Généralités sur les fonctions

1. Notion de fonction

Définition. *Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de nombres réels. On définit une fonction f sur $\mathcal{D}$ lorsqu'on associe à chaque réel x de $\mathcal{D}$ un* ***unique*** *réel appelé* *<u>image</u>* *de x et noté $f(x)$.*
$\mathcal{D}$ est l'ensemble de définition de f.
Soit y un réel. Tout réel x tel que $f(x) = y$ est appelée *<u>un antécédent</u>* *de y par f.*

Définition. *On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble de tous les nombres. On les appelle* *<u>nombres réels</u>*.

Ainsi quand on dit qu'une fonction est définie sur $\mathbb{R}$, cela signifie que tout nombre à une image par la fonction.

Définition. *Étant donné deux réels a et b avec $a < b$, l'ensemble des réels compris entre a et b se note $[a; b]$ et s'appelle un* *<u>intervalle</u>*.

- **Différentes façons de définir une fonction**

  - *Fonction donnée par un tableau de valeurs*

<u>Exemple</u>

Un commerçant applique sur les prix d'un modèle de chaise des tarifs dégressifs selon le nombre d'unités d'achetées.

Nombre de chaises	1	2	3	4	5	6	7	8 et plus
Prix unitaire (€)	99	97	94	90	86	82	78	75

Si l'on appelle U la fonction qui au nombre de chaises achetées associe le prix unitaire d'une chaise, on $U(1) = 99$, $U(10) = 75$.
Cette fonction est définie sur l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.

  - *Fonction donnée par une courbe*

<u>Exemple</u>

Voir l'exercice 1 de la feuille (marégramme).

  - *Fonction donnée par une formule*

<u>Exemple</u>

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 4$. L'image de 3 est égale à $f(3) = 3^2 - 4 = 5$, et l'image de -3 vaut $(-3)^2 - 4 = 5$. Ainsi 3 et -3 sont <u>des</u> antécédents de 5 par f

Remarque. On retiendra qu'un nombre peut avoir plusieurs antécédents par une fonction. En revanche un nombre appartenant à l'ensemble de définition admet une seule image (par définition d'une fonction).

➢ *Par un programme de calcul (algorithme)*

Exemple

Voici un programme de calcul.

- On choisit un nombre non nul ;
- on lui ajoute 3 ;
- on élève le résultat obtenu au carré ;
- on retranche 9 ;
- on divise par le nombre de départ ;
- on retranche 5.

Soit f la fonction qui au nombre de départ choisi associe le résultat du programme.
En appelant x le nombre de départ, on a

$$A(x) = \frac{(x+3)^2 - 9}{x} - 5 = \frac{x^2 + 6x + 9 - 9}{x} - 5 = \frac{x^2 + 6x}{x} - 5 = x + 6 - 5 = x + 1,$$

et cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$ (tous les réels sauf 0).

❖ **Importance de l'ensemble de définition**

Une fonction, c'est le procédé d'association ET l'ensemble de définition. Par exemple les fonctions

$$f: [-1; 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \text{ et } g: [-2; 3] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

sont différentes bien que la « formule » soit la même.

❖ **Notion de variable muette**

La lettre x est une variable muette, elle ne joue aucun rôle si ce n'est celui de désigner le nombre de départ. Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$x \mapsto x^2, u \mapsto u^2 \text{ et } \blacksquare \mapsto \blacksquare^2$$

sont identiques.

2. Courbe représentative d'une fonction

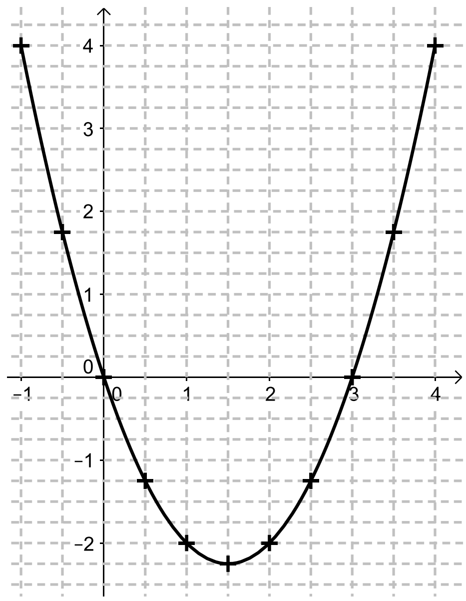
Exemple

Considérons la fonction f définie sur $[-1; 4]$ par $f(x) = x^2 - 3x$. Voici le tableau de valeurs de la fonction f avec un pas de 0,5.

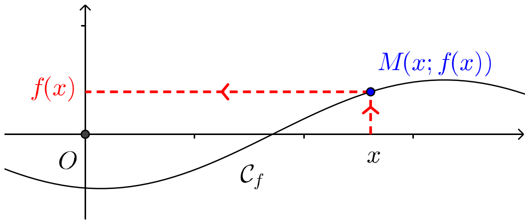
x	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$
$f(x)$	4	$1{,}75$	0	$-1{,}25$	-2	$-2{,}25$

x	2	$2{,}5$	3	$3{,}5$	4
$f(x)$	-2	$-1{,}25$	0	$1{,}75$	4

Dans un repère, on place les points de coordonnées $(-1; 4)$, $(-0{,}5; 1{,}75)$, …, $(4; 4)$.
En reliant ses points, on obtient la courbe représentative de f.



