Matrices

1. Généralités sur les matrices

Définition. *Une* <u>*matrice*</u> *A de* <u>*dimension*</u> *(ou* <u>*format*</u>*, ou* <u>*taille*</u>*) $n \times p$ (ou (n, p)) est un tableau de nombres comportant n lignes et p colonnes. Les nombres de ce tableau sont appelés* <u>*éléments*</u>*,* <u>*coefficients*</u> *ou* <u>*termes*</u> *de la matrice.*
L'élément se trouvant à l'intersection de la ligne i et de la colonne j sera noté en général a_{ij}.
Lorsque $n = p$ on parle de <u>*matrice carrée*</u> *et n est appelé l'*<u>*ordre*</u> *de la matrice.*
Lorsque $n = 1$, on parle de <u>*matrice ligne*</u>*, lorsque $p = 1$, on parle de* <u>*matrice colonne*</u>*.*

<u>Exemple</u>

$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension 2×3. On a $a_{21} = 0$.

Définition. *Deux matrices sont dites* <u>*égales*</u> *si elles ont la même dimension et si les coefficients de même place sont égaux.*

Définition. *Dans une matrice carrée, les coefficients a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} forment la* <u>*diagonale principale*</u> *de celle-ci.*

Définition. *La* <u>*matrice identité*</u> *d'ordre n, noté I_n est la matrice carrée contenant des 1 sur sa diagonale principale et des 0 ailleurs. Par exemple $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*
On appelle <u>*matrice nulle*</u> *d'ordre n, noté O_n, la matrice carrée dont tous les coefficients sont 0.*

2. Opérations les matrices

❖ Addition de deux matrices

Définition. *Soit A et B deux matrices de même dimension. La matrice somme $C = A + B$ est la matrice dont l'élément principal est donnée par $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.*

<u>Exemple</u>

$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$.

Théorème. Soit A, B, C trois matrices de même dimension. On a
- $A + B = B + A$ (commutativité de l'addition) ;
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativité de l'addition).

L'associativité permet d'écrire $A + B + C$ sans ambiguïté.

❖ Multiplication d'une matrice par un réel

Définition. *Soit A une matrice et k un réel. On note kA la matrice dont l'élément principal est donnée par ka_{ij}.*
La matrice $(-1)A$, notée $-A$, s'appelle <u>matrice opposée</u> de A.

<u>Exemple</u>

$4\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8 & 4\\ 0 & 12\end{pmatrix}$.

Théorème. Soit A et B deux matrices de même dimension et k et k' deux réels.
- $k(A+B) = kA + KB$;
- $(k+k')A = kA + k'A$;
- $k(k'A) = (kk')A$.

❖ Multiplication de deux matrices

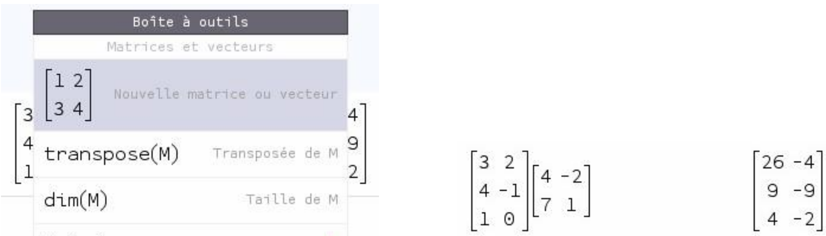
Définition. *Soit A et B deux matrices de dimension $m \times n$ et $n \times p$. On note $C = AB$ la matrice de dimension $m \times p$ dont l'élément principal est donné par $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.*

<u>Exemple</u>

Soit $A = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}4 & -2\\ 7 & 1\end{pmatrix}$, alors

$$AB = \begin{pmatrix}3\times 4 + 2\times 7 & 3\times(-2) + 2\times 1\\ 4\times 4 + (-1)\times 7 & 4\times(-2) + (-1)\times 1\\ 1\times 4 + 0\times 7 & 1\times(-2) + 0\times 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}26 & -4\\ 9 & -9\\ 4 & -2\end{pmatrix}.$$

Pour effectuer ce calcul avec la calculatrice Numworks, une fois dans le module Calculs, il faut choisir dans la boîte à outils le menu « Matrices et vecteurs ».



