Équations et inéquations – Exercices

Intervalles

1 Pour chacune des questions suivantes, entourer la seule réponse correcte.

1. L'ensemble des réels x tels que $x \geq 5$ est
a. $]-\infty; 5]$ **b.** $[5; +\infty[$ **c.** $]5; +\infty[$

2. L'ensemble des réels x tels que $-2 \leq x < 1$ est
a. $[-2; 1]$ **b.** $]-2; 1]$ **c.** $[-2; 1[$

3. L'ensemble des réels x vérifiant $x > 0$ est
a. $[0; +\infty[$ **b.** $[0; +\infty]$ **c.** $]0; +\infty[$

4. L'ensemble des réels vérifiant $x \geq 2$ et $x < 4$ est
a. $[2; 4]$ **b.** $]4; 2]$ **c.** $[2; 4[$

2 Même consigne.

1. Le réel $\frac{1}{3}$ appartient à
a. $\{0; 1\}$ **b.** $[0; 0{,}33]$ **c.** $]0; 1[$

2. L'ensemble des réels compris entre 2 et -3 inclus se note
a. $[-3; 2]$ **b.** $[2; -3]$ **c.** $]-3; 2[$

3 Indiquer par le symbole $\in$ ou $\notin$ si les réels donnés appartiennent aux intervalles I_1, I_2, I_3, I_4, I_5.

	1	-4	-2	π	$\sqrt{2}$	$1{,}99$	$2{,}4$	$\frac{-30}{7}$
$I_1 = [2; 10[$								
$I_2 =]-\infty; 2[$								
$I_3 = \left]-3; \frac{12}{5}\right[$								
$I_4 = \left[-\frac{14}{3}; \frac{35}{11}\right]$								
$I_5 = [3; +\infty[$								

4 Compléter le tableau suivant.

I	J	$I \cap J$	$I \cup J$
$[-2; 4[$	$[3; 5]$		
$[2; 8]$	$]-1; 5[$		
$]-\infty; 0]$	$[0; +\infty[$		
$]4; 7]$	$]-1; 2]$		

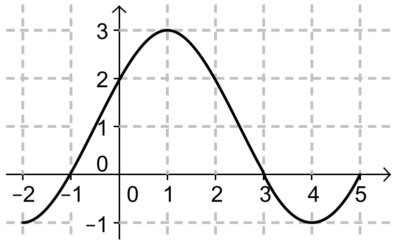
Résolution graphique d'(in)équations

5 La courbe ci-dessous donne le nombre de malades (en milliers) atteints de la grippe sur une région en fonction du nombre de jours depuis le début de l'épidémie.

1. Quel est le nombre maximal de malades observés ? Au bout de combien de jours ?

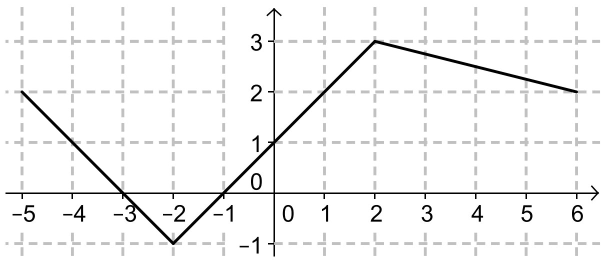
2. On considère que l'épidémie est sévère lorsque le nombre de malades dépasse 3000.
Sur quelle période l'épidémie est grave ?

6 Soit f la fonction définie sur $[-2; 5]$ dont la courbe est donnée ci-dessous.
Résoudre graphiquement les inéquations suivantes.



a. $f(x) > 0$ **b.** $f(x) \leq 0$ **c.** $f(x) < 0$
d. $f(x) \leq 0$ **e.** $f(x) \geq 2$

7 On considère la fonction f définie sur $[-5; 6]$ et dont la courbe représentative est la suivante.



1. Résoudre les équations suivantes.
a. $f(x) = 3$ **b.** $f(x) = 1$ **c.** $f(x) = 6$

2. Citer un réel ayant 3 antécédents ; préciser ses antécédents.

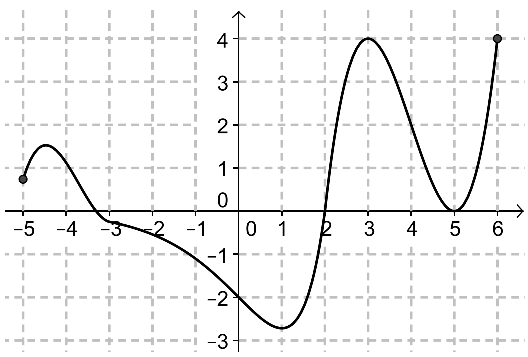
3. Citer les réels ayant un seul antécédent.

