# Généralités sur les fonctions

## 1. Notion de fonction

**Définition.** *Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de réels. On définit une fonction $f$ sur $\mathcal{D}$ lorsqu'on associe à chaque réel $x$ de $\mathcal{D}$ un* **unique** *réel appelé* <u>*image*</u> *de $x$ et noté $f(x)$.*
*$\mathcal{D}$ est l'ensemble de définition de $f$.*
*Soit $y$ un réel. Tout réel $x$ tel que $f(x) = y$ est appelée* <u>*un antécédent*</u> *de $y$ par $f$.*

Ainsi quand on dit qu'une fonction est définie sur $\mathbb{R}$, cela signifie que tout nombre à une image par la fonction.

❖ **Différentes façons de définir une fonction**

➢ *Fonction donnée par un tableau de valeurs*

**<u>Exemple</u>**

Un commerçant applique sur les prix d'un modèle de chaise des tarifs dégressifs selon le nombre d'unités d'achetées.

| Nombre de chaises | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 et plus |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Prix unitaire (€) | 99 | 97 | 94 | 90 | 86 | 82 | 78 | 75 |

Si l'on appelle $U$ la fonction qui au nombre de chaises achetées associe le prix unitaire d'une chaise, on $U(1) = 99$, $U(10) = 75$.
Cette fonction est définie sur l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.

➢ *Par un programme de calcul (algorithme)*

**<u>Exemple</u>**

Voici un programme de calcul.

- On choisit un nombre non nul $x$ ;
- on lui ajoute 3 ;
- on élève le résultat obtenu au carré ;
- on retranche 9 ;
- on divise par le nombre de départ ;
- on retranche 5.

| |
|---|
| $y \leftarrow x + 3$ |
| $y \leftarrow y^2$ |
| $y \leftarrow y - 9$ |
| $y \leftarrow \frac{y}{x}$ |
| $y \leftarrow y - 5$ |
| retourner $y$ |

L'algorithme $A$ ci-contre avec pour entrée $x$

Soit $A$ la fonction qui au nombre de départ choisi associe le résultat du programme.
En appelant $x$ le nombre de départ, on a

$$A(x) = \frac{(x+3)^2 - 9}{x} - 5 = \frac{x^2 + 6x + 9 - 9}{x} - 5 = \frac{x^2 + 6x}{x} - 5$$
$$= x + 6 - 5 = x + 1,$$

et cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$ (tous les réels sauf 0).

➢ *Fonction donnée par une courbe*

**<u>Exemple</u>**

Voir l'exercice 1 de la feuille (marégramme).

➢ *Fonction donnée par une formule*

**Exemple**

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 4$. L'image de 3 est égale à $f(3) = 3^2 - 4 = 5$, et l'image de $-3$ vaut $(-3)^2 - 4 = 5$. Ainsi 3 et $-3$ sont des antécédents de 5 par $f$

**Remarque.** On retiendra qu'un nombre peut avoir plusieurs antécédents par une fonction. En revanche un nombre appartenant à l'ensemble de définition admet une seule image (par définition d'une fonction).

❖ **Importance de l'ensemble de définition**

Une fonction, c'est le procédé d'association ET l'ensemble de définition. Par exemple les fonctions

$$f: [-1; 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \text{ et } g: [-2; 3] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

sont différentes bien que la « formule » soit la même.

❖ **Notion de variable muette**

La lettre $x$ est une variable muette, elle ne joue aucun rôle si ce n'est celui de désigner le nombre de départ. Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$x \mapsto x^2, u \mapsto u^2 \text{ et } \blacksquare \mapsto \blacksquare^2$$

sont identiques.

