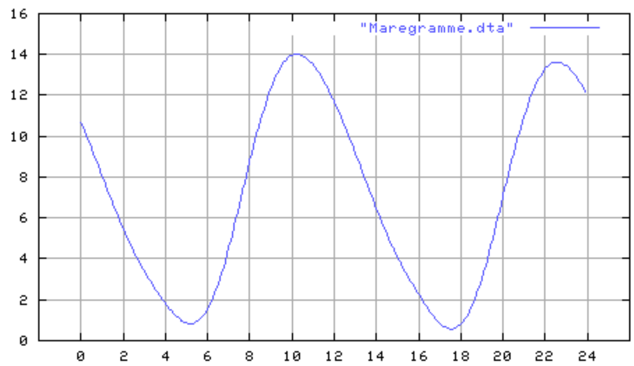
Activité sur les fonctions

Le graphique ci-dessous est un marégramme, il représente la variation de la hauteur d'eau en mètres à Granville, dans la Manche, le 20 février 2007, jour de grande marée, en fonction de l'heure.



Partie A – Lecture de la courbe

1. Rajouter la légende des axes.
2. Lors de cette journée, quelle était la hauteur d'eau à 6 h ? à 12 h ? à 16 h ?
3. À quelles heures la hauteur d'eau était-elle de 8 m ? Laisser apparent les traits de lecture.
4. Un bateau ayant un tirant d'eau (c'est-à-dire la hauteur de sa coque immergée) de 6 m est entré dans le port ce jour-là. Quelles sont les horaires possibles de son arrivée ?
5. Quelle a été la hauteur d'eau maximale ? minimale ? Préciser les heures.
6. On schématise la courbe précédente dans un tableau qui décrit son comportement. Le recopier et le compléter.
7. Donner un encadrement de la hauteur sur plage horaire de 8h à 14h.

temps	0	5	24
variations de la hauteur d'eau	10,5	1	

Partie B – Introduction d'une fonction

Pour un temps t donné, on note $h(t)$ la hauteur d'eau correspondante. On définit ainsi une fonction sur l'intervalle $[0; 24]$.

1. Donner $h(6)$, $h(12)$ et $h(16)$
2. Résoudre l'équation $h(t) = 8$ d'inconnue t.
3. Résoudre l'inéquation $h(t) \geq 6$ d'inconnue t.
4. Donner le minimum et le maximum de h et préciser pour quelles valeurs de t ils sont atteints.
5. Citer deux intervalles où la fonction est décroissante puis deux intervalles où elle est croissante.
6. Donner un encadrement de $h(t)$ lorsque $8 \leq t \leq 14$.

Généralités sur les fonctions – Exercices

Notion de fonction et algorithme

1 Voici le tableau de valeur de la fonction P qui donne le prix à payer en fonction du nombre de photos à imprimer commandées sur un site internet.

Nombre de photos	50	100	300	500	800
Prix en euros	8	14	36	60	64

1. Que vaut $P(300)$? Interpréter le résultat.
2. Que peut-on dire de $P(600)$?

2 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3; 3]$ par $f(x) = x^2 - 1$. Vrai ou faux ? Justifier.

a. L'image de 3 par f est 8.
b. L'image de 4 par f est 15.
c. L'image de -1 par f est -2.
d. L'image de $\sqrt{2}$ par f est 1.
e. L'antécédent de 8 par f est 3.
f. Le réel -2 n'a pas d'antécédent par f.

3 On considère l'algorithme ci-contre. Donner toutes les bonnes réponses.

Saisir x
$a \leftarrow x + 1$
$b \leftarrow a^2 - 4$
Afficher b

1. Si l'utilisateur entre -1, le programme retourne
   a. 0 **b.** -4 **c.** -3
2. Si l'utilisateur entre 0, le programme retourne
   a. -3 **b.** 1 **c.** -4
3. Pour obtenir 0, on peut entrer
   a. -1 **b.** 1 **c.** -3
4. Une expression algébrique de la fonction ainsi définie est
   a. $x^2 - 3$ **b.** $x^2 + 2x - 3$ **c.** $(x + 1)^2 - 4$

4 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2}{x-1} - 1$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les images de 0 ; -1 ; 5 ; $\frac{1}{3}$.

5 Soit S la fonction définie sur les entiers naturels qui à x associe la somme de ses chiffres.

1. Calculer $S(554)$, $S(100)$, $S(2018)$, $S(5)$.
2. Donner les antécédents de 2 compris entre 0 et 100.
3. Donner les antécédents de 1.
4. Donner les antécédents de 3 compris entre 0 et 10 000.
5. Tout entier naturel admet-il un antécédent par S ?