4. Résoudre les inéquations suivantes.
a. $f(x) \leq 1$ **b.** $f(x) \geq 0$ **c.** $f(x) \geq 2$
d. $f(x) < 3$ **e.** $f(x) \geq -1$ **f.** $f(x) > 0$

5. Donner en fonction du réel k le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.
On complétera pour cela le tableau suivant.

L'équation $f(x) = k$ a … solutions	si $k \in$ …
0	
1	$\{-1; 3\}$

8 On considère la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-5; 6]$.



1. Résoudre avec la précision permise par le graphique les équations et inéquations suivantes.
a. $f(x) = 4$ **b.** $f(x) \leq 0$ **c.** $f(x) \leq 1$
d. $f(x) < 4$

2. Quelles sont les valeurs possibles du nombre d'antécédents d'un réel par cette fonction ? Pour chacune d'elles, donner un réel ayant le nombre d'antécédents indiqué.

9 Le tableau de variation d'une fonction f est donné ci-dessous. On a complété avec quelques valeurs.

x	-5		-3		-1		1		2		4
f	2	↗	5	↘	0	↘	-4	↗	0	↗	3

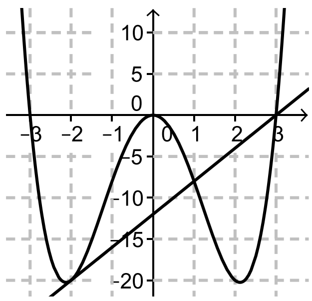
1. Tracer une courbe possible pour f.
2. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.
3. Combien 3 admet-il d'antécédents ?

10 À l'aide la calculatrice ou de GeoGebra, conjecturer le nombre de solutions des équations suivantes.

a. $3 - x^3 = 3x^2$ **b.** $3 - x^3 = 2x^2$
c. $x^3 + 2 = 6x^2 - x^4$ **d.** $x^3 + 6 = 6x^2 - x^4$

11 On tracé ci-contre les courbes représentatives des fonctions f et g définies par

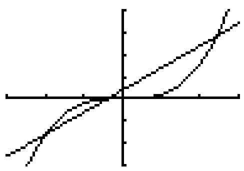
$$f(x) = x^4 - 9x^2$$
$$\text{et } g(x) = 4x - 12.$$



1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $$f(x) = g(x)$$ et conjecturer les solutions.
   Vérifier par un calcul que les valeurs conjecturées sont bien des solutions de l'équation.
2. Résoudre graphiquement $f(x) \leq g(x)$.

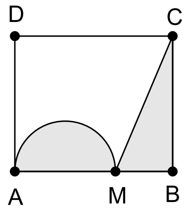
12 Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et $g(x) = 5x + 2$.

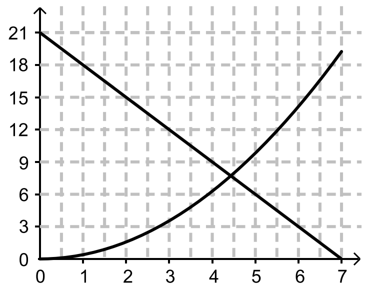
On a tracé ci-contre les courbes représentatives des fonctions f et g.



1. Conjecturer le nombre de solution de l'équation $f(x) = g(x)$.
2. Parmi ces solutions, l'une est un nombre entier. Laquelle ? Donner une valeur approchée à 0,01 des autres solutions grâce au zoom. Comparer ces valeurs $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$.

