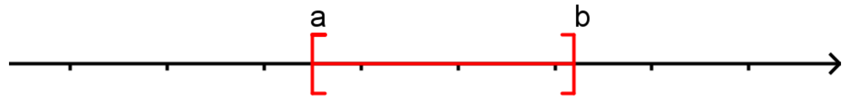
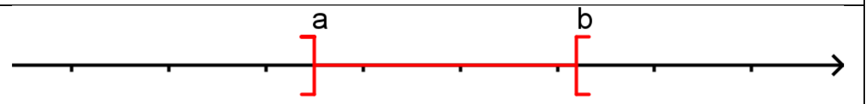
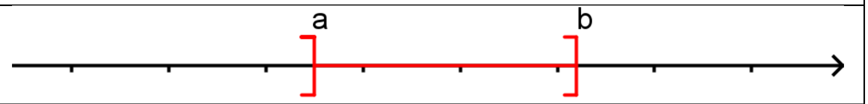
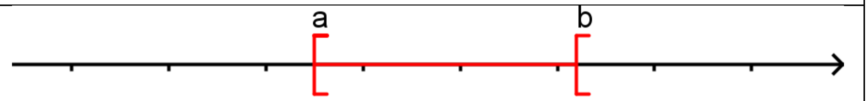
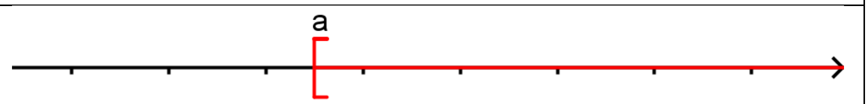
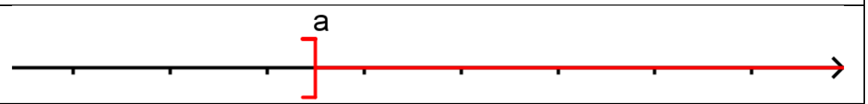
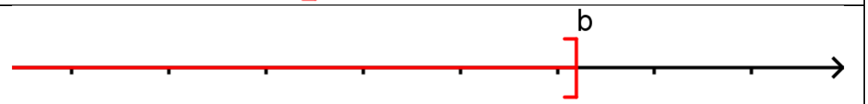
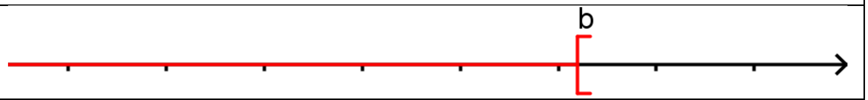
Équations et inéquations

1. Notions de nombres réels et intervalles

Définition. *On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble de tous les nombres. On les appelle <u>nombres réels</u>.*

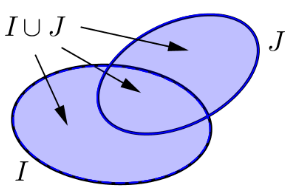
Définition. *Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont des ensembles de réels qui correspondent sur une droite graduée à un segment, une demi-droite ou même toute la droite entière.*
Ce sont les parties « d'un seul tenant », ou encore « sans » trou.

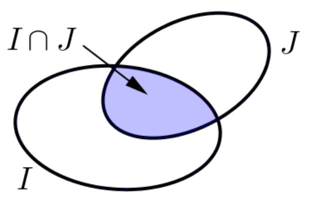
Les différents types d'intervalles sont représentés ci-dessous.

Notation	Nombres x	Représentation sur un axe
$[a;b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a;b[$	$a < x < b$	
$]a;b]$	$a < x \leq b$	
$[a;b[$	$a \leq x < b$	
$[a;+\infty[$	$x \geq a$	
$]a;+\infty[$	$x > a$	
$]-\infty;b]$	$x \leq b$	
$]-\infty;b[$	$x < b$	

Définition. *L'<u>intersection</u> de deux ensembles I et J est l'ensemble des éléments qui appartiennent à I et J, notée $I \cap J$.*

Définition. *La <u>réunion</u> de deux ensembles I et J est l'ensemble des éléments qui appartiennent à I ou à J, notée $I \cup J$.*





Exemple

Soit $A = [-2; 1]$ et $B =]0; 5[$.
Seuls les nombres entre 0 et 1 (sauf 0) appartiennent aux deux ensembles, donc $A \cap B =]0; 1]$.
Tous les nombres de -2 à 5 (sauf 5) appartiennent au moins à un des deux ensembles A et B, donc $A \cup B = [-2; 5[$.