6 On considère l'algorithme ci-contre où x est un nombre entier. Il définit une fonction notée f.

Saisir x
Si x est pair
  $a \leftarrow \frac{x}{2}$
  Sinon
  $a \leftarrow 3x + 1$
FinSi
Afficher a

1. Calculer $f(10)$ et $f(5)$.
2. Calculer $f\big(f(7)\big)$.
3. Calculer $f\Big(f\big(f(4)\big)\Big)$.
4. Déterminer les antécédents de 8 puis de 10.

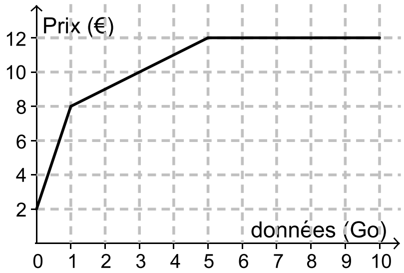
7 Vrai ou faux ? Justifier.

a. Tout nombre de l'ensemble de définition d'une fonction f a au moins une image.
b. Tout nombre de l'ensemble de définition d'une fonction f est l'antécédent d'au moins un nombre par f.

c. Le processus qui, à un nombre entier, associe 0 s'il est pair ou 1 s'il est impair est une fonction.

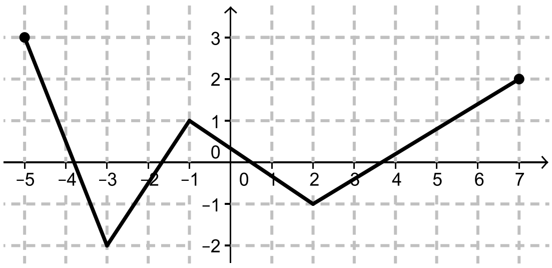
Courbe représentative

8 La courbe ci-dessous représente le prix mensuel P d'un forfait téléphonique en fonction des données internet consommées.



1. Sur quel intervalle la fonction P est-elle définie ?
2. Quel est le prix payé pour 6 Go consommés ?
3. Donner la valeur de $P(1)$ et $P(7)$.
4. Pour quelle consommation paie-t-on moins de 8 € par mois ? Plus de 10 € ?

9 On considère la fonction f dont la courbe est donnée ci-dessous. Indiquer la ou les bonnes réponses.



1. L'ensemble de définition de f est
   a. $[-2; 3]$ **b.** $[-5; 7]$ **c.** $[3; -2]$
2. L'image de 2 par f est
   a. 7 **b.** -1 **c.** $f(-1)$
3. Les antécédents de -1 par f sont
   a. au nombre de 3 **b.** au nombre de 4 **c.** négatifs

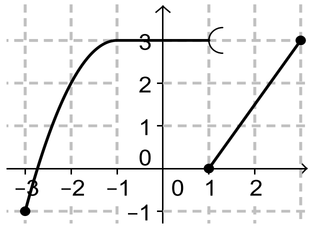
10 On considère une fonction f et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Compléter.
1. Dire que $A(-1; 2) \in \mathcal{C}_f$ signifie que $f(\dots) = \dots$
2. Dire que l'image de 5 par f est 3 équivaut à dire que le point B de coordonnées $(\dots ; \dots)$ appartient à …
3. Dire que 5 est un antécédent de 3 par f revient à dire que $f(\dots) = \dots$ ou encore $C(\dots ; \dots) \in \mathcal{C}_f$.

11 Le point $A(2; 1)$ appartient-il à la courbe représentative de la fonction h définie par $h(x) = 3x^2 - 2x + 1$? Et le point $B(0; 1)$?

12 Dans un repère, quelle est l'ordonnée du point A d'abscisse -2 appartenant à la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 3x - 2$?

13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
1. Parmi les points $A(1; 2)$, $B(-1; 0)$, $C(5; 2)$ lesquels appartiennent à $\mathcal{C}_f$?
2. Donner l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse -3.
3. Citer deux points de $\mathcal{C}_f$ ayant la même ordonnée.

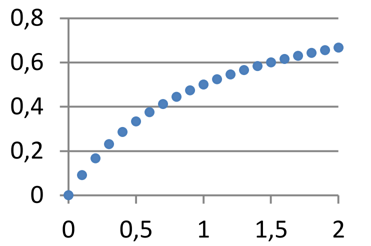
14 On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-contre.



1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Quelle est l'image de 3 ? de 1 ?
3. Donner une infinité d'antécédents de 3.
4. Donner les antécédents entiers de 3.
5. Donner tous les nombres ayant un unique antécédent.

