Matrices – Exercices

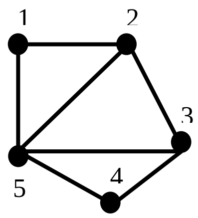
Matrices

1 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Quelle est la dimension de A ?
2. Donner, s'il existe, a_{12}, a_{23}, a_{22}, a_{31}.

2 On considère la matrice $B = (b_{ij})$ telle que $b_{ij} = 2ij^2$ pour $1 \leq i \leq 4$ et $1 \leq j \leq 2$.
1. Quelle est sa dimension ?
2. Écrire la matrice avec tous ses coefficients.

3 Chaque matin, parmi cinq élèves d'une même classe, certains se serrent la main, et d'autres non, selon le schéma ci-contre. On définit la matrice A des poignées de mains comme suit : l'élément a_{ij} de A vaut 1 si l'élève i a serré la main de l'élève j et 0 sinon.



1. Donner la matrice A.
2. Justifier l'égalité $a_{ij} = a_{ji}$ valables pour tous i et j entre 1 et 5.

Opérations sur les matrices

4 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A + B$, $2A$, $2A - 4B$ et $A + I_2$.

5 Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Calculer AM.

6 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -7 & 9 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Calculer AM.

7 À un point $M(x; y)$ du plan muni d'un repère, on associe le point $M'(x'; y')$ de coordonnées

$$(x'; y') = (2x - y; x + 2y).$$

Déterminer la matrice A telle que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

8 La fabrication de trois vêtements G (gilet), V (veste) et P (pantalon) dans un même tissu nécessite 0,8 m de tissu pour G, 2,50 m de tissu pour V et 1,80 m de tissu pour P, 4 boutons pour G, 2 boutons pour V et 4 boutons pour P. On sait que 1 m de tissu pour 15 € et 1 bouton coûte 1 €.
1. Représenter les matières premières par une matrice M de dimension 3×2 et les prix unitaires par une matrice colonne P.
2. Calculer la matrice MP et interpréter le résultat.

9 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB et BA.

10 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.
1. Calculer à la main A^2, A^3 et A^4.
2. Vérifier à l'aide d'une calculatrice.
3. Calculer A^{-1}.

11 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
1. Calculer A^2, A^3, A^4 et émettre une conjecture sur A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. **a.** Montrer que $A = I_2 + B$ où $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
b. Calculer B^2. En déduire A^2 puis A^3 en fonction de I_2 et B.
3. Démontrer par récurrence pour tout entier naturel non nul n, on a $A^n = I_2 + nB$.

Systèmes linéaires

12 On considère le système $\begin{cases} 5x + 4y = 7 \\ 10x + 7y = 15 \end{cases}$.
1. Résoudre ce système à l'aide d'une matrice et de la calculatrice.
2. Soit a et b deux réels. Résoudre le système $\begin{cases} 5x + 4y = a \\ 10x + 7y = b \end{cases}$ d'inconnues x et y.

13 Résoudre le système $\begin{cases} 2x + 4y - z = 1 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ x - 3y + z = 4 \end{cases}$

14 Soit m un réel est S_m le système d'inconnues x et y

$$\begin{cases} 2x + my = 4 \\ mx + y = 5 \end{cases}$$

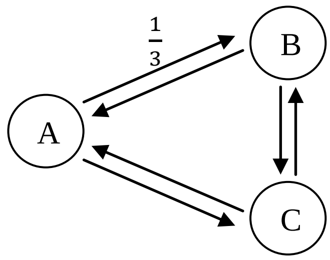
1. Écrire ce système sous forme matricielle $Y = AX$.
2. Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle inversible ? Résoudre alors le système.
3. Résoudre S_m pour les autres valeurs de m.

15 Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(1; 0)$, $B(-2; 15)$ et $C(2; 3)$. Déterminer l'équation d'une parabole passant par ces points.