## 2. Courbe représentative d'une fonction

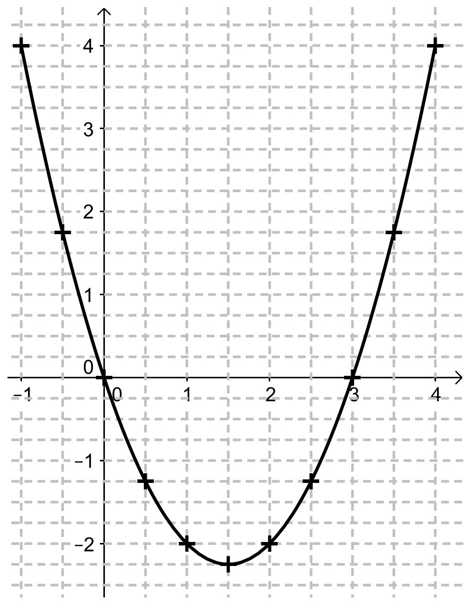
**Exemple**

Considérons la fonction $f$ définie sur $[-1; 4]$ par $f(x) = x^2 - 3x$. Voici le tableau de valeurs de la fonction $f$ avec un pas de 0,5.

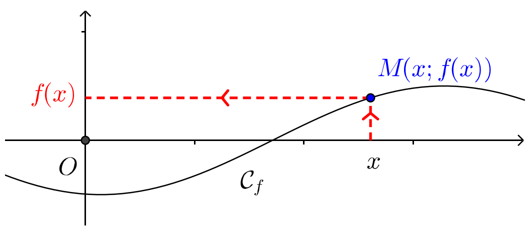
| $x$ | $-1$ | $-0{,}5$ | $0$ | $0{,}5$ | $1$ | $1{,}5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $4$ | $1{,}75$ | $0$ | $-1{,}25$ | $-2$ | $-2{,}25$ |

| $x$ | $2$ | $2{,}5$ | $3$ | $3{,}5$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-2$ | $-1{,}25$ | $0$ | $1{,}75$ | $4$ |

Dans un repère, on place les points de coordonnées $(-1; 4)$, $(-0{,}5; 1{,}75)$, …, $(4; 4)$.
En reliant ses points, on obtient la courbe représentative de $f$.




**Définition.** *Soit $f$ une fonction et $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition. On appelle courbe représentative de $f$, notée $\mathcal{C}_f$, l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ vérifiant $y = f(x)$ lorsque $x$ décrit $\mathcal{D}_f$.*
*On parle de courbe d'équation $y = f(x)$.*



Ainsi on a l'équivalence $M(x;y) \in \mathcal{C}_f \iff \begin{cases} x \in \mathcal{D}_f \\ y = f(x) \end{cases}$.

**Exemple**

Considérons la fonction $f$ définie sur $[-2;3]$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Parmi les points $A(-1;6)$, $B(0;2)$ et $C(10;61)$, lesquels appartient à $\mathcal{C}_f$ ?

- Comme $f(-1) = 6$, on a $A \in \mathcal{C}_f$.
- Comme $f(0) = 2$, on a $B \notin \mathcal{C}_f$.
- L'image de 10 par $f$ n'existe puisque 10 n'est pas dans l'ensemble de définition de $f$. Par conséquent $C \notin \mathcal{C}_f$.

**Exemple**

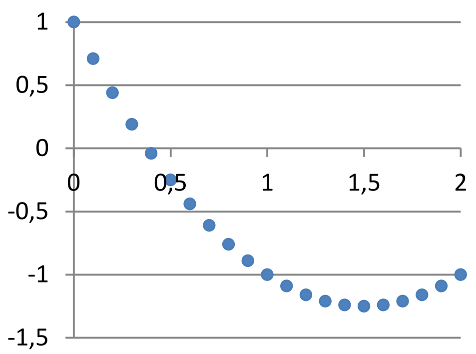
Sur un tableur on a calculé les images par la fonction $f$ définie par

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

des nombres compris entre 0 et 2 avec un pas de 0,1.

On a ensuite créé un nuage le nuage de points $(0;1)$, $(0{,}1;0{,}71)$, $(0{,}2;0{,}44)$, …, $(2;-1)$. On a alors obtenu le graphique suivant.

