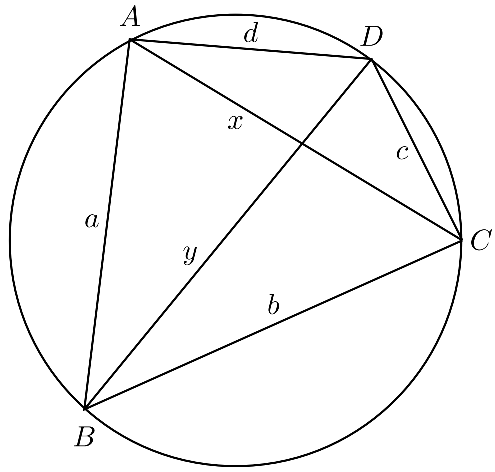
Sur le quadrilatère inscriptible

Gilles Auriol - auriolg@free.fr
http ://auriolg.free.fr

Par 1, 2 ou 3 points on peut toujours faire passer un cercle, autrement dit on peut toujours inscrire dans un cercle un point, un bipoint ou un triangle, ce qui n'est pas le cas, en général, du quadrilatère.
Dans cet article, on propose de calculer quelques grandeurs du quadrilatère convexe (inscriptible (diagonales, aire, rayon du cercle inscrit) et de démontrer une condition nécessaire et suffisante (abrégé en CNS dans la suite) portant sur les longueurs des côtés d'un quadrilatère pour que celui soit inscriptible.
Dans la suite, on parlera de quadrilatère pour quadrilatère convexe.

On considère un quadrilatère $ABCD$ d'aire S inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R. On pose

$$\left\{\begin{array}{lcl} a &=& AB \\ b &=& BC \\ c &=& CD \\ d &=& DA \\ x &=& AC \\ y &=& BD \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} \alpha &=& (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \\ \beta &=& (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) \\ \gamma &=& (\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}}) \\ \delta &=& (\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}}) \end{array}\right.$$



► Dans le premier paragraphe, on va chercher une relation liant les longueurs des diagonales avec celle des côtés.

1 Égalité de Ptolémée

1.1 Première démonstration : grâce au théorème de d'Al-Kashi

Nous suivons le raisonnement de Galois, voir [AZB97] pp.455-456.
Le théorème de d'Al-Kashi permet d'écrire

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\widehat{D} \quad \mathbf{[1]} \\ x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{B} \quad \mathbf{[2]} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} y^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\widehat{A} \quad \mathbf{[1']} \\ y^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{C} \quad \mathbf{[2']} \end{array}\right. .$$

En multipliant respectivement [1], [2], [1'] et [2'] par ab, cd, bc et ad et en remarquant que $\cos\widehat{B} = -\cos\widehat{D}$ (resp. $\cos\widehat{C} = -\cos\widehat{A}$) puisque les angles $\widehat{D}$ et $\widehat{B}$ sont supplémentaires (resp. $\widehat{C}$ et $\widehat{A}$),

$$\left\{\begin{array}{l} abx^2 = abc^2 + abd^2 - 2abcd\cos\widehat{D} \\ cdx^2 = cda^2 + cdb^2 + 2acbd\cos\widehat{D} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} bcy^2 = bca^2 + bcd^2 - 2abcd\cos\widehat{A} \\ ady^2 = adb^2 + adc^2 + 2abcd\cos\widehat{A} \end{array}\right.$$

en faisant la somme des deux équations de chacune des accolades :

$$(ab+cd)x^2 = abd^2 + abc^2 + cda^2 + cdb^2 = (ac+bd)(ad+bc) \iff \boxed{x^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$$

$$(ad+bc)y^2 = bca^2 + bcd^2 + adb^2 + adc^2 = (ac+bd)(ab+cd) \iff \boxed{y^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$$

Faisons le produit des expressions de x^2 et y^2 encadrées ci-dessus pour obtenir le sens direct du théorème de PTOLÉMÉE (voir paragraphe 3)

$$x^2y^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)(ac+bd)(ab+cd)}{(ab+cd)(ad+bc)} = (ac+bd)^2 \iff \boxed{xy = ac+bd}$$

Le quotient a une forme également simple ; par division :

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} \times \frac{ad+bc}{(ac+bd)(ab+cd)} = \frac{(ad+bc)^2}{(ab+cd)^2} \iff \boxed{\frac{x}{y} = \frac{ad+bc}{ab+cd}}$$

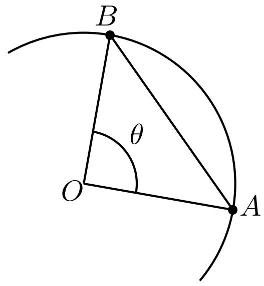
1.2 Deuxième démonstration : à l'aide d'un lemme géométrique

Lemme. La longueur d'une corde d'un cercle de rayon R sous-tendue par un angle θ est égale à $2R\sin\dfrac{\theta}{2}$.