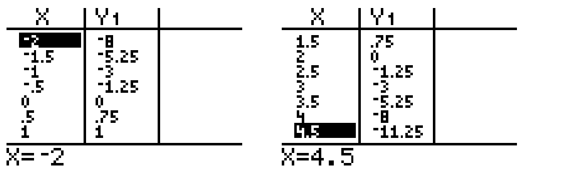
15 À l'aide d'un tableur, on souhaite représenter la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

	A	B
1	**x**	**f(x)**
2	0	0
3	0,1	0,0909
4	0,2	0,1667
5	0,3	0,2308
6	0,4	0,2857
7	0,5	0,3333
⋮	⋮	⋮
	2	0,6667

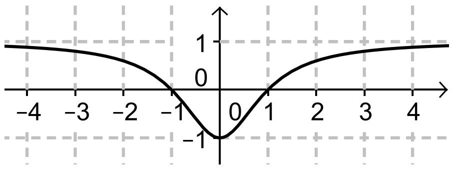


1. La première colonne est remplie par les valeurs de x allant de 0 à 2. Quel pas a été choisi ? Compléter le numéro de la ligne dans laquelle se situe 2.
2. Quelle formule faut-il saisir en B2 ? Jusqu'où faut-il l'étendre ?
3. Quel nuage de points a été représenté pour obtenir le graphique ?

16 Avec la calculatrice on a construit la table de la fonction f définie par $f(x) = 2x - x^2$.
Utiliser les impressions d'écran pour construire sur votre feuille la courbe de f sur $[-1; 3]$.



17 On donne la courbe représentative d'une des 4 fonctions ci-dessous. De laquelle s'agit-il ? Justifier sans calculatrice.



$f(x) = x^2 - 1$ $\qquad g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

$h(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ $\qquad k(x) = 1 - x^2$

18 Soit f la fonction définie sur $[-2; 2]$ par

$$f(x) = 2x^2 - x - 3.$$

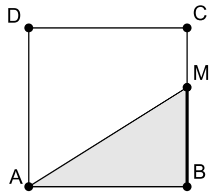
1. À l'aide de la fonction table de la calculatrice, compléter le tableau suivant.

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0
$f(x)$					

x	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$f(x)$				

2. Tracer la courbe représentative de f sur votre feuille.

19 On considère un carré $ABCD$ de côté 4 et un point M du segment $[BC]$. On pose $x = BM$.



1. Quelles sont les valeurs possibles pour x lorsqu'on déplace M ?

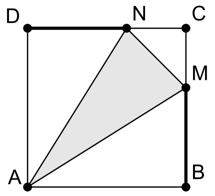
2. On note $S(x)$ l'aire du triangle ABM. Compléter le tableau de valeurs suivant.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$S(x)$					4			7	

3. À l'aide du tableau, construire la courbe représentative de S dans un repère.

4. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de S ?

20 On considère un carré $ABCD$ de côté 4, M un point du segment $[BC]$ et N un point du segment $[CD]$ tel que $BM = DN$. On pose $x = BM$.



1. Quelles sont les valeurs possibles pour x lorsqu'on déplace M ?

2. On note $S(x)$ l'aire du triangle AMN. Compléter le tableau de valeurs suivant.

x	0	1	2	3	4
$S(x)$		7,5			

3. À l'aide du tableau, construire la courbe représentative de S dans un repère.

4. La fonction S semble-t-elle affine ?

21 (Fonction partie entière)

Soit E la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x.

1. Calculer $E(5)$, $E(7{,}6)$, $E(\pi)$, $E(-2)$, $E(-2{,}1)$.

2. Donner les antécédents de 3 par E.

3. Construire la courbe représentative de E sur $[-3;3]$.

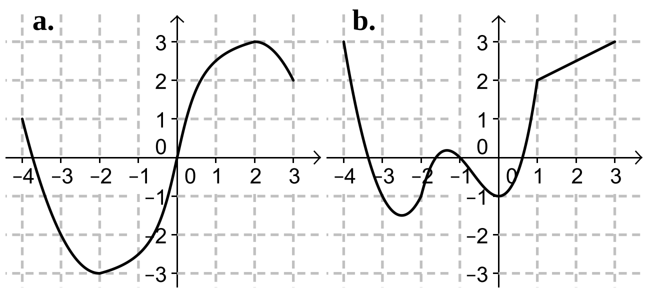
Variations et extrema

22 On a représenté ci-dessous deux fonctions f définies sur $[-4;3]$. Pour chacune d'entre elle

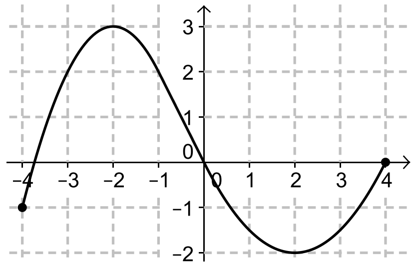
a. Construire le tableau de variations.

b. Décrire les variations en une phrase.

c. Préciser les extrema de f sur $[-4;3]$.



