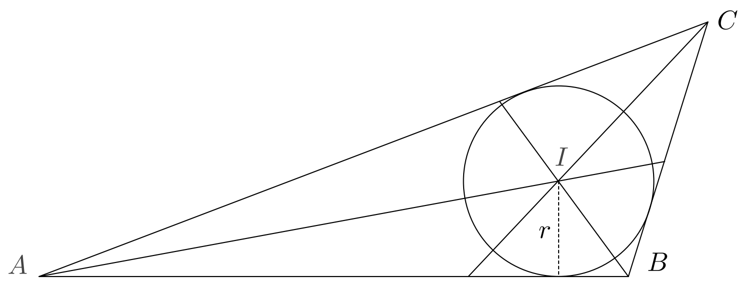
Mais $\cos\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{\pi-C}{2} = \sin\dfrac{C}{2}$ donc

$$2\sin^2\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A-B}{2}. \tag{11}$$

Le cosinus devant être inférieur ou égal à 1, on en déduit que $\sin\dfrac{C}{2}$ satisfait l'inéquation

$$2X^2 + X - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow (2X-1)(X+1) \leqslant 0$$

d'où $\sin\dfrac{C}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}$, puis $\dfrac{C}{2} \leqslant 30°$ et donc $\boxed{C \leqslant 60°}$.



Comme $\sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{r}{AI}$, la relation $\sin^2\dfrac{C}{2} = \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}$ peut s'interpréter ainsi :

$$\boxed{CI^2 = AI \cdot BI}$$

Enfin divisant membre à membre (9) et (10) on obtient $\dfrac{r}{R} = 4\dfrac{y^3}{c^3}$ et

$$\boxed{r = 4R\sin^3\frac{C}{2}}.$$

L'ensemble des formules est établi. ■

6 Remarque. — Cette dernière formule se déduit également d'une relation valable dans tout triangle, à savoir

$$r = 4R \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Par ailleurs $\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{2}$ équivaut toujours d'après cette égalité à $r \leqslant \frac{R}{2}$, inégalité qui est satisfaite dans tout triangle d'après la formule d'Euler

$$OI^2 = R(R-2r)$$

où O désigne le centre du cercle circonscrit.

7 Exemple. — Exhibons à présent un exemple simple de triangle ayant deux bissectrices extérieures de même longueur. On prend $\sin\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Alors

$$\cos C = 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

puis

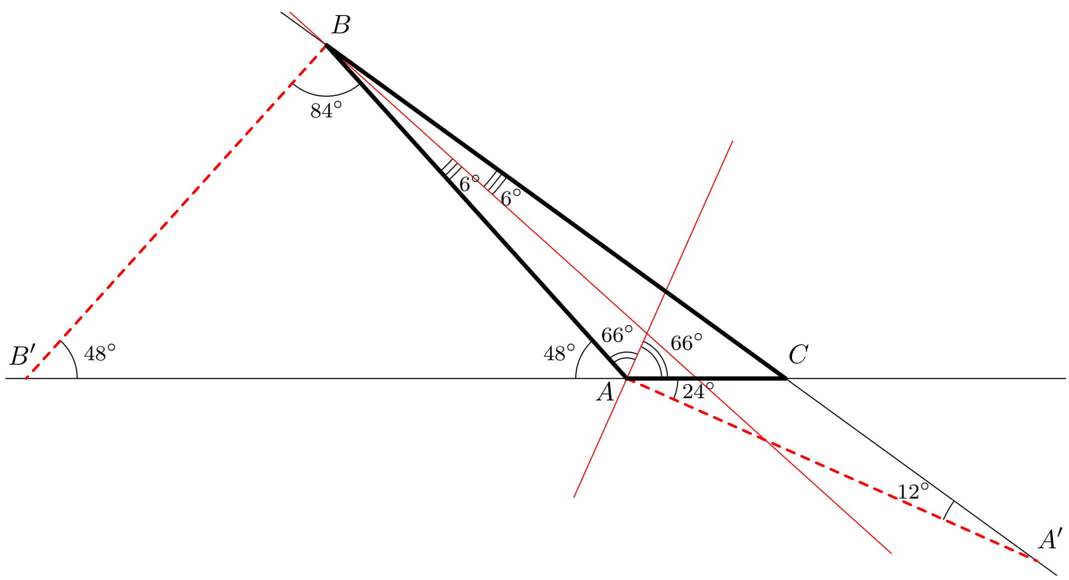
$$\cos 2C = 2\cos^2 C - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Ainsi $\cos 2C = \sin\frac{C}{2} = \cos\frac{\pi - C}{2}$, donc $2C = \pm\frac{\pi - C}{2} + 2k\pi$. Il est immédiat de constater que la seule seule solution sur $]0;\pi[$ est $C = \frac{\pi}{5}$. On retrouve l'égalité bien connue $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.
D'après (11),