2. Résolution approchée d'équations et inéquations

Supposons que l'équation ou l'inéquation que l'on veut résoudre s'écrive sous la forme $f(x) = g(x)$ ou $f(x) < g(x)$.

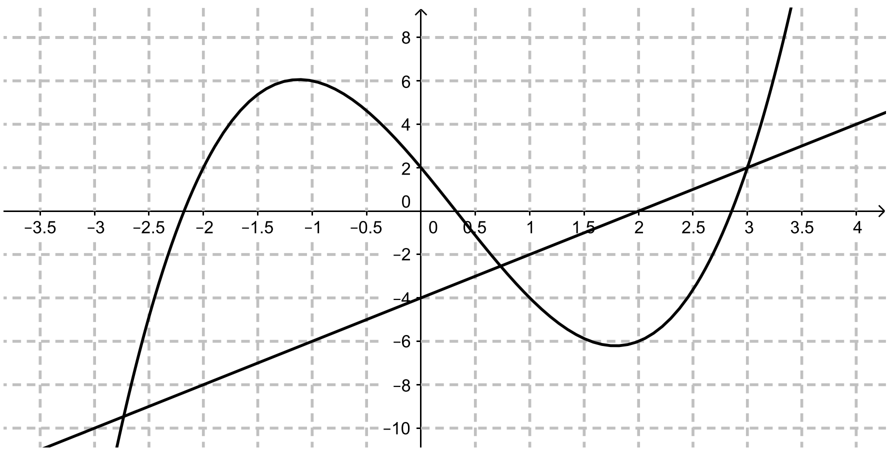
1. On trace les courbes représentatives des fonction f et g dans un même repère ;
2. On cherche les abscisses
   - des points d'intersection des deux courbes pour résoudre $f(x) = g(x)$;
   - des points de $\mathcal{C}_f$ au-dessous (ou au-dessus) de $\mathcal{C}_g$ pour résoudre $f(x) < g(x)$ (ou $f(x) > g(x)$).

Exemple

On souhaite résoudre graphiquement l'équation $x^3 - x^2 - 6x + 2 = 2x - 4$.
On pose pour cela

$$f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2 \text{ et } g(x) = 2x - 4$$

et on cherche les abscisses des points d'intersection des courbes de f et g tracées dans un repère.



On constate que ces courbes se coupent en trois points, on peut donc conjecturer que l'équation admet 3 solutions.
L'une d'elle semble être 3. Pour en être sûr, il suffit de calculer $f(3)$ et $g(3)$:

$$f(3) = 3^3 - 3^2 - 6 \times 3 + 2 = 27 - 9 - 18 + 2 = 2 \text{ et } g(3) = 2 \times 3 - 4 = 2.$$

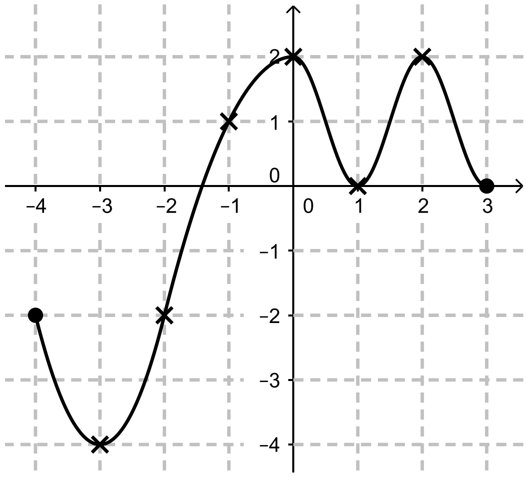
On a donc $f(3) = g(3)$ ce qui prouve que 3 est solution.
Par lecture graphique, les autres solutions semblent être environ $-2{,}75$ et $0{,}75$.

Exemple A

On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous. Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes.

1. Résoudre $f(x) = -2$ et $f(x) = 0$.
2. Résoudre $f(x) \leq -2$, $f(x) \geq -2$, $f(x) \geq 0$ et $f(x) > 0$.
3. Résoudre $f(x) \geq 2$ et $f(x) > 2$

Réponse.