Définition. *Soit f une fonction et $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition. On appelle <u>courbe représentative</u> de f, notée $\mathcal{C}_f$, l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ vérifiant $y = f(x)$ lorsque x décrit $\mathcal{D}_f$.*
On parle de <u>courbe d'équation</u> $y = f(x)$.



Ainsi on a l'équivalence $M(x; y) \in \mathcal{C}_f \iff \begin{cases} x \in \mathcal{D}_f \\ y = f(x) \end{cases}$.

<u>Exemple</u>

Considérons la fonction f définie sur $[-2; 3]$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Parmi les points $A(-1; 6)$, $B(0; 2)$ et $C(10; 61)$, lesquels appartient à $\mathcal{C}_f$?

- Comme $f(-1) = 6$, on a $A \in \mathcal{C}_f$.
- Comme $f(0) = 2$, on a $B \notin \mathcal{C}_f$.
- L'image de 10 par f n'existe puisque 10 n'est pas dans l'ensemble de définition de f. Par conséquent $C \notin \mathcal{C}_f$.

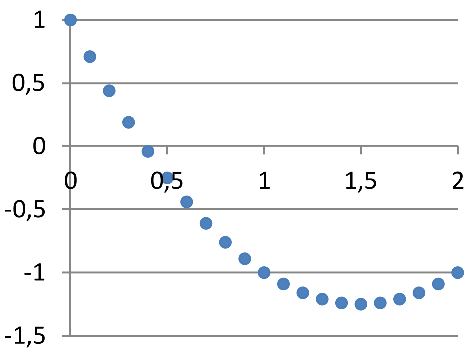
<u>Exemple</u>

Sur un tableur on a calculé les images par la fonction f définie par

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

des nombres compris entre 0 et 2 avec un pas de 0,1.
On a ensuite créé un nuage le nuage de points $(0; 1)$, $(0{,}1; 0{,}71)$, $(0{,}2; 0{,}44)$, …, $(2; -1)$. On a alors obtenu le graphique suivant.

	A	B
1	x	f(x)
2		
3	0	1
4	0,1	0,71
5	0,2	0,44
6	0,3	0,19
7	0,4	-0,04
8	0,5	-0,25
9	0,6	-0,44
10	0,7	-0,61
11	0,8	-0,76
12	0,9	-0,89
13	1	-1
14	1,1	-1,09
15	1,2	-1,16
16	1,3	-1,21
17	1,4	-1,24
18	1,5	-1,25
19	1,6	-1,24
20	1,7	-1,21
21	1,8	-1,16
22	1,9	-1,09
23	2	-1

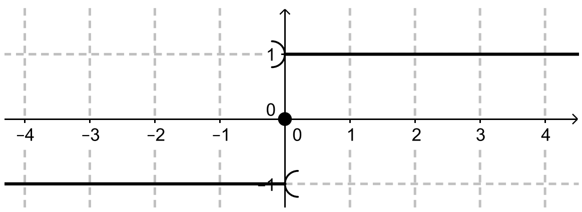


On comprend alors le principe de fonctionnement d'une calculatrice pour tracer une courbe : elle choisit un pas suffisamment petit pour donner à la courbe un aspect « lisse » en augmentant le nombre de points.

<u>Exemple</u>

La fonction signe est définie sur $\mathbb{R}$ par

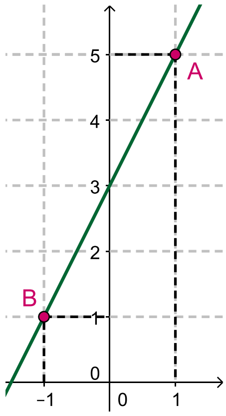
$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}.$$



La courbe représentative de cette fonction ne peut pas se dessiner sans lever le crayon. Elle est constituée de deux demi-droites et d'un point.
Le demi-cercle tourné vers l'extérieur de la demi-droite signifie que l'extrémité de celle-ci ne fait pas partie de la courbe représentative de sgn.

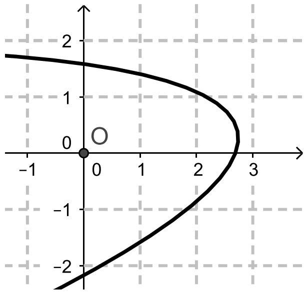
Exemple

Soit à dessiner la courbe D d'équation $y = 2x + 3$. Par définition c'est la courbe représentative de la fonction affine f définie par $f(x) = 2x + 3$.
On sait d'après le cours de troisième que la courbe représentative d'une telle fonction est une droite, il suffit donc de connaître deux de ses points. On a par exemple $f(-1) = 1$ et $f(1) = 5$, cela implique donc que les points des coordonnées $A(-1; 1)$ et $B(1; 5)$ appartiennent à D.
L'ensemble d'équation $y = 2x + 3$ est donc la droite (AB).



