Automatismes : proportions et évolutions

1. Proportion

Définition. *Soit E un ensemble de référence non vide et n_E le nombre d'éléments de E.*
Soit F un sous-ensemble (ou encore « une partie ») de E comportant n_F éléments.
La proportion de F dans E est le réel défini par $\frac{n_F}{n_E}$.

Exemple

Dans un lycée de 1500 élèves, 652 d'entre eux sont demi-pensionnaires. La proportion de demi-pensionnaires au sein du lycée est donc de $\frac{652}{1500} \approx 0{,}43 \approx 43\ \%$.

Remarque. Une proportion est toujours comprise entre 0 et 1 (entre 0 % et 100 %).

Théorème. Soit E un ensemble de référence non vide, F une partie de E non vide et G une partie de F.
Si p_1 est la proportion de F dans E et p_2 la proportion de G dans F, alors la proportion de G dans E est $p = p_1 \times p_2$.

Démonstration. En notant n_E, n_F et n_G le nombre d'éléments respectif de E, F et G, on a $p_1 = \frac{n_F}{n_E}$, $p_2 = \frac{n_G}{n_F}$ et $p = \frac{n_G}{n_E}$. Ainsi $p_1 \times p_2 = \frac{n_F}{n_E} \times \frac{n_G}{n_F} = \frac{n_G}{n_E} = p$. ■

Exemple

Dans une classe, 60 % des élèves pratiquent un sport. Parmi ces élèves, 40 % sont des garçons. La proportion de garçons pratiquant un sport dans la classe est donc

$$0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24 = 24\ \%.$$

2. Évolutions

Définition. *Une évolution est le passage d'une valeur numérique initiale V_i (supposée différente de 0) à une valeur finale V_f.*
La variation absolue de cette évolution est $V_f - V_i$.

$$\boxed{V_i} \longrightarrow \boxed{V_f}$$

Exemple

En novembre 2015, le prix d'un litre de gasoil était en moyenne de 1,10 €, tandis qu'en juin 2019 il était de 1,41 €.

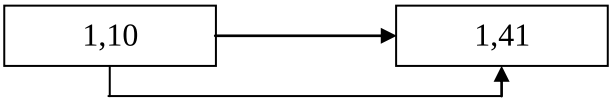
$$\boxed{1{,}10} \longrightarrow \boxed{1{,}41}$$

Le prix du gasoil a donc subi une évolution de $V_i = 1{,}10$ à $V_f = 1{,}41$.
La variation absolue de cette évolution est $1{,}41 - 1{,}10 = 0{,}31$ €.

Définition. *Le <u>coefficient multiplicateur</u> d'une évolution, noté* CM, *est donné par* $\boxed{\mathrm{CM} = \frac{V_f}{V_i}}$.
On a donc également $\boxed{V_f = \mathrm{CM} \times V_i}$.

<u>Exemple</u>

Le coefficient multiplicateur de l'évolution du prix du gasoil est $\mathrm{CM} = \frac{1{,}41}{1{,}10} \approx 1{,}282$.
Cela signifie simplement que le prix a été multiplié par 1,282.



Remarque.
- Un coefficient multiplicateur supérieur à 1 correspond à une augmentation ;
- un coefficient multiplicateur inférieur à 1 correspond à une diminution.

Considérons à présent une valeur initiale V_i qui augmente d'un taux t et appelons V_f la valeur finale ainsi obtenue. On a donc

$$V_f = V_i + \underbrace{t \times V_i}_{\text{part d'augmentation}} = \underbrace{(1+t)}_{\mathrm{CM}} \times V_i.$$

Puisque $V_f = \mathrm{CM} \times V_i$, on conclut que $\mathrm{CM} = 1 + t$.

Théorème. Considérons une valeur initiale V_i qui subit une évolution d'un taux t, et soit V_f la valeur finale obtenue. On a les formules

$$\boxed{\mathrm{CM} = 1 + t} \quad \text{et} \quad \boxed{t = \mathrm{CM} - 1 = \frac{V_f}{V_i} - 1}$$

<u>Exemple</u>

Le taux d'évolution du gasoil est

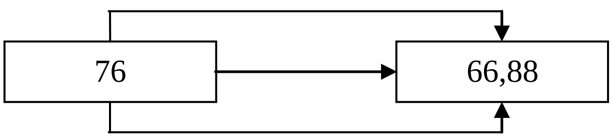
$$t = \mathrm{CM} - 1 = 1{,}282 - 1 = 0{,}282 = 28{,}2\ \%.$$

Il a subi une augmentation de 28,2 %.

Remarque.
- Un taux d'évolution positif correspond à une augmentation ;
- un taux d'évolution négatif correspond à une diminution.

<u>Exemple</u>

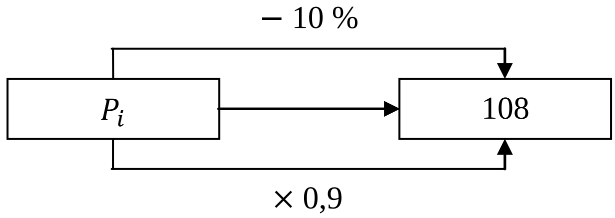
Un article à 76 € est soldé de 12 %. Le taux d'évolution est donc $t = -12\ \% = -0{,}12$, le coefficient multiplicateur est $\mathrm{CM} = 1 + t = 1 + (-0{,}12) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$.
Ainsi le prix remisé est $76 \times \mathrm{CM} = 66{,}88$ €.



Définition. *Le taux d'une évolution s'appelle aussi sa <u>variation relative</u>.*

Exemple

Lors du recensement d'un village, on constate que la population est égale à 108 habitants, soit 10 % de moins que lors du précédent recensement.