$$\cos\frac{A-B}{2} = 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{2}$$

donc $\frac{A-B}{2} = \pm\frac{\pi}{3}$. Pour une raison de symétrie on peut supposer $A > B$, on en déduit donc $A - B = \frac{2\pi}{3}$. Mais $A + B = \pi - C = \frac{4\pi}{5}$, donc $A = \frac{11\pi}{15}$ et $B = \frac{\pi}{15}$.
Ce triangle a donc pour angles

$$\boxed{A = 132°,\ B = 12° \text{ et } C = 36°}$$



Il est élémentaire de vérifier que l'on $AA' = BB' = AB$ en montrant que ABA' et ABB' sont isocèles en A et B respectivement. Ceci est laissé au lecteur.

Terminons par l'analogue du théorème 5.

8 Théorème. — *Soit ABC un triangle dont la bissectrice intérieure issues de A et la bissectrice extérieure issue de B sont égales. On pose*

$$x = ab \quad \textit{et} \quad y = p - a.$$

D'après la démonstration du théorème précédent, x, y et c satisfont

$$xy + xc - yc^2 = 0.$$

On dispose alors des relations suivantes.

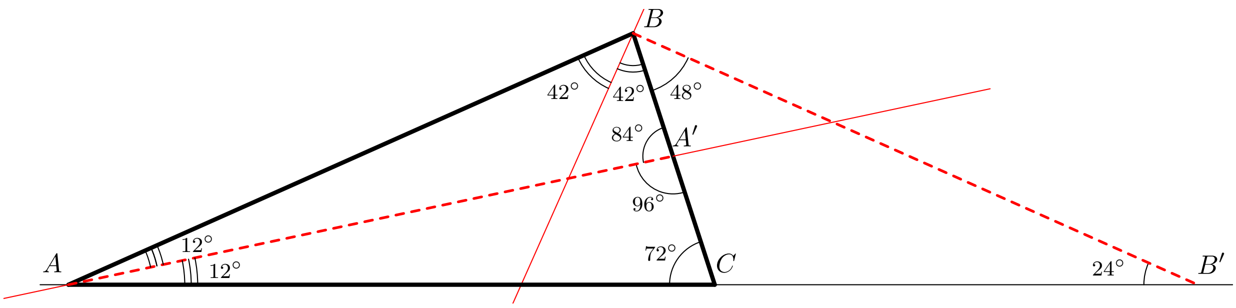
$$\cos\frac{C}{2} = \frac{y}{c}\,; \quad S = y^2\sqrt{\frac{c-y}{c+y}}\,; \quad r_b = 4R\sin^3\frac{C}{2}$$

où r_b désigne le rayon du cercle inscrit dans l'angle B.

9 Exemple. — On vérifie aisément que dans le triangle d'angles

$$\boxed{A = 24°,\ B = 84° \ \text{ et } \ C = 72°}$$

la bissectrice intérieure issue de A est égale à la bissectrice extérieure issue de B. Comme dans le précédent exemple on a de plus $AA' = BB' = AB$.



Références

[Cox67] H. S. M. Coxeter et S. L. Greitzer, *Geometry revisited.* The Mathematical Association of America (1967).

[Haj01] Mowaffaq Hajja, *Other Versions of the Steiner-Lehmus Theorem.* The American Mathematical Monthly, Vol. 108, No. 8 (Oct., 2001), pp. 760-767.

[Mai52] Roland Maillard et Albert Millet. *Trigonométrie, classe de mathématiques.* Librairie Hachette (1952).

[Ola09] Róbert Oláh-Gál et József Sándor. *On Trigonometric Proofs of the Steiner-Lehmus Theorem.* Forum Geometricorum, Volume 9 (2009) 155–160.