Nombres réels

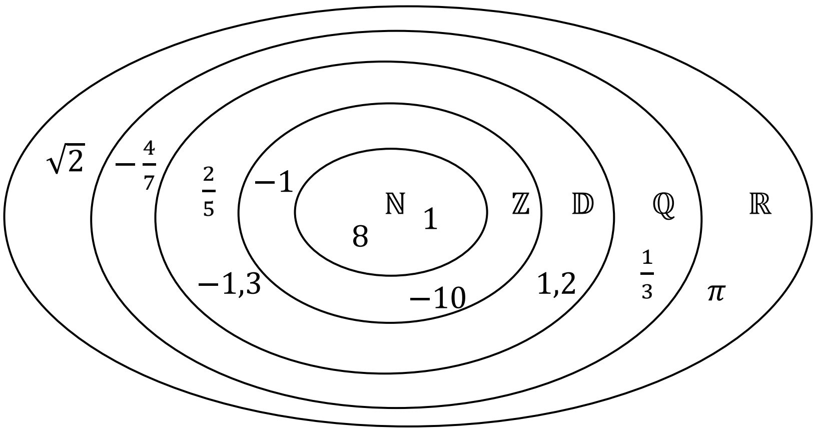
1. Ensembles de nombres

Définition. *On définit les ensembles de nombres suivants.*

Ensembles de nombres	Notation	Éléments
Nombres entiers naturels	$\mathbb{N}$	0, 1, 2, 3, ...
Nombres entiers naturels non nuls	$\mathbb{N}^*$	1, 2, 3, ...
Nombres entiers relatifs	$\mathbb{Z}$	..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
Nombres décimaux	$\mathbb{D}$	Nombres de la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$
Nombres rationnels	$\mathbb{Q}$	Nombres de la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$
Nombres réels	$\mathbb{R}$	Tous les nombres que vous connaissez

Les décimaux sont les nombres s'écrivant avec un nombre fini de chiffre après la virgule. Par exemple $5{,}23 = \frac{523}{10^2}$ ou $-0{,}213 = \frac{-213}{10^3}$.

Théorème. On a les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



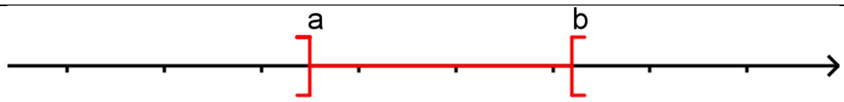
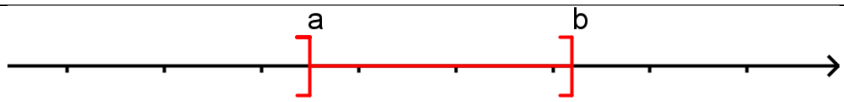
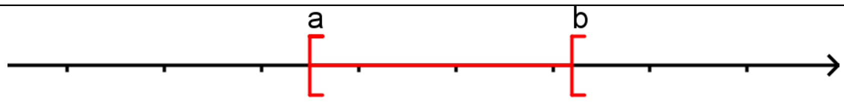
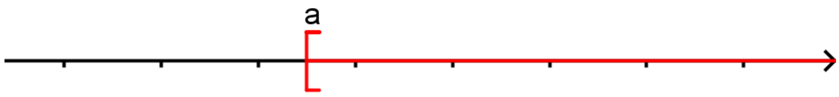
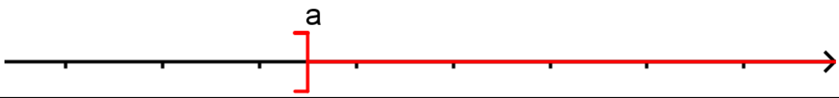
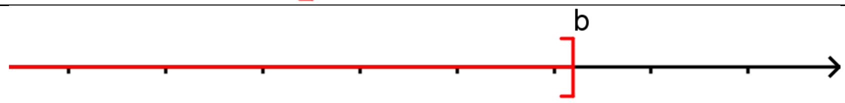
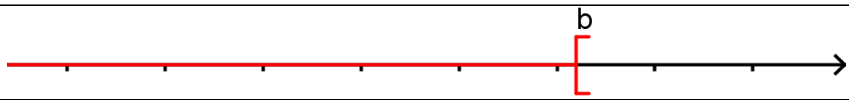
Il existe des nombres décimaux qui ne sont pas rationnels, c'est le cas de $\frac{1}{3}$ par exemple, dont l'écriture décimale est 0,3333...
Il existe des nombres réels qui ne sont pas rationnels, c'est le cas de $\sqrt{2}$ ou de π

2. Intervalles

Définition. *On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble de tous les nombres. On les appelle nombres réels.*

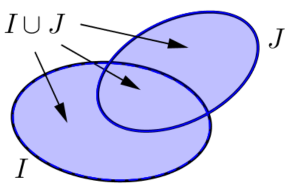
Définition. *Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont des ensembles de réels qui correspondent sur une droite graduée à un segment, une demi-droite ou même toute la droite entière.*
Ce sont les parties « d'un seul tenant », ou encore « sans » trou.

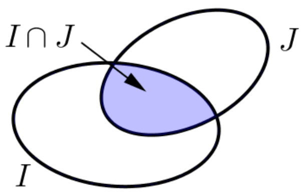
Les différents types d'intervalles sont représentés ci-dessous.