Le taux d'évolution du nombre d'habitants de ce village est $t = -10\ \% = -0{,}1$, donc le coefficient multiplicateur de l'évolution est $\mathrm{CM} = 1 + t = 0{,}9$.
Si l'on appelle P_i le nombre d'habitants lors du précédent recensement, on a l'équation $0{,}9 \times P_i = 108$. On en déduit que $P_i = \frac{108}{0{,}9} = 120$ habitants.

Remarque. Une hausse suivie d'une baisse d'un même taux ne se compensent pas.
Par exemple si l'on applique à 100 une augmentation de 10 % suivie d'une diminution de 10 % on obtient $100 \times 1{,}1 \times 0{,}9 = 99$ et non 100.

3. Indice de base 100

Lorsqu'on a un tableau de données, il est fréquent d'utiliser l'indice de base 100 pour les comparer.
On attribue « l'indice 100 » à l'une des données, puis on calcule les autres indices par proportionnalité, à l'aide par exemple du produit en croix.

Exemple

Voici le prix du gasoil au 1er janvier des années 2017 à 2021. On choisit comme année de référence 2019. L'indice en 2021 est par exemple $\frac{100 \times 1{,}302}{1{,}399} \approx 93{,}1$.

Année	2017	2018	2019	2020	2021
Prix en euros	1,278	1,399	1,399	1,500	1,302
Indice de base 100 en euros	91,4	100	**100**	107,2	93,1

4. Évolutions successives

Théorème. Si une quantité subit des évolutions successives, le coefficient multiplicateur global est le produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution.

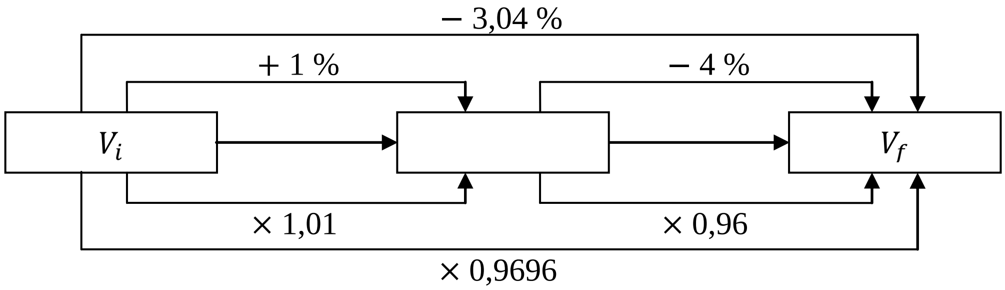
Démonstration. Soit CM_1 et CM_2 les taux d'évolution des deux évolutions. Soit V_i la valeur initiale de la grandeur, V' la valeur après la première augmentation et V_f la valeur après la seconde évolution. On a donc $V' = \mathrm{CM}_1 \times V_i$ et $V_f = \mathrm{CM}_2 \times V'$.
On en déduit

$$V_f = \mathrm{CM}_2 \times V' = \mathrm{CM}_2 \times \mathrm{CM}_1 \times V_i = \underbrace{\mathrm{CM}_2 \times \mathrm{CM}_1}_{=\mathrm{CM}_g} \times V_i,$$

ce qui montre que le coefficient multiplicateur CM_g de l'évolution globale est $\mathrm{CM}_1 \times \mathrm{CM}_2$. ■

<u>Exemple</u>

Une action cotée en bourse a augmenté de 1 % un jour, puis diminué de 4 % le lendemain.
Les évolutions ont pour coefficient multiplicateur $1 + \frac{1}{100} = 1{,}01$ et $1 - \frac{4}{100} = 0{,}96$.



donc l'évolution globale a pour coefficient multiplicateur $1{,}01 \times 0{,}96 = 0{,}9696$, ce qui correspond à un taux de $0{,}9696 - 1 = -0{,}0304 = -3{,}04$ %.
Ainsi sur deux jours, l'action a diminué de 3,04 %.

Remarque importante. Comme on le constate sur l'exemple précédent, les taux ne s'ajoutent pas lors d'évolutions successives ! Ce sont les taux qui se multiplient.

<u>Exemple</u>

Le prix du baril de pétrole a augmenté de 1 % pendant 4 jours.
L'évolution journalière a pour coefficient multiplicateur $1 + \frac{1}{100} = 1{,}01$ donc l'évolution globale a pour coefficient multiplicateur $1{,}01^4 \approx 1{,}0406$, d'où un taux égal à 4,06 %.

5. Évolution réciproque

Définition. *L'<u>évolution réciproque</u> d'une évolution de la valeur V_i à la valeur V_f est l'évolution de la valeur V_f à la valeur V_i.*

Théorème. Les coefficients multiplicateurs de deux évolutions réciproques sont l'inverses l'un de l'autre.

Démonstration. Soit CM le coefficient multiplicateur de l'évolution de V_i à V_f. On a donc $V_f = \mathrm{CM} \times V_i$ d'où $V_i = \frac{1}{\mathrm{CM}} \times V_f$, ce qui démontre que le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est $\frac{1}{\mathrm{CM}}$. ■

<u>Exemple</u>

Le chiffre d'affaire d'une entreprise a diminué de 20 %.
Le coefficient multiplicateur de cette évolution est $1 - \frac{20}{100} = 0{,}8$ donc l'évolution réciproque a pour coefficient multiplicateur $\frac{1}{0{,}8} = 1{,}25$, ce qui correspond à taux de 25 %
Ainsi, pour que le chiffre d'affaire reprenne sa valeur initiale, celui-ci doit augmenter de 25 %