16 Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(5; 2)$, $B(4; 3)$ et $C(1; 0)$. Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Probabilités et matrices

17 Monsieur l'Indécis a trois amis : A, B, C. À chaque étape de sa marche aléatoire :



- s'il est chez A, il va chez B ou C avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ pour B ;
- s'il est chez B, il va chez A ou C avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ pour A ;
- s'il est chez C, il va chez A ou B de façon équiprobable.

1. Compléter le graphe ci-contre avec les cinq probabilités manquantes.
2. Donner la matrice de transition T.
3. Calculer les probabilités d'aller en trois étapes : de A à B ; de B à C ; de B à B.

18 On considère un mobile se déplaçant sur un graphe probabiliste à 3 sommets : A, B, C

- Si le mobile est en A, il va en B avec une probabilité 0,25 et en C avec une probabilité 0,65 ;
- Si le mobile est en B, il va en A avec une probabilité 0,5 et en C avec une probabilité 0,3 ;
- Si le mobile est en C, il va en A avec une probabilité 0,2 et en B avec une probabilité 0,45.

1. Construire un graphe probabiliste.
2. Donner la matrice de transition.
3. Calculer la probabilité que
 a. le mobile soit en B après 3 étapes s'il est en A au départ.
 b. le mobile soit en C après 4 étapes s'il est en C au départ.

19 Un supermarché dispose sur son parking de 3 points d'attache des caddies : le point (1), le point (2) et le point (3). On suppose qu'à la fermeture du magasin, chaque caddie se trouve attaché à l'un des points (1), (2) ou (3).
Pour i et j dans $\{1; 2; 3\}$, on note p_{ij} la probabilité qu'un caddie attaché au point (i) soit le lendemain attachée au point (j). Les valeurs de p_{ij} sont données dans le tableau suivant.

j \ i	1	2	3
1	0,3	0,4	0,5
2	0,3	0,4	0,3
3	0,4	0,2	0,2

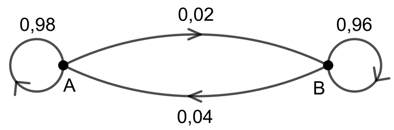
1. Construire un graphe probabiliste illustrant le problème.
2. Donner la matrice de transition T.
3. Le supermarché dispose de 1000 caddies. Le lundi matin, 100 sont attachés au point (1), 700 au point (2) et 200 au point (3).
Calculer le nombre de caddies attachés aux points (1), (2) et (3) le samedi matin.

Sujets de baccalauréat, problèmes

20 Le plan est rapporté à un repère. On considère E l'ensemble E des points $M(x; y)$ tels que $x^2 - 3y^2 = 1$.

1. Déterminer quelques points à coordonnées entières de E. Pourquoi peut-on se limiter aux points de coordonnées positives ?
2. À tout point $M(x; y)$ on associe le point $M'(x; y)$ tel que $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = x + 2y \end{cases}$.
 a. Soit P_0 le point de coordonnées $(1; 0)$. On nomme P_1 le point associé à P puis P_2 celui associé à P_1, etc. Déterminer les coordonnées de P_1, P_2, P_3. Qu'observe-t-on ?
 b. Montrer que si $M \in E$, alors $M' \in E$.
 c. En déduire deux nouveaux points à coordonnées entières positives appartenant à E.
 d. Montrer que si $x > 0$ et $y > 0$, alors $x' > x$ et $y' > y$. Que peut-on en déduire sur le nombre de points à coordonnées entières appartenant à E ?
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $(x_n; y_n)$ les coordonnées de P_n.
 a. Justifier que $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
 b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
 c. Donner les coordonnées de P_{10}.

21 Deux candidats se présentent à une élection.
En début de campagne, 25 % des personnes déclarent vouloir voter pour le candidat A et 75 % des personnes pour le candidat B.
On note $R_0 = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}75 \end{pmatrix}$ la matrice colonne de cette distribution initiale des fréquences de vote. Chaque semaine de nouveaux sondages sont réalisés. Les sondeurs relèvent une évolution constante : chaque semaine, 98 % des personnes s'étant prononcées pour le candidat A la semaine précédente déclarent à nouveau une intention de vote pour A et 2 % de ces personnes se prononcent pour B.
Le candidat B conserve de semaine en semaine 96 % des intentions de vote, les 4 % restants changeant d'avis.