23 On considère une fonction f dont la courbe est donnée ci-dessous.



1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

2. Dresser le tableau de variation de f.

3. Donner le minimum et le maximum de f sur $[-4;4]$ et préciser pour quelles valeurs ils sont atteints.

4. Donner un encadrement de $f(x)$ dans chacun des cas suivants.

a. $-2 \leq x \leq 2$ **b.** $0 \leq x \leq 4$ **c.** $-3 \leq x \leq 4$

24 Soit f une fonction dont le tableau de variation est le suivant.

x	-3		1		3		6
variations de f	1	↗	4	↘	-2	↗	0

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

2. Donner 4 points appartenant à la courbe de f.

3. Tracer une courbe possible pour f.

4. Décrire en une phrase les variations de f.

5. Donner le minimum et le maximum de f et préciser pour quelles valeurs ils sont atteints sur

a. l'intervalle $[-3;6]$ **b.** l'intervalle $[3;6]$

6. Compléter avec $\leq$, $\geq$ ou ? si les informations dont on dispose ne permettent pas de conclure.

a. $f(-3) \ldots f(-1)$ **b.** $f(1) \ldots f(2)$

c. $f(-2) \ldots f(2)$ **d.** $f(4) \ldots f(\pi)$

e. $f(-2) \ldots f(5)$

25 Le tableau de variation d'une fonction f est donné ci-dessous. On a complété avec quelques valeurs.

x	-5		-3		-1		1		2		4
f	2	↗	5	↘	0	↘	-4	↗	0	↗	3

1. Tracer une courbe possible pour f.

2. Combien 3 admet-il d'antécédents ?

26 À l'aide de la calculatrice, conjecturer les tableaux de variation des fonctions suivantes définies sur l'intervalle $[-4;4]$.

a. $f(x) = x + 3$ **b.** $g(x) = -2x + 3$

c. $h(x) = x^2 - 2x - 2$ **d.** $k(x) = x^3 - 3x^2$

27 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [-2;3]$ et vérifiant pour tout $x \in I, f(x) \geq 1$.

1. Donner quelques présentations graphiques de fonctions vérifiant cette condition. Le minimum de f est-il 1 ?

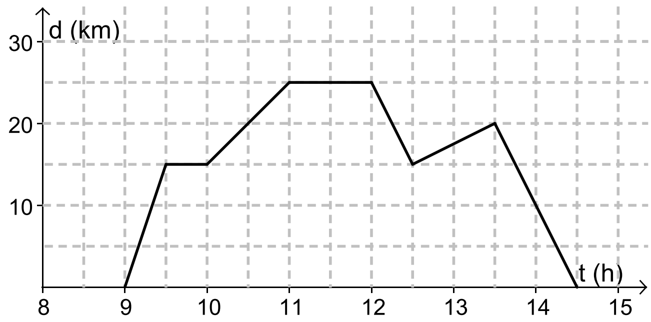
2. On suppose de plus que $f(2) = 1$. Reprendre alors la question précédente.

28 On considère la fonction f définie sur $[-2;8]$ par $f(x) = \frac{x^2+1}{x+5}$.

1. Tracer la courbe sur une calculatrice ou GeoGebra.
2. Par lecture graphique, construire le tableau de variations de f.
3. **a.** Quel semble être le minimum de f ?
   b. Calculer $f(0{,}1)$. Conclusion ?

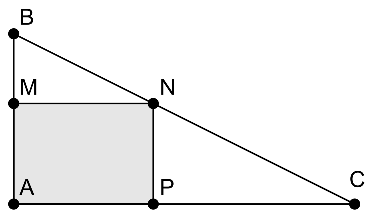
Problèmes

29 Au cours de ses vacances, Vincent a effectué une promenade à vélo. Le graphique indique la distance d (en kilomètres) qui le sépare de sa maison en fonction de l'heure t (en heures).