13 Soit $ABCD$ un rectangle. On place un point M libre sur le segment $[AB]$. Comme sur la figure ci-dessous, on trace un demi-cercle de diamètre $[AM]$ et le triangle MBC. On note x la distance AM.





Le graphique représente les aires $f(x)$ et $g(x)$ du demi-disque et du triangle respectivement.

1. Identifier les courbes de f et g.
2. Déterminer les dimensions du rectangle $ABCD$.
3. Estimer graphiquement la valeur de x pour laquelle le demi-disque et le triangle ont la même aire.
   En donner une valeur approchée au centième.

14 **(Prix d'équilibre).** Une étude de marché s'intéresse à l'évolution de l'offre et de la demande d'un produit en fonction de son prix unitaire, exprimée en euros.

Pour un prix de x €, compris entre 2 et 30, le nombre de produits demandés est modélisé par la fonction f définie par $f(x) = 0{,}05x^2 - 4x + 80$ et le nombre de produits offerts par g définie par $g(x) = 2x + 6$.

1. Déterminer le nombre de produits offerts et le nombre de produits demandés lorsque le prix du produit est de 18 €.
2. On appelle prix d'équilibre le prix pour lequel l'offre et la demande sont égales.
   a. Déterminer graphiquement le prix d'équilibre.
   b. Quel est alors le nombre de produits demandés ?
   c. Quand y a-t-il rupture de stock ?

15 Soit l'équation $x^3 - x + 2 = 0$.

1. À l'aide de la calculatrice, combien de solutions semble avoir l'équation ? Donner un encadrement à 0,1 près de ces solutions.
2. À l'aide de la « table » compléter le tableau ci-contre de valeurs de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - x + 2$.
   En déduire un encadrement 0,01 près de la solution.
3. Trouver un encadrement à 0,001 près.

x	$f(x)$
$-1{,}54$	
$-1{,}53$	
$-1{,}52$	
$-1{,}51$	
$-1{,}5$	

16 On considère l'équation (E) : $3x - x^3 = x + 2$.

1. Conjecturer le nombre de solution de (E).
2. Expliquer pourquoi l'équation peut s'écrire $$3x - x^3 - x - 2 = 0.$$
3. À l'aide de la table de la calculatrice, donner une valeur approchée de la solution de (E) à 0,01 près.

17 À l'aide de la calculatrice ou de GeoGebra, conjecturer les solutions des inéquations suivantes.

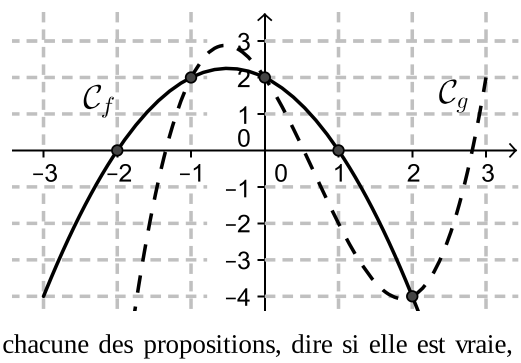
a. $2x^2 - x^3 \geq 2 - x$ **b.** $2x^2 - x^3 \leq x$

18 On considère l'algorithme ci-contre.

1. Quelles valeurs s'affichent à l'écran à l'exécution de l'algorithme ?
2. Quel est le rôle de cet algorithme ?
3. Que retourne-t-il si l'on remplace $i + 3$ par $i - 3$?

```
Pour i de −3 à 3
  Si i² ≥ i + 3
  Afficher i
  FinSi
FinPour
```

19 Voici les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $[-3; 3]$.



Pour chacune des propositions, dire si elle est vraie, énoncer la réciproque et dire si cette dernière est vraie.

a. Si $x \in]0; 2[$, alors $f(x) < g(x)$.
b. Si $x = -2$, alors $g(x) = 0$.
c. Si $x \in [1; 2]$, alors $f(x) \times g(x) < 0$.