1. Donner la matrice de transition E.
2. La campagne dure 12 semaines. Exprimer la matrice colonne R_{12} de la répartition des intentions de vote à la finde la 12$^{\text{e}}$ semaine en fonction de R_0 et E.
En déduire les intentions de vote en fin de campagne.
3. Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
 a. Calculer $D = QEP$ et QP.
 b. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $E^n = PD^nQ$.
 c. Exprimer les éléments de E^n en fonction de n et en déduire que la matrice colonne R_n de la répartition des intentions de vote la n^{e} semaine est
$$R_n = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 - 5 \times 0{,}94^n \\ 4 + 5 \times 0{,}94^n \end{pmatrix}.$$
 d. En déduire la durée de campagne nécessaire pour que les intentions de vote pour le candidat A dépasse 60 %.

22 *(2014, Centres étrangers).*

Partie A – Préliminaires

1. a. Soient n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que $n^2 \equiv N - 1 \ [N]$.
Montrer que $n \times n^3 \equiv 1 \ [N]$.
 b. Déduire de la question précédente un entier k_1 tel que $5k_1 \equiv 1 \ [26]$.
On admettra que 21 est l'unique entier k tel que
$$0 \leq k \leq 25 \text{ et } 5k \equiv 1 \ [26].$$
2. On donne les matrices :
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$
 a. Calculer la matrice $6A - A^2$.
 b. En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse peut s'écrire sous la forme $A^{-1} = \alpha I + \beta A$, où α et β sont deux réels que l'on déterminera.
 c. Vérifier que $B = 5A^{-1}$.
 d. Démontrer que si $AX = Y$, alors $5X = BY$.

Partie B – Procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

- **Étape 1.** Chaque lettre du bloc est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient une matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

- **Étape 2.** La matrice X est transformée en $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que $Y = AX$.
  La matrice A est appelée la matrice de codage.
- **Étape 3.** La matrice Y est transformée en $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.
- **Étape 4.** Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé selon le tableau de correspondance ci-dessus.

Exemple. OU $\to \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \to$ YE.

Partie C – Procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)
Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que $Y = AX$.

1. Démontrer que $\begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases}$.
2. En utilisant la question 1.b. de la partie A, établir que :
$$\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \ [26] \\ x_2 \equiv 15y_1 + 6y_2 \ [26] \end{cases}$$
3. Décoder le mot « QP ».

23 *(2015, Liban)*. Un fumeur décide d'arrêter de fumer. On choisit d'utiliser la modélisation suivante :

- s'il ne fume pas un jour donné, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,9 ;
- s'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

On appelle p_n la probabilité de ne pas fumer le n^{e} jour après sa décision d'arrêter de fumer et q_n, la probabilité de fumer le n^{e} jour après sa décision d'arrêter de fumer.
On suppose que $p_0 = 0$ et $q_0 = 1$.

1. Calculer p_1 et q_1.
2. On utilise un tableur pour automatiser le calcul des termes successifs des suites (p_n) et (q_n). Une copie d'écran de cette feuille de calcul est fournie ci-dessous :