1. L'ensemble des solutions de $f(x) = -2$ est $\{-4\,;\,-2\}$.
   L'ensemble des solutions de $f(x) = 0$ est $\{-1{,}4\,;\,1\,;\,3\}$.
2. L'ensemble des solutions de $f(x) \leq -2$ est $[-4\,;\,-2]$.
   L'ensemble des solutions de $f(x) \geq -2$ est $\{-4\} \cup [-2; 3]$.
   L'ensemble des solutions de $f(x) \geq 0$ est $[-1{,}4; 3]$.
   L'ensemble des solutions de $f(x) > 0$ est $]-1{,}4\,;1[\cup]1;3[$.
3. L'inéquation $f(x) \geq 2$ a pour ensemble de solution $\{0; 2\}$.

L'inéquation $f(x) > 2$ n'a pas de solutions, donc l'ensemble de solution est $\emptyset$.

3. Résolution d'équations et inéquations par le calcul

❖ Équations et inéquations du premier degré

Théorème (opérations sur les équations). Les opérations suivantes ne changent pas les solutions d'une équation :

- additionner un même nombre aux deux membres d'une équation ;
- multiplier par un même nombre non nul les deux membres d'une équation.

Théorème (opérations sur les inéquations). Les opérations suivantes ne changent pas les solutions d'une inéquation :

- additionner un même nombre aux deux membres d'une inéquation ;
- multiplier par un même nombre positif non nul les deux membres d'une inéquation ;
- multiplier par un même nombre négatif non nul les deux membres d'une inéquation à condition **d'inverser le sens de l'inégalité**.

Exemple

Résolvons l'équation $5x - 1 = 2x + 5$.

$$
\begin{array}{rll}
2x - 1 = x + 2 & \Leftrightarrow\ 5x - 1 - 2x = 2x + 5 - 2x & \text{(on enlève } 2x \text{ à chaque membre)} \\
& \Leftrightarrow\ 3x - 1 = 5 & \text{(on simplifie)} \\
& \Leftrightarrow\ 3x - 1 + 1 = 5 + 1 & \text{(on ajoute 1 à chaque membre)} \\
& \Leftrightarrow\ 3x = 6 & \text{(on simplifie)} \\
& \Leftrightarrow\ \frac{1}{3} \times 3x = \frac{1}{3} \times 6 & \text{(on multiplie par } \frac{1}{3}\text{)} \\
& \Leftrightarrow\ x = 2 &
\end{array}
$$

La solution de cette équation est donc 2, l'ensemble des solutions est donc $\{2\}$.

Lorsqu'on sépare deux équations par la double flèche $\Leftrightarrow$, cela signifie qu'elles ont les mêmes solutions, elles sont dites <u>équivalentes</u>.
Lorsqu'on résout une équation, on la transforme à chaque étape en une équation équivalente plus simple, jusqu'à ce que la dernière ait des solutions évidentes.

Exemple

Résolvons l'équation $3x \geq 5x - 8$.

$3x \geq 5x - 8$	$\Leftrightarrow$	$-2x \geq -8$	(on enlève $5x$ à chaque membre)
	$\Leftrightarrow$	$x \leq \frac{-8}{-2}$	(on divise par -2 qui est négatif donc on inverse le sens de l'inégalité)
	$\Leftrightarrow$	$x \leq 4$	

Les solutions de cette inéquation sont les nombres inférieurs ou égaux à 4. L'ensemble des solutions est $S =]-\infty; 4]$.

4. Signe d'une fonction

Déterminer le signe d'une fonction f, c'est donner en fonction des valeurs de x le signe de $f(x)$, à savoir : positif, négatif ou nul.
Graphiquement, cela revient à cherche pour quelles valeurs de x la courbe de f est au-dessus, au-dessous ou coupe l'axe des abscisses.

Exemple A

Le tableau de signes de la fonction f est le suivant.

x	-4		$-1{,}5$		1		3
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 4$.
La fonction f prend des valeurs positives lorsque $f(x) \geq 0$. On a

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Cela montre que

- si $x > 2$, alors $f(x) > 0$;
- si $x = 2$, alors $f(x) = 0$;
- si $x < 2$, alors $f(x) < 0$.

Le signe de f est donc le suivant.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	