Résolution d'(in)équations par le calcul

20 Entourer les bonnes réponses.

1. La solution de l'équation $3x = 0$ est
a. -3 **b.** 3 **c.** 0

2. La solution de l'équation $-x + 1 = -2x - 1$ est
a. $\frac{2}{3}$ **b.** -2 **c.** -1

3. Une solution de l'équation $x^2 = 2x + 3$ est
a. 3 **b.** 1 **c.** -1

4. Une solution de l'équation $x^3 = 7x - 6$ est
a. 1 **b.** 2 **c.** -3

21 Vrai ou faux ? Justifier.

1. On considère l'équation $x + 3 = -x - 1$.
- **a.** Une solution de cette équation est -2.
- **b.** La solution de cette équation est -2.
- **c.** L'ensemble des solutions est $\{-2\}$.

2. On considère l'équation $(x-1)(x+2) = 0$.
- **a.** Une solution de cette équation est -2.
- **b.** La solution de cette équation est -2.

3. On considère l'équation $x^3 = 7x + 6$.
- **a.** -1 et -2 sont des solutions de cette équation.
- **b.** L'ensemble des solutions est $\{-1; -2\}$.

4. Les équations $2x - 3 = -x$ et $2 + x = 3x$ sont équivalentes.

5. L'équation $2x - 1 = 5 + 2x$ n'a pas de solution.

6. On considère les équations
$$x^2 - 1 = 0 \text{ et } x^2 = 2x + 3.$$
- **a.** Ces équations ont une solution commune.
- **b.** Ces équations sont équivalentes.

7. On considère l'inéquation $2x + 3 \geq 6 - x$.
- **a.** 1 et 2 sont des solutions de l'inéquation.
- **b.** L'ensemble des solutions est $[-1; +\infty[$.

8. On considère l'inéquation $x^3 < x$.
- **a.** 1 est solution de l'inéquation.
- **b.** L'ensemble des solutions est $]0; 1[$.

22 On donne les algorithmes suivants.

Algorithme A	Algorithme B
• Choisir un nombre • Le mettre au carré • Ajouter 3 • Multiplier par 2 • Afficher le résultat	• Choisir un nombre • En prendre l'inverse s'il existe • Soustraire 3 • Afficher le résultat

1. Pour chaque algorithme, calculer lorsque c'est possible les images de 2 ; -1 ; 0 ; $\frac{1}{3}$.

2. Chaque algorithme définit une fonction. Donner une expression algébrique de celle-ci en précisant l'ensemble de définition.

3. Déterminer les antécédents de 8 et de 0.

23 Résoudre les équations suivantes.

a. $2x = -x + 3$ **b.** $3 - x = x + 2$
c. $7 - (x - 1) = x$ **d.** $5 - (1 + x) = -x + 3$
e. $3(x - 1) = 4x - 1$ **f.** $\frac{4x+1}{3} = \frac{1-x}{2}$

24 Résoudre les équations suivantes.

a. $x + 1 = -2x - 4$ **b.** $\frac{1}{2}x + 3 = \frac{1}{3}x + 4$
c. $\frac{1}{2} + x = \frac{x}{2}$ **d.** $7x - \frac{1}{3} = 5x + 2$
e. $\frac{2x-3}{2} = \frac{x}{4}$ **f.** $\frac{x}{2} + 3 = \frac{x-1}{5}$

25 Résoudre les inéquations suivantes.

a. $2x \geq x + 3$ **b.** $x \geq 4x + 6$
c. $7 + x \leq 3 - 2x$ **d.** $\frac{x}{2} \leq \frac{x}{5}$
e. $\frac{x}{2} \leq x + 1$ **f.** $1 - x \leq \frac{1+x}{3}$

26 Pour chacune des équations, entourer parmi les propositions les solutions.

Équation	Solutions proposées		
1. $\frac{2x-2}{x+1} = 0$	**a.** 1	**b.** -1	**c.** 2
2. $\frac{x^2-4}{2-x} = 0$	**a.** 2	**b.** -2	**c.** 1
3. $\frac{x+1}{x-1} = \frac{6}{x}$	**a.** 1	**b.** 2	**c.** 3
4. $\frac{4}{x} = \frac{3x-2}{4-x}$	**a.** $\frac{1}{3}$	**b.** $-\frac{8}{3}$	**c.** 2
5. $\frac{3x-x^2}{5-x} = \frac{x}{x+1}$	**a.** 0	**b.** 1	**c.** 2