	A	B	C	D
1	n	p_n	q_n	
2	0	0	1	
3	1			
4	2			
5	3			

   Dans la colonne A figurent les valeurs de l'entier naturel n.
   Quelles formules peut-on écrire dans les cellules B3 et C3 de façon qu'en les recopiant vers le bas, on obtienne respectivement dans les colonnes B et C les termes successifs des suites (p_n) et (q_n) ?
3. On définit les matrices M et, pour tout entier naturel n, X_n par $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.
   On admet que $X_{n+1} = MX_n$ et que, pour tout entier naturel n, $X_n = M^n X_0$.
   On définit les matrices A et B par
$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}8 \\ -0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$
   a. Démontrer que $M = A + 0{,}5B$.
   b. Vérifier que $A^2 = A$, et que $AB = BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   On admet dans la suite que, pour tout entier naturel n strictement positif, $A^n = A$ et $B^n = B$.
   c. Démontrer que, pour tout entier naturel n,
$$M^n = A + 0{,}5^n B.$$
   d. En déduire que, pour tout entier naturel n,
$$p_n = 0{,}80 - 0{,}8 \times 0{,}5^n.$$
   e. À long terme, peut-on affirmer avec certitude que le fumeur arrêtera de fumer ?

24 *(2015, Amérique du Nord)*. On donne les matrices
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie A –

1. Déterminer M^2. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.
2. Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.
3. En déduire que M est inversible et que
$$M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I).$$

Partie B – Étude d'un cas particulier
On cherche à déterminer trois nombres entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points $A(1;1)$, $B(-1;-1)$ et $C(2;5)$.

1. Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a, b et c tels que
$$M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$
2. Calculer les nombres a, b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.

Partie C – Retour au cas général
Les nombres a, b, c, p, q, r sont des entiers.
Dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(1;p)$, $B(-1;q)$ et $C(2;r)$.
On cherche des valeurs de p, q et r pour qu'il existe une parabole d'équation
$$y = ax^2 + bx + c$$
passant par A, B et C.

1. Démontrer que si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ avec a, b et c entiers, alors
$$\begin{cases} -3p + q + 2r \equiv 0 \ [6] \\ 3p - 3q \equiv 0 \ [6]. \\ 6q + 2q - 2r \equiv 0 \ [6] \end{cases}$$
2. En déduire que $\begin{cases} q - r \equiv 0 \ [3] \\ p - q \equiv 0 \ [2] \end{cases}$.
3. Réciproquement, on admet que si que
$$\begin{cases} q - r \equiv 0 \ [3] \\ p - q \equiv 0 \ [2] \end{cases}$$
   et A, B, C ne sont pas alignés, alors il existe trois entiers a, b et c tels que la parabole d'équation
$$y = ax^2 + bx + c$$
   passe par les points A, B et C.
   a. Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $2r + q - 3p = 0$.
   b. On choisit $p = 7$. Déterminer des entiers q, r, a, b et c tels que la parabole d'équation
$$y = ax^2 + bx + c$$
   passe par les points A, B et C.

25 *(2017, Amérique du Nord).*

Partie A – Une association gère des activités pour des enfants. Elle propose deux programmes d'activités,

- le programme A : cirque - éveil musical ;
- le programme B : théâtre - arts plastiques.

À sa création en 2014, l'association compte 150 enfants qui suivent tous le programme A.
Pour chacune des années suivantes, le nombre d'enfants inscrits dans l'association reste égal à 150.
On dispose également des informations suivantes :

- Chaque enfant ne peut suivre qu'un seul programme : soit le programme A, soit le programme B.
- D'une année à l'autre, 20 % des inscrits au programme A choisissent à nouveau le programme A, alors que 40 % choisissent le programme B. Les autres quittent l'association.
- D'une année à l'autre, 60 % des inscrits au programme B choisissent à nouveau le programme B et les autres quittent l'association.
- Les nouveaux inscrits, qui compensent les départs, suivent obligatoirement le programme A.

Le nombre d'inscrits au programme A et le nombre d'inscrits au programme B durant l'année $2014+n$ est modélisé respectivement par deux suites (a_n) et (b_n) et on note U_n la matrice ligne $(a_n \quad b_n)$. On a $U_0 = (150 \quad 0)$.

1. Montrer qu'on a $U_{n+1} = U_n M$ pour tout entier naturel n, où $M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n,
$$U_n = (75 + 75 \times 0{,}2^n \quad 75 - 75 \times 0{,}2^n).$$
3. En déduire la répartition des effectifs à long terme entre les deux programmes.