Théorème. Soit A, B, C trois matrices ayant des dimensions qui permettent d'effectuer les opérations indiquées et k un réel
- $A(B+C) = AB + AC$ (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition) ;
- $A(kB) = k(AB)$;
- $A(BC) = (AB)C$ (associativité de la multiplication).

Remarque.
- Si les matrices sont carrées, la multiplication n'est pas commutative, on n'a pas $AB = BA$.
- Si A est une matrice carrée d'ordre n, on a $AI_n = I_nA = A$ et $AO_n = O_nA = O_n$.

3. Matrices inversibles et application aux systèmes

❖ Matrices inversibles

Définition. *Soit A une matrice carrée de taille n. Une matrice B carrée d'ordre n est dite inverse à gauche de A si $BA = I_n$ et inverse à droite de A si $AB = I_n$.*

Exemple A

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. Un calcul immédiat montre que $B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ est un inverse à gauche et un inverse à droite de A.

Si une matrice A admet un inverse à droite B et un inverse à gauche C alors $B = C$ et on peut donc dire que B est un inverse de A sans ambigüité. En effet en utilisant l'associativité de la multiplication,

$$CAB = (CA)B = I_n B = B \text{ et } CAB = C(AB) = CI_n = C$$

donc $B = C$.
Par ailleurs, si une matrice A admet un inverse à droite et à gauche, cet inverse est unique. En effet, supposons que B et C soient deux inverses à droite et à gauche : $AB = BA = I_n$ et $AC = CA = I_n$. Alors $B = C$ car $C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_n B = B$.

Cela conduit à la définition suivante.

Définition. *Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que A est une matrice inversible si elle admet un inverse à gauche et un inverse à droite. Cet inverse est alors unique, on le note A^{-1}.*

Exemple A

D'après ce qui précède, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 14 & -12 & -7 \\ -8 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Théorème (admis). Si une matrice est inversible à gauche (resp. à droite), elle est inversible à droite (resp. à gauche).

Ainsi pour montrer que la matrice A est inversible d'inverse B, il suffit de montrer que $AB = I_n$ ou que $BA = I_n$.

Théorème. Soit A une matrice inversible d'ordre n et M et N deux matrices ayant n colonnes. Alors $AM = N \Leftrightarrow M = A^{-1}N$.

Démonstration. Si $AM = N$, alors en multipliant de chaque côté à gauche par A^{-1}, on obtient $A^{-1}AM = A^{-1}N$, puis par associativité de la multiplication $(A^{-1}A)M = A^{-1}N$. Comme $A^{-1}A = I_n$, on a bien $M = A^{-1}N$.
Réciproquement, si $M = A^{-1}N$, on obtient $AM = N$ en multipliant de chaque côté par A. ■

Théorème. Soit A une matrice inversible d'ordre n et k un réel non nul. La matrice kA est inversible et son inverse est $\frac{1}{k}A^{-1}$.

Démonstration. En effet $\frac{1}{k}A^{-1} \times kA = \left(\frac{1}{k} \times k\right) A^{-1}A = I_n$ d'après les propriétés du produit matriciel. ■

❖ **Cas des matrices d'ordre 2**

Théorème. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice d'ordre 2. La matrice A est inversible si et seulement si le réel $ad - bc$, appelé <u>déterminant</u> de A, est non nul. On a alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Supposons que A soit la matrice nulle $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Elle n'est pas inversible car pour toute matrice B, on a $AB = O_2$, rendant l'égalité $AB = I_2$ impossible. Son déterminant est nul, comme l'énoncé l'affirme dans un tel cas.