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | x | f(x) |
| 2 | | |
| 3 | 0 | 1 |
| 4 | 0,1 | 0,71 |
| 5 | 0,2 | 0,44 |
| 6 | 0,3 | 0,19 |
| 7 | 0,4 | -0,04 |
| 8 | 0,5 | -0,25 |
| 9 | 0,6 | -0,44 |
| 10 | 0,7 | -0,61 |
| 11 | 0,8 | -0,76 |
| 12 | 0,9 | -0,89 |
| 13 | 1 | -1 |
| 14 | 1,1 | -1,09 |
| 15 | 1,2 | -1,16 |
| 16 | 1,3 | -1,21 |
| 17 | 1,4 | -1,24 |
| 18 | 1,5 | -1,25 |
| 19 | 1,6 | -1,24 |
| 20 | 1,7 | -1,21 |
| 21 | 1,8 | -1,16 |
| 22 | 1,9 | -1,09 |
| 23 | 2 | -1 |

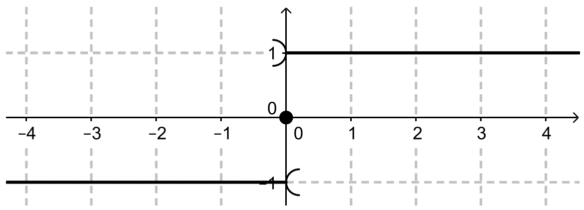



On comprend alors le principe de fonctionnement d'une calculatrice pour tracer une courbe : elle choisit un pas suffisamment petit pour donner à la courbe un aspect « lisse » en augmentant le nombre de points.

**Exemple**

La fonction signe est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}.$$




La courbe représentative de cette fonction ne peut pas se dessiner sans lever le crayon. Elle est constituée de deux demi-droites et d'un point.

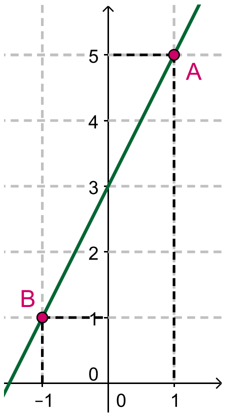
Le demi-cercle tourné vers l'extérieur de la demi-droite signifie que l'extrémité de celle-ci ne fait pas partie de la courbe représentative de sgn.

**Exemple**

Soit à dessiner la courbe $D$ d'équation $y = 2x + 3$. Par définition c'est la courbe représentative de la fonction affine $f$ définie par $f(x) = 2x + 3$.

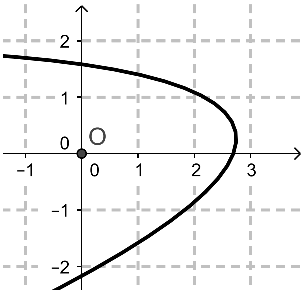
On sait d'après le cours de troisième que la courbe représentative d'une telle fonction est une droite, il suffit donc de connaître deux de ses points. On a par exemple $f(-1) = 1$ et $f(1) = 5$, cela implique donc que les points des coordonnées $A(-1;1)$ et $B(1;5)$ appartiennent à $D$.

L'ensemble d'équation $y = 2x + 3$ est donc la droite $(AB)$.




**Exemple**

La courbe ci-dessous n'est pas la courbe représentative d'une fonction. En effet quelle serait l'image de 3 par exemple ?




## 3. Variations et extrema d'une fonction

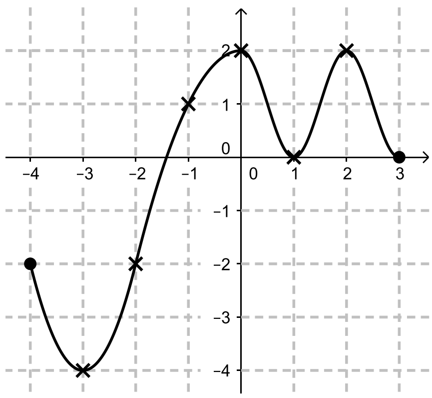
Intuitivement, on dit qu'une fonction est croissante lorsque sa courbe représentative « monte » quand on la parcourt de gauche à droite. Elle est dite décroissante si la courbe « descend ».

Le maximum d'une fonction est la plus grande des images, le minimum la plus petite. Un extremum est un minimum ou un maximum (une valeur « extrême » de la fonction).

**Exemple**

On considère la fonction $f$ représentée ci-contre.

