Probabilités conditionnelles

1. Tableaux d'effectifs et de fréquences

❖ Tableau d'effectif

Le tableau suivant résume la répartition des élèves de première d'un lycée en fonction de leur sexe et de leur langue vivante A.

Y = langue / X = sexe	y_1 = allemand	y_2 = anglais	y_3 = espagnol	Total
x_1 = fille	20	70	30	
x_2 = garçon	10	40	30	
Total				

Ce tableau donne des informations sur deux <u>caractères</u> : le sexe X et la langue Y. On parle d'une <u>série à deux variables</u>.
Le caractère X a deux valeurs possibles : x_1 = file et x_2 = garçon.
Le caractère Y a trois valeurs possibles : y_1 = allemand, y_2 = anglais et y_3 = espagnol.
L'effectif total est noté N.
On note n_{ij} l'effetif des individus possédant les caractères x_i et y_j.
Les effectifs de chacun des caractères s'appelent les <u>effectifs marginaux</u>.

- Le nombre de filles faisant espagnol est
- Le nombre de garçons faisant allemand est
- x_{12} est le nombre de
- L'effectif marginal de x_1 est
- L'effectif marginal de y_3 est
- Le nombre d'élèves faisant allemand est
- L'effectif total est

❖ Tableau des fréquences par rapport à l'effectif total

La fréquence de filles faisant anglais est

En effectuant tous les calculs, on obtient le tableau des fréquences suivants.

Y = langue / X = sexe	y_1 = allemand	y_2 = anglais	y_3 = espagnol	Total
x_1 = fille				
x_2 = garçon				
Total				

- **Tableau des fréquences conditionnelles**

En fixant une valeur de l'un des deux caractères, on obtient une série à une variable. On peut alors calculer des fréquences conditionnelles par rapport au caractère fixé.

Par exemple, voici le tableau des fréquences conditionnelles de Y par rapport à $x_1 =$ filles.

$Y =$ langue	$y_1 =$ allemand	$y_2 =$ anglais	$y_3 =$ espagnol	Total
$x_1 =$ fille				

Le tableau des fréquences conditionnelles de X par rapport à $y_3 =$ espagnol est le suivant.

$X =$ sexe	$x_1 =$ fille	$x_2 =$ garçon	Total
y_3 = espagnol			

2. Probabilités conditionnelles

On choisit un élève au hasard et on considère les événements :
- F : « l'élève est une fille » ;
- All : « l'élève fait allemand » ;
- Ang : « l'élève fait anglais » ;
- E : « l'élève fait espagnol ».

On appelle cardinal d'un ensemble A, et on note $\text{card}(A)$, le nombre d'éléments de A.

Par exemple $\text{card}(F) =$; $\text{card}(\text{Ang}) =$ et $\text{card}(F \cap \text{Ang}) =$

La probabilité de F est $P(F) =$; celle de Ang est $P(\text{Ang}) =$ et celle $F \cap \text{Ang}$ est $P(F \cap \text{Ang}) =$

Supposons maintenant que nous avons choisi une fille, et interrogeons-nous sur la probabilité que celle-ci fasse anglais.
Puisqu'il y a filles faisant anglais et filles au total, cette probabilité est égale à
Elle se note $P_F(\text{Ang})$ et s'appelle « probabilité de Ang sachant F ».

Quelle est la probabilité qu'un élève qui fasse anglais soit une fille ?

Cela conduit à poser la définition suivante.

Définition. *Si A est un événement de cardinal non nul, on appelle* *probabilité de B sachant A*

$$P_A(B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)}.$$