Supposons maintenant la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ non nulle. L'un des quatre réels a, b, c, d est non nul, il en est donc de même d'un des quatre réels $a, -b, -c, d$, ce qui prouve que la matrice $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ est non nulle.
En posant $\Delta = ad - bc$, il vient

$$AB = \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -bc+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} = \Delta I_2.$$

- Supposons $\Delta = 0$. Cette égalité montre que $AB = 0I_2 = O_2$, donc si A est inversible d'inverse A^{-1}, on obtient en multipliant par A^{-1} à gauche :
  $$B = I_2B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}O_2 = O_2,$$
  ce qui contredit le fait que B est non nulle.
  La matrice A est donc non inversible si $\Delta = 0$.
- Supposons $\Delta \neq 0$. Le calcul ci-dessus montre que
  $$A\left(\frac{1}{\Delta}B\right) = \frac{1}{\Delta}AB = \frac{1}{\Delta}\Delta I_2 = I_2.$$
  Cela prouve que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}B$. ■

Remarques.

1. Dans la démonstration, on a cherché un inverse à droite puisqu'il a été admis ci-dessus que cela équivaut à chercher un inverse à gauche.
Comme un petit calcul montre qu'on a aussi $BA = \Delta I_2$, il est aisé ici de se passer de cette artillerie lourde et de montrer directement l'existence (ou pas) d'un inverse à gauche.

2. On peut se demander d'où provient le parachutage de B dans la démonstration. Voici une explication.
Soit A une matrice non nulle inversible et $C = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ son inverse. On doit avoir $AC = I_n$ et comme $AC = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$, cela donne le système suivant, d'inconnues a', b', c', d' :

$$\begin{cases} aa' + bc' = 1 \\ ab' + bd' = 0 \\ ca' + dc' = 0 \\ cb' + dd' = 1 \end{cases}$$

En calculant les combinaisons de lignes $cL_1 - aL_3$, $aL_4 - cL_2$, $dL_1 - bL_3$ et $bL_4 - dL_2$, on obtient

$$\begin{cases} bcc' - adc' = c \\ add' - bcd' = a \\ ada' - bca' = d \\ bcb' - adb' = b \end{cases} \text{ soit encore } \begin{cases} \Delta c' = -c \\ \Delta d' = a \\ \Delta a' = d \\ \Delta b' = -b \end{cases}$$

où l'on a posé à nouveau $\Delta = ad - bc$.

Par conséquent, si $\Delta = 0$, ce système n'a pas de solution, car on aurait $a = b = c = d = 0$ et la matrice A serait la matrice nulle, cas que l'on a écarté.

Si $\Delta \neq 0$, ce système admet une unique solution $(a'; b'; c'; d') = \left(\frac{d}{\Delta}; -\frac{b}{\Delta}; -\frac{c}{\Delta}; \frac{a}{\Delta}\right)$, la matrice inverse, si elle existe, ne peut donc être que $C = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

- **Application aux systèmes linéaires**

Exemple A

Considérons le système linéaire d'inconnues x et y : $\begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 5x + 7y = 11 \end{cases}$. En posant

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix},$$

le système peut s'écrire $AU = V$.

De façon analogue, tout système linéaire de n équations à n inconnues peut s'écrire sous forme matricielle $AU = V$.

Si la matrice A est inversible, on a vu $AU = V \Leftrightarrow U = A^{-1}V$, ce qui donne les solutions du système.

Exemple A

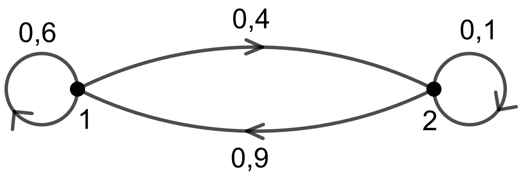
L'inverse de A étant $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, on en déduit les solutions x, y vérifient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U = A^{-1}V = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

La solution du système est donc $(x; y) = (2; -3)$.

4. Graphes probabilistes

On considère un graphe dont les arêtes sont pondérées par des probabilités.
On se déplace sur un tel graphe en choisissant à chaque étape une arête au hasard parmi les arêtes partant du sommet où l'on se trouve. La probabilité associée à l'arête est la probabilité de la choisir. Voici un exemple de système à deux états.



Ce système peut représenter (de manière simpliste) les variations météorologiques dans une région. L'état 1 représente les journées ensoleillées et l'état 2 les journées pluvieuses.
On suppose que lorsqu'une journée est ensoleillée, la probabilité que ce soit encore le cas le lendemain est 0,6 et la probabilité que le lendemain soit pluvieux est 0,4.
De même, après une journée pluvieuse, il y a une probabilité 0,1 d'avoir encore de la pluie et une probabilité 0,9 que le soleil revienne. Ainsi, chaque jour on change d'état ou on reste dans le même état sur le graphe selon les probabilités décrites ci-dessus.