Elle est croissante sur les intervalles $[-3\,;0]$ et $[1;2]$ et décroissante sur les intervalles $[-4;-3]$, $[0;1]$ et $[2;3]$. On résume cela dans un tableau de variations.



| $x$ | $-4$ | | $-3$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| variations de $f$ | $-2$ | ↘ | $-4$ | ↗ | $2$ | ↘ | $0$ | ↗ | $2$ | ↘ | $0$ |

Le maximum de $f$ sur $[-4;1]$ est 2, atteint en 0.
Le minimum de $f$ sur $[1;3]$ est 0, atteint en 1 et 3
Le minmum de $f$ sur $[-1;0]$ est 1, atteint en $-1$.

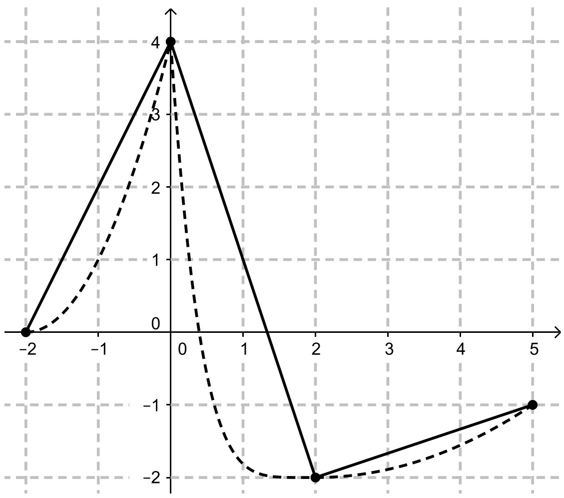
**Exemple**

Soit $f$ une fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| variations de $f$ | $0$ | ↗ | $4$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $-1$ |

1. Donner l'ensemble de définition de $f$ et dessiner deux courbes représentatives possibles.
2. Répondre par vrai ou par faux, justifier.
   **a.** $f(3) \leq f(4)$.
   **b.** $f(1) = 2$.
   **c.** $f(1) \geq f(4)$.
   **d.** $f(-1) > f(3)$.
3. Donner un encadrement de $f(x)$ pour $x \in [0; 2]$.

**Réponse.**




1. La courbe doit passer par les points de coordonnées $(-2; 0)$, $(0; 4)$, $(2; -2)$ et $(5; -1)$. Entre deux points il suffit de respecter le sens de variation. On a $\mathcal{D}_f = [-2; 5]$.
2. Il faut se méfier des mauvaises intuitions !
   **a.** Vrai. En effet, 3 et 4 appartiennent <u>tous les deux</u> à l'intervalle [2 ; 5] où la fonction $f$ est croissante. Comme $3 < 4$, on a $f(3) \leq f(4)$.
   **b.** Faux. La seule chose que l'on peut dire est $-2 \leq f(1) \leq 4$. En effet, comme 1 appartient à l'intervalle $[0; 2]$ où la fonction $f$ est décroissante, on a
   $$0 < 1 < 2 \Longrightarrow f(0) \geq f(1) \geq f(2) \Longrightarrow 4 \geq f(1) \geq -2.$$
   **c.** Faux. Voir un contre-exemple sur le graphique. On ne peut pas utiliser la méthode la question **a.** car 1 et 4 n'appartiennent pas à un intervalle où la fonction est monotone.
   **d.** Vrai. Le raisonnement se fait en deux parties en se plaçant sur des intervalles où $f$ est monotone.
   - D'une part $-2$ et $-1$ appartiennt à l'intervalle $[-2; 0]$ où $f$ est croissante. On a donc $f(-2) \leq f(-1)$, mais comme $f(-2) = 0$, on arrive à la conclusion $0 \leq f(-1)$.
   - D'autre part 3 et 5 appartiennent à l'intervalle $[2; 5]$ où $f$ est croissante. On a donc $f(3) \leq f(5)$, d'où $f(3) \leq -1$.

   En comparant les deux inégalités obtenues, on a
   $$f(3) \leq -1 < 0 \leq f(-1),$$
   ce qui prouve que $f(3) < f(-1)$.
3. D'après le tableau de variation, si $x \in [0; 2]$, alors $f(x) \in [-2; 4]$.