Démonstration. La relation d'Al-Kashi appliquée au triangle AOB donne

$$\begin{aligned} AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2OA \times OB\cos\theta \\ &= 2R^2 - 2R^2\cos\theta \\ &= 2R^2(1-\cos\theta) \\ &= 2R^2\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

d'où $AB = 2R\sin\dfrac{\theta}{2}$ car $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ implique $\sin\dfrac{\theta}{2} \geqslant 0$. □



Passons à la démonstration de l'égalité de Ptolémée. La diagonale $[BD]$ est sous-tendue par l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}) = \beta + \gamma$ et la diagonale $[AC]$ par l'angle $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = \gamma + \delta$, donc d'après le lemme

$$\begin{aligned} xy &= 4R^2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\delta}{2} \\ &= 2R^2\left(\cos\frac{\beta-\delta}{2} - \cos\frac{\beta+\gamma+\delta+\gamma}{2}\right) \\ &= 2R^2\left(\cos\frac{\beta-\delta}{2} - \cos\frac{2\pi-\alpha+\gamma}{2}\right) \\ &= 2R^2\left(\cos\frac{\beta-\delta}{2} + \cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\right) \end{aligned}$$

et d'autre part, en appliquant la relation $\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$,

$$\begin{aligned} ac+bd &= 4R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\delta}{2}\right) \\ &= 2R^2\left(\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} + \cos\frac{\beta-\delta}{2} - \cos\frac{\alpha+\gamma}{2} - \cos\frac{\beta+\delta}{2}\right) \\ &= 2R^2\left(\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} + \cos\frac{\beta-\delta}{2}\right) \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant du fait que les angles $\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$ et $\dfrac{\beta+\delta}{2}$ sont supplémentaires ($\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2\pi$), donc que leur cosinus sont opposés. On en tire bien $\boxed{xy = ac+bd}$.

Raisonnons avec les aires pour ce qui est du quotient de x et y :

$$S = \text{Aire}(ABC) + \text{Aire}(ADC) = \text{Aire}(ADB) + \text{Aire}(BCD) \iff \frac{abx}{4R} + \frac{cdx}{4R} = \frac{ady}{4R} + \frac{bcy}{4R}$$

on en déduit, $abx+cdx = ady+bcy$, c'est-à-dire $(ab+cd)x = (ad+bc)y$ d'où $\boxed{\dfrac{x}{y} = \dfrac{ad+bc}{ab+cd}}$ par division.

Notons qu'on a aussi $S = \dfrac{(ab+cd)x}{4R}$ **[3]** ; nous nous en servirons plus loin.

Remarque. On peut retrouver les expressions de x^2 et y^2 grâce à ces deux formules (établies sans en connaître les valeurs, sinon on tourne en rond !),

$$x^2 = xy \times \frac{x}{y} = (ac+bd) \times \frac{ad+bc}{ab+cd} \quad \text{et} \quad y^2 = xy \times \frac{y}{x} = (ac+bd) \times \frac{ab+cd}{ad+bc}.$$

► Maintenant que nous avons les longueurs des diagonales, intéressons-nous à l'aire du quadrilatère inscriptbible, ainsi qu'au rayon du cercle dans lequel il est inscrit.