Notation	Nombres x	Représentation sur un axe
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a; b[$	$a < x < b$	
$]a; b]$	$a < x \leq b$	
$[a; b[$	$a \leq x < b$	
$[a; +\infty[$	$x \geq a$	
$]a; +\infty[$	$x > a$	
$]-\infty; b]$	$x \leq b$	
$]-\infty; b[$	$x < b$	

Définition. *L'<u>intersection</u> de deux ensembles I et J est l'ensemble des éléments qui appartiennent à I et J, notée $I \cap J$.*

Définition. *La <u>réunion</u> de deux ensembles I et J est l'ensemble des éléments qui appartiennent à I ou à J, notée $I \cup J$.*





<u>Exemple</u>

Soit $A = [-2; 1]$ et $B =]0; 5[$.
Seuls les nombres entre 0 et 1 (sauf 0) appartiennent aux deux ensembles, donc $A \cap B =]0; 1]$.
Tous les nombres de -2 à 5 (sauf 5) appartiennent au moins à un des deux ensembles A et B, donc $A \cup B = [-2; 5[$.

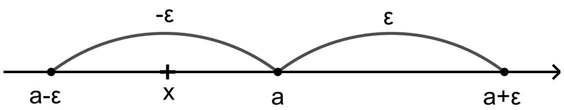
3. Encadrement d'un réel, valeur approchée et inégalités

Définition. *Soit a, b, x trois réels. On dit que a et b <u>encadrent</u> le réel x si $a \leq x \leq b$; le réel a est la <u>borne inférieure</u> de l'encadrement, b la <u>borne supérieure</u> et $b - a$ l'<u>amplitude</u>.*

<u>Exemple</u>

- $0{,}3 \leq \frac{1}{3} \leq 0{,}4$ est un encadrement d'amplitude 0,1 de $\frac{1}{3}$ (on dit aussi : un encadrement à 0,1 près).
- $0{,}28 \leq \frac{2}{7} \leq 0{,}29$ est un encadrement d'amplitude 0,01 de $\frac{2}{7}$.

Définition. *Soit ε un réel strictement positif et x et a deux réels. On dit que a est une <u>valeur approchée</u> de x à ε près si $a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$.*



<u>Exemple</u>

On a $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$, on peut donc dire qu'une valeur approchée de $\frac{1}{3}$ à 0,01 près est 0,33 ou 0,34 ou encore 0,337. En revanche 0,35 n'en est pas une car $0{,}35 - \frac{1}{3} > 0{,}01$.

Théorème (manipulation des inégalités). Soit a, b, c, d quatre réels vérifiant $a \leq b$ et $c \leq d$. Alors :
- $a + c \leq b + d$;
- et si de plus a, b, c, d **sont positifs**, $ac \leq bd$.

<u>Exemple</u>

- Si $x \in [-2; +\infty[$ et $y \in [3; +\infty[$, alors $x \geq -2$ et $y \geq 3$, d'où $x + y \geq -2 + 3$, soit $x + y \geq 1$, ce que l'on peut traduire par $x + y \in [1; +\infty[$.
- Si $0{,}1 \leq x \leq 0{,}2$ et $7 \leq y \leq 8$, alors $0{,}1 \times 7 \leq xy \leq 0{,}2 \times 8$, soit $0{,}7 \leq xy \leq 1{,}6$.

4. Valeur absolue d'un réel et distance entre deux réels

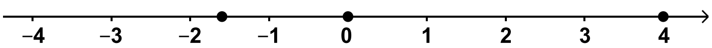
Définition. *Soit a un réel. On appelle valeur absolue de a, notée $|a|$ le réel défini par*

$$|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}.$$

Autrement dit, la valeur absolue « enlève » le signe « $-$ » ; elle est toujours positive.
La valeur absolue de x est la distance sur l'axe des réels entre 0 et x.
Pour tout réel x, on a $|-x| = |x|$.

<u>Exemple</u>

$|4| = 4$ et $|-1{,}7| = 1{,}7$.



Exemple

- L'équation $|x| = 2$ admet comme solution -2 et 2.
- L'équation $|x| = -3$ n'admet pas de solution car une valeur absolue ne peut pas être strictement négative.

Propriété. La distance entre deux réels a et b est égale à $|b-a|$.

Remarque.

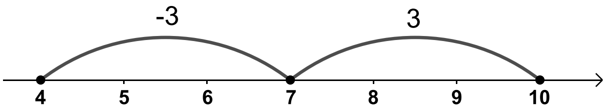
- La distance entre a et b est aussi égale à $|a-b|$ car $|a-b| = |-(b-a)| = |b-a|$.
- Dire que a est une valeur approchée de x à ε près revient à dire que $|x-a| \leq \varepsilon$.

Exemple

La distance entre 5 et -4 est $|-4-5| = |-9| = 9$.

Exemple

Résolvons l'équation $|x-7| = 3$ et l'inéquation $|x-7| \leq 3$.
Pour l'équation, on cherche les réels qui sont à la distance 3 de 7.



On voit donc qu'il y a $7+3 = 10$ et $7-3 = 4$. Ainsi $S = \{4; 10\}$.
Quant à l'inéquation, il s'agit des réels qui sont à une distance inférieure ou égale à 3 de 7, donc $S = [4; 10]$.