L'état dans lequel le système va se trouver à l'instant $n+1$ (l'instant suivant) dépend uniquement de l'instant n. En d'autres termes, l'état futur du système est uniquement déterminé par son état présent. Un tel processus « sans mémoire » est appelé une chaîne de Markov.

Pour $1 \leq i \leq 2$ et $1 \leq j \leq 2$, soit a_{ij} la probabilité que le système passe de l'état i à l'état j à l'instant suivant. On a donc

- $a_{11} = 0{,}6$;
- $a_{12} = 0{,}4$;
- $a_{21} = 0{,}9$;
- $a_{22} = 0{,}1$.

Définition. *La matrice* $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *est appelée* *matrice de transition* *du système.*
Elle est dite *stochastique*, *car chacun de ses coefficients est positif et la somme des coefficients d'une ligne vaut 1.*

On note

- A_n l'événement « le système est à l'état 1 à l'instant n » (concrètement : « il fait beau après n jours ») ;
- B_n l'événement « le système est à l'état 2 à l'instant n » (concrètement : « il ne fait pas beau après n jour ») ;

Remarquons que $P_{A_n}(A_{n+1}) = a_{11}$, $P_{A_n}(B_{n+1}) = a_{12}$, $P_{B_n}(A_{n+1}) = a_{21}$ et $P_{B_n}(B_{n+1}) = a_{22}$.

Enfin pour $n \geq 0$, on note E_n l'état du système à l'instant n, c'est-à-dire la matrice ligne

$$E_n = (P(A_n) \quad P(B_n)).$$

Théorème. Pour tout entier $n \geq 0$, on a $E_{n+1} = E_n T$.
L'état du système à l'instant $n \geq 1$ est donné par la formule $E_n = E_0 T^n$.

Démonstration. D'après la formule des probabilités totales, on a
$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) = a_{11}P(A_n) + a_{21}P(B_n).$$
De même $P(B_{n+1}) = a_{22}P(B_n) + a_{12}P(A_n)$.
On voit donc que l'on a pour tout entier n, $E_{n+1} = E_nT$.

La seconde propriété s'en déduit alors par récurrence.

- Pour $n = 1$, on a bien $E_1 = E_0T$ d'après ce qui précède.
- Supposons la propriété établie pour un entier n, c'est-à-dire $E_n = E_0T^n$. On en déduit
$$E_{n+1} = E_nT = E_0T^nT = E_0T^{n+1},$$
ce qui montre que la propriété est héréditaire.

Puisque la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, elle est vraie pour tout $n \geq 1$ d'après le principe de récurrence. ■

Cela permet de prévoir la météo qu'il fera au bout de plusieurs jours.
Imaginons que l'on soit dimanche, il fait beau, c'est-à-dire $E_0 = (1 \quad 0)$. La météo le jeudi suivant sera donnée par
$$E_4 = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}^4 \approx (0,695 \quad 0,305).$$
Il fera beau avec une probabilité $0,695$. Remarquons qu'en fait $P_{A_0}(A_4) = 0,695$ et $P_{A_0}(B_4) = 0,305$ puisque l'on a supposé qu'il faisait beau dimanche.

Théorème. Le coefficient de la i-ème ligne et j-ème colonne de T^n est la probabilité que le système passe de l'état i à l'état j en n instants.

Démonstration. Vu que le système n'a pas de mémoire, cela revient à montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a
$$T^n = \begin{pmatrix} P_{A_0}(A_n) & P_{A_0}(B_n) \\ P_{B_0}(A_n) & P_{B_0}(B_n) \end{pmatrix}.$$
Pour cela, notons x, y, z, t les coefficients de T^n, c'est-à-dire que
$$T^n = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$
Si l'on suppose qu'à l'instant initial le système est à l'état 1, $P(A_n)$ est en fait égal à $P_{A_0}(A_n)$ et $P(B_n)$ à $P_{A_0}(B_n)$. Dans ce cas $E_0 = (1 \quad 0)$ et on a
$$(P_{A_0}(A_n) \quad P_{A_0}(B_n)) = (P(A_n) \quad P(B_n)) = E_n = (1 \quad 0)T^n = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (x \quad y),$$
d'où l'on déduit $x = P_{A_0}(A_n)$ et $y = P_{A_0}(B_n)$.