2 Autour de la formule de Brahmagupta

D'après [1] et [2],

$$c^2 + d^2 - 2cd\cos\widehat{D} = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{B} \iff a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab\cos\widehat{B} - cd\cos\widehat{D}).$$

Mais $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ sont supplémentaires, donc $\cos\widehat{D} = -\cos\widehat{B}$. L'égalité ci-dessus devient

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab+cd)\cos\widehat{B} \iff \cos\widehat{B} = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}.$$

On en déduit

$$\sin^2\widehat{B} = 1 - \cos^2\widehat{B} = \frac{[2(ab+cd)]^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(ab+cd)^2},$$

et en factorisant,

$$\begin{aligned}
\sin^2\widehat{B} &= \frac{(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)}{4(ab+cd)^2} \\
&= \frac{\left[(c+d)^2-(a-b)^2\right]\left[(a+b)^2-(c-d)^2\right]}{4(ab+cd)^2} \\
&= \frac{(c+d-a+b)(c+d+a-b)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{4(ab+cd)^2}.
\end{aligned}$$

En posant $2p = a+b+c+d$, l'écriture devient plus agréable :

$$\sin^2\widehat{B} = \frac{(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)(2p-2d)}{4(ab+cd)^2} = \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{(ab+cd)^2}.$$

Comme $0 \leqslant \widehat{B} \leqslant \pi$, $\sin\widehat{B} \geqslant 0$ et

$$\boxed{\sin\widehat{B} = \frac{2}{ab+cd}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}.$$

Mais, les sinus de $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ étant égaux,

$$S = \text{Aire}(ABC) + \text{Aire}(ACD) = \frac{1}{2}\,ab\sin\widehat{B} + \frac{1}{2}\,cd\sin\widehat{D} = \frac{1}{2}\,(ab+cd)\sin\widehat{B}$$

et en remplaçant $\sin\widehat{B}$ par sa valeur, on obtient la formule de Brahmagupta :

$$\boxed{S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}.$$

Remarque 1. La formule de Héron n'est qu'un cas particulier de celle de Brahmagupta. En effet, en faisant, par exemple, $d = 0$, le quadrilatère devient un triangle. Or tout triangle est inscriptible dans un cercle.

Remarque 2. D'après [3] (partie 1.2), $R = \dfrac{(ab+cd)x}{4S}$. En élevant au carré et en remplaçant x^2 par la valeur trouvée dans la partie 1.1,

$$R^2 = \frac{(ab+cd)^2x^2}{16S^2} = \frac{(ab+cd)^2(ac+bd)(ad+bc)}{16S^2(ab+cd)} = \frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{16S^2}.$$

► Après quelques calculs de grandeur dans le quadrilatère inscriptible, il reste à voir une CNS pour savoir si un quadrilatère peut être inscrit dans un cercle, c'est l'objet du paragraphe suivant.

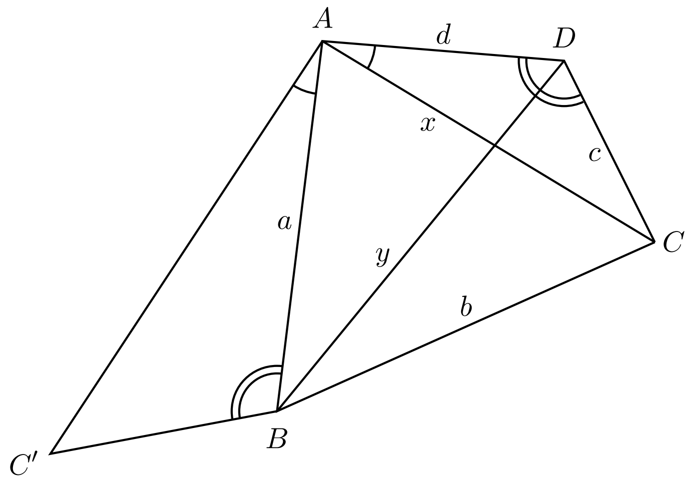
3 Théorème de Ptolémée

Théorème. *Le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible si et seulement si $xy = ac + bd$.*

Nous avons déjà montré le sens direct dans le premier paragraphe ; nous allons recommencer avec un raisonnement totalement différent.

3.1 Démonstration géométrique

Nous suivons [Lav98] pp.206-207.
On se donne un quadrilatère (convexe) $ABCD$. Soit le point C' tel que le triangle $AC'B$ soit extérieur au quadrilatère, avec $\widehat{C'AB} = \widehat{CAD}$ et $\widehat{C'BA} = \widehat{ADC}$.