1. Sur quelles périodes de temps Vincent s'est-il éloigné de la maison ?
2. Il a effectué deux pauses. Préciser les horaires.
3. Sur quelles périodes de temps s'est-il rapproché de la maison ?
4. À 10 h 30, à quelle distance se trouvait-il de sa maison ? Quelle distance avait-t-il parcourue alors ?
   Mêmes questions à 12 h 30.
5. À quelle distance maximale s'est-il éloigné de sa maison ?
6. Quelle est la vitesse moyenne entre 10 h et 11 h ? Entre 14 h et 14 h 30 ?
7. Représenter graphiquement la distance parcourue en fonction du temps.

30 ABC est un triangle rectangle en A avec $AB = 4$ et $AC = 8$. Soit M un point du segment $[AB]$, N et P les points appartenant respectivement aux segments $[BC]$ et $[AC]$ tels que $AMNP$ soit un rectangle.



1. Dans cette question, on suppose que $AM = 1$. Faire la figure et calculer l'aire du rectangle.

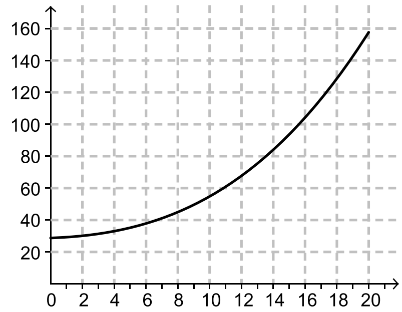
Dans la suite, on pose $AM = x$.

2. Démontrer que à l'aide du théorème de Thalès que $MN = 2(4 - x)$.

On nomme f la fonction qui à x associe l'aire du rectangle $AMNP$.

3. Déterminer l'ensemble de définition de f.
4. Montrer que $f(x) = 8x - 2x^2$.
5. À l'aide de la calculatrice :
   a. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles on a $f(x) = 6$.
   b. Déterminer la position du point M pour que l'aire du rectangle soit maximale. Préciser alors cette aire.

31 Une entreprise commercialise des téléphones. Par an, elle fabrique entre 0 et 2000 appareils. Le coût de production f, exprimé en milliers d'euros, est fonction du nombre de téléphones fabriqués, en centaines. La courbe de f est donnée ci-contre.

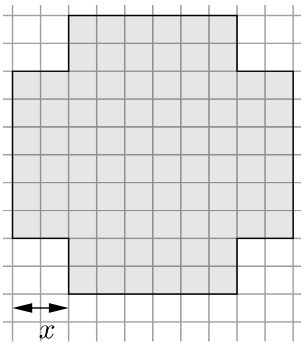


1. Quel est le coût de production de 1000 téléphones ?
2. Quelle quantité maximale d'objets l'entreprise peut-elle produire pour un coût inférieur à 100 000 € ?
3. On s'intéresse au coût moyen de production des téléphones.
   a. Justifier que si l'entreprise fabrique 2000 téléphones, alors le coût moyen de production de l'un d'eux est environ 80 €.
   b. Recopier et compléter le tableau suivant.

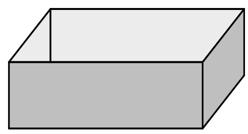
Nombre de téléphones produits (en centaines)	2	4	…	18	20
Coût moyen par téléphone (en euros)					80

   c. Tracer la courbe du coût moyen dans un repère. (unité en abscisse : centaine de téléphones, en ordonnée : prix en euros).
   d. Estimer le nombre de téléphone qu'il faut fabriquer pour obtenir un coût moyen minimal.

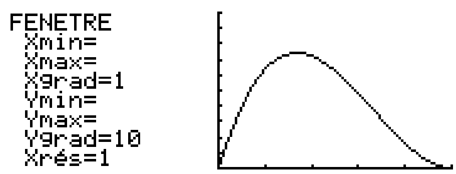
32 On dispose d'un carré de métal de 10 cm de côté. Pour fabriquer une boîte sans couvercle, on enlève à chaque coin un carré de côté x cm et on relève les bords par pliage. La boîte obtenue est un pavé droit.
On souhaite déterminer les dimensions de la boîte de volume maximal.



1. Calculer le volume de la boîte si $x = 2$.
   On note V la fonction qui à x associe le volume.



2. Donner l'ensemble de définition de V.
3. Démontrer que $V(x) = 100x - 40x^2 + 4x^3$.
4. Calculer $V(3)$ puis $V\left(\frac{5}{3}\right)$ à 10^{-2} près.
5. **a.** Compléter les paramètres du menu fenêtre de la calculatrice ci-dessous pour obtenir la courbe de V telle qu'elle est représentée.



   b. Déterminer graphiquement pour quelle(s) valeurs(s) de x le volume est maximal. Quel est ce volume ?