Partie B – L'association affecte à chaque enfant un numéro à 6 chiffres $c_1c_2c_3c_4c_5k$. Les deux premiers chiffres représentent l'année de naissance de l'enfant les trois suivants sont attribués à l'enfant au moment de sa première inscription. Le dernier chiffre, appelé clé de contrôle, est calculé automatiquement de la façon suivante :

- on effectue la somme $S = c_1 + c_3 + c_5 + a \times (c_2 + c_4)$ où a est un entier compris entre 1 et 9 ;
- on effectue la division euclidienne de S par 10, le reste obtenu est la clé k.

Lorsqu'un employé saisit le numéro à 6 chiffres d'un enfant, on peut détecter une erreur de saisie lorsque le sixième chiffre n'est pas égal à la clé de contrôle calculée à partir des cinq premiers chiffres.

1. Dans cette question seulement, on choisit $a = 3$.
   - **a.** Le numéro 111383 peut-il être celui d'un enfant inscrit à l'association ?
   - **b.** L'employé, confondant un frère et une sœur, échange leurs années de naissance : 2008 et 2011. Ainsi, le numéro $08c_3c_4c_5k$ est transformé en $11c_3c_4c_5k$. Cette erreur est-elle détectée grâce à la clé ?
2. On note $c_1c_2c_3c_4c_5k$ le numéro d'un enfant. On cherche les valeurs de l'entier a pour lesquelles la clé détecte systématiquement la faute de frappe lorsque les chiffres c_3 et c_4 sont intervertis. On suppose donc que les chiffres c_3 et c_4 sont distincts.
   - **a.** Montrer que la clé ne détecte pas l'erreur d'interversion des chiffres c_3 et c_4 si et seulement si $(a-1)(c_4 - c_3)$ est congru à 0 modulo 10.
   - **b.** Déterminer les entiers n compris entre 0 et 9 pour lesquels il existe un entier p compris entre 1 et 9 tel que $np \equiv 0 \ [10]$.
   - **c.** En déduire les valeurs de l'entier a qui permettent, grâce à la clé, de détecter systématiquement l'interversion des chiffres c_3 et c_4.

26 *(2015, Asie).* On dit qu'un entier naturel non nul N est un nombre triangulaire s'il existe un entier naturel n tel que : $N = 1 + 2 + \cdots + n$.
Par exemple, 10 est un nombre triangulaire car
$$10 = 1 + 2 + 3 + 4.$$
Le but de ce problème est de déterminer des nombres triangulaires qui sont les carrés d'un entier.
On rappelle que, pour tout entier naturel non nul n, on a
$$1 + 2 + \cdots + n = \tfrac{n(n+1)}{2}.$$

Partie A – Nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. Montrer que 36 est un nombre triangulaire, et qu'il est aussi le carré d'un entier.
2. **a.** Montrer que le nombre $1 + 2 + \cdots + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $n^2 + n - 2p^2 = 0$.
   b. En déduire que le nombre $1 + 2 + \cdots + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $(2n+1)^2 - 8p^2 = 1$.

Partie B – Étude de l'équation diophantienne associée

On considère (E) l'équation diophantienne $x^2 - 8y^2 = 1$, où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Donner deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solution de (E).
2. Soit x et y deux entiers relatifs. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et on définit les entiers relatifs x' et y' par l'égalité : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
   Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
3. Déterminer la matrice A^{-1}, puis exprimer x et y en fonction de x' et y'.
4. Démontrer que $(x; y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x'; y')$ est solution de (E).
5. On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
   On admet que, ainsi définis, les nombres x_n et y_n sont des entiers naturels pour toute valeur de l'entier n.
   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $(x_n; y_n)$ est solution de (E).

Partie C – Retour au problème initial

À l'aide des parties précédentes, déterminer un nombre triangulaire supérieur à 2015 qui est le carré d'un entier.