Si l'on suppose qu'à l'instant initial le système est à l'état 2, on a $E_0 = (0 \quad 1)$, $P(A_n) = P_{B_0}(A_n)$ et $P(B_n) = P_{B_0}(B_n)$, si bien que
$$(P_{B_0}(A_n) \quad P_{B_0}(B_n)) = (P(A_n) \quad P(B_n)) = E_n = (0 \quad 1)T^n = (0 \quad 1)\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (z \quad t).$$
On en déduit les valeurs de z et t annoncées. ■

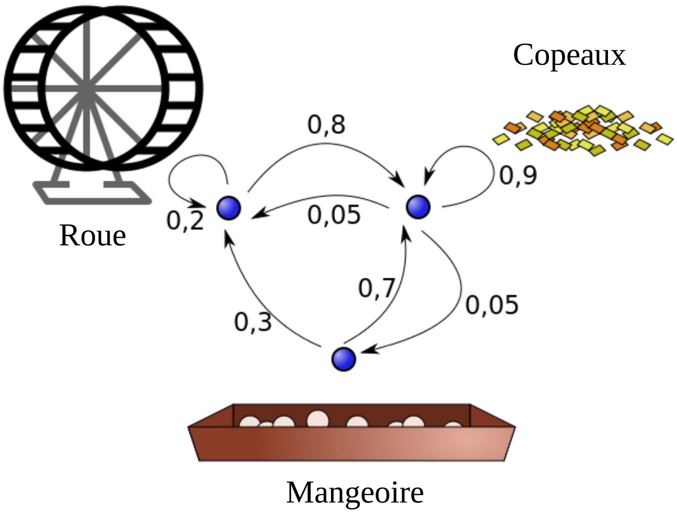
Remarque. La matrice T^n est stochastique.

Remarque. On trouvera aussi dans les exercices des notations « inversées ». On pose $T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $E_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \end{pmatrix}$, on aura donc $E_n = T^nE_0$ et $T^n = \begin{pmatrix} P_{A_0}(A_n) & P_{B_0}(A_n) \\ P_{A_0}(B_n) & P_{B_0}(B_n) \end{pmatrix}$.

Exemple (source : Wikipedia)

Doudou le hamster ne connaît que trois endroits dans sa cage : les copeaux où il dort, la mangeoire où il mange et la roue où il fait de l'exercice. Ses journées sont assez semblables les unes aux autres, et son activité se représente aisément par une chaîne de Markov. Toutes les minutes, il peut soit changer d'activité, soit continuer celle qu'il était en train de faire. L'appellation processus sans mémoire n'est pas du tout exagérée pour parler de Doudou.

- Quand il dort, il a 9 chances sur 10 de ne pas se réveiller la minute suivante.
- Quand il se réveille, il y a 1 chance sur 2 qu'il aille manger et 1 chance sur 2 qu'il parte faire de l'exercice.
- Le repas ne dure qu'une minute, après il fait autre chose.
- Après avoir mangé, il y a 3 chances sur 10 qu'il parte courir dans sa roue, mais surtout 7 chances sur 10 qu'il retourne dormir.
- Courir est fatigant pour Doudou ; il y a 8 chances sur 10 qu'il retourne dormir au bout d'une minute. Sinon il continue en oubliant qu'il est déjà un peu fatigué.



En prenant les états dans l'ordre copeaux, mangeoire, roue, la matrice de transition de ce système est

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}7 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Le calcul

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}885 & 0{,}045 & 0{,}07 \\ 0{,}87 & 0{,}035 & 0{,}095 \\ 0{,}88 & 0{,}04 & 0{,}08 \end{pmatrix}$$

montre par exemple que la probabilité que Doudou soit à la roue deux minutes après avoir mangé est 9,5 %.