Le triangle ABC' est semblable à ADC, donc $\dfrac{AC'}{x} = \dfrac{a}{d} = \dfrac{C'B}{c}$, d'où $C'B = \dfrac{ac}{d}$.
On a $\widehat{C'AC} = \widehat{BAD}$ et $\dfrac{AC'}{x} = \dfrac{a}{d}$, donc le triangle $C'AC$ est semblable à BAD, d'où $\dfrac{C'C}{y} = \dfrac{x}{d}$, c'est-à-dire $C'C = \dfrac{xy}{d}$.
L'inégalité triangulaire dans BCC' donne

$$CC' \leqslant C'B + BC \iff \frac{xy}{d} \leqslant \frac{ac}{d} + b \iff xy \leqslant ac + bd$$

L'égalité $xy = ac + bd$ aura lieu si et seulement si $CC' = C'B + BC$, or

$$\begin{aligned} CC' = C'B + BC &\iff C', B, C \text{ sont alignés} \\ &\iff \widehat{ABC'} + \widehat{CBA} = \pi \\ &\iff \widehat{ADC} + \widehat{CBA} = \pi \\ &\iff ABCD \text{ est inscriptible.} \end{aligned}$$

3.2 Démonstration grâce aux nombres complexes

On se place dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct.
Abandonnons les notations de l'introduction. Ici a, b, c et d désigneront les affixes respectives des points A, B, C et D. On note $[a,b,c,d] = \dfrac{a-c}{b-c} : \dfrac{a-d}{b-d}$ et on suppose les points A, B, C, D distincts.
Proposition. Quatre points d'affixe a, b, c et d sont cocycliques ou alignés si et seulement si le birapport $[a,b,c,d]$ est réel et ils sont cocycliques si et seulement si ce birapport est strictement supérieur à 1.

Démonstration. Voir [Lad02] p.188. □

Une simple vérification permet d'établir l'égalité

$$(c-a)(d-b) = (b-a)(d-c) + (d-a)(c-b)$$

d'où, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$|(c-a)|\,|(d-b)| \leqslant |b-a|\,|d-c| + |d-a|\,|c-b| \quad \text{soit} \quad AC.BD \leqslant AB.CD + AD.BC$$

et l'égalité aura lieu si et seulement si l'inégalité triangulaire est une égalité, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $(b-a)(d-c) = \lambda(d-a)(c-b)$ ou bien si $(d-a)(c-b) = 0$. Le cas $\lambda = 0$ ne peut avoir lieu, sinon $a = b$ ou $c = d$, ce qui contredirait l'hypothèse $a \neq b \neq c \neq d$. De même le cas $(d-a)(c-b) = 0$ est impossible. Donc l'égalité aura lieu si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$(b-a)(d-c) = \lambda(d-a)(c-b) \quad \iff \quad \frac{b-a}{d-a} : \frac{b-c}{d-c} = -\lambda \quad \iff \quad [b,d,a,c] \in \mathbb{R}_-.$$

On vérifie que $[b,d,a,c] = 1 - [a,b,c,d]$, donc $[b,d,a,c]$ est un réel négatif non nul si et seulement si $[a,b,c,d] > 1$ ce qui équivaut à A, B, C et D cocycliques d'après la proposition.

On peut également démontrer ce théorème grâce à une inversion, voir par exemple [Lad02] p.344 ou [Lav98] p.208.

► On vient d'établir une CNS pour qu'un quadrilatère soit inscriptible dans un cercle. On peut s'amuser à trouver d'autres CNS, par exemple pour qu'un quadrilatère inscrit dans une conique soit inscriptible dans un cercle. Dans le cas d'une ellipse, on obtient un théorème de Joachimsthal, voir [Cos03].

Références

[AZB97] Azra J.-P., Bourgne R., *Évariste Galois, Écrits et mémoires mathématiques.* Jacques Gabay, 1997.

[Cos03] Costantini G., *Un théorème de Joachimsthal.* 2003. Disponible sur internet à l'adresse `http://perso.wanadoo.fr/gilles.costantini/agreg_fichiers/themes_fichiers/joachimsthal.pdf`

[Lad02] Ladegaillerie Y., *Géométrie pour le capes.* Ellipses, 2002.

[Lav98] Laville G., *Géométrie pour le capes et l'agrégation.* Ellipses, 1998.

[Ter95] Terracher P.-H., *Mathématiques Première S, Géométrie.* Hachette Éducation, 1995.

Merci aux intervenants du forum `http://www.les-mathematiques.net`.