Exemple

La courbe ci-dessous n'est pas la courbe représentative d'une fonction. En effet quelle serait l'image de 3 par exemple ?



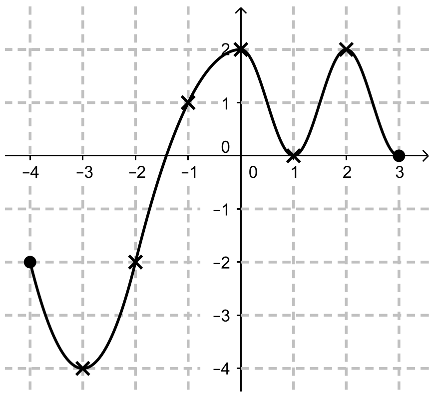
3. Variations et extrema d'une fonction

Intuitivement, on dit qu'une fonction est croissante lorsque sa courbe représentative « monte » quand on la parcourt de gauche à droite. Elle est dite décroissante sinon.

Le maximum d'une fonction est la plus grande des images, le minimum la plus petite. Un extremum est un minimum ou un maximum (une valeur « extrême » de la fonction).

Exemple

On considère la fonction f représentée ci-contre.
Elle est croissante sur les intervalles $[-3\,; 0]$ et $[1; 2]$ et décroissante sur les intervalles $[-4; -3]$, $[0; 1]$ et $[2; 3]$. On résume cela dans un tableau de variations.



x	-4		-3		0		1		2		3
variations de f	-2	↘	-4	↗	2	↘	0	↗	2	↘	0

Le minimum de f sur $[-4; 3]$ est -4, atteint en -3.
Le minimum de f sur $[1; 3]$ est 0, atteint en 1 en 3.
Le maximum de f sur $[-1; 0]$ est 2, atteint en 0.

Exemple

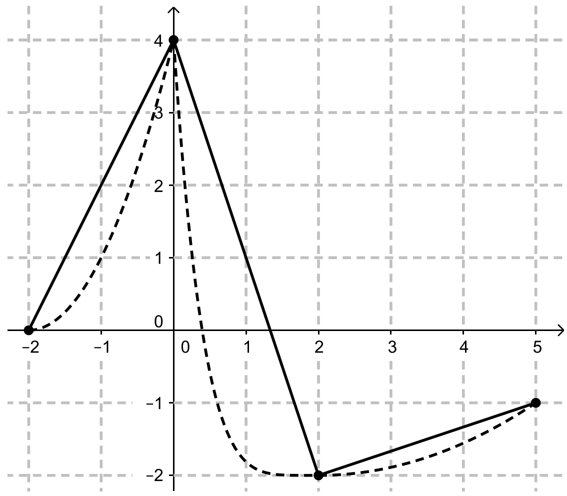
Soit f une fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-2		0		2		5
variations de f	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1

1. Donner l'ensemble de définition de f et dessiner deux courbes représentatives possibles.
2. Répondre par vrai ou par faux, justifier.
   a. $f(3) \leq f(4)$.
   b. $f(1) = 2$.
   c. $f(1) \geq f(4)$.
   d. $f(-1) > f(3)$.

Réponse.

1. La courbe doit passer par les points de coordonnées $(-2; 0)$, $(0; 4)$, $(2; -2)$ et $(5; -1)$. Entre deux points il suffit de respecter le sens de variation. On a $\mathcal{D}_f = [-2; 5]$.



2. Il faut se méfier des mauvaises intuitions !
   a. Vrai. En effet, 3 et 4 appartiennent tous les deux à l'intervalle $[2\,;5]$ où la fonction f est croissante. Comme $3 < 4$, on a $f(3) < f(4)$.
   b. Faux. La seule chose que l'on peut dire est $-2 \leq f(1) \leq 4$. En effet, comme 1 appartient à l'intervalle $[0; 2]$ où la fonction g est décroissante, on a $0 < 1 < 2 \Longrightarrow f(0) \geq f(1) \geq f(2) \Longrightarrow 4 \geq f(1) \geq -2$.
   c. Faux. Voir un contre-exemple sur le graphique. On ne peut pas utiliser la méthode la question a) car 1 et 4 n'appartiennent pas à un intervalle où la fonction est monotone.
   d. Vrai. Le raisonnement se fait en deux parties en se plaçant sur des intervalles où f est monotone.
   - D'une part -2 et -1 appartiennt à l'intervalle $[-2; 0]$ où f est croissante. On a donc $f(-2) \leq f(-1)$, mais comme $f(-2) = 0$, on arrive à la conclusion $0 \leq f(-1)$.
   - D'autre part 3 et 5 appartiennent à l'intervalle $[2; 5]$ où f est croissante. On a donc $f(3) \leq f(5) = -1$.

   En comparant les deux inégalités obtenues, on a
   $$f(3) \leq -1 < 0 \leq f(-1),$$
   ce qui prouve que $f(3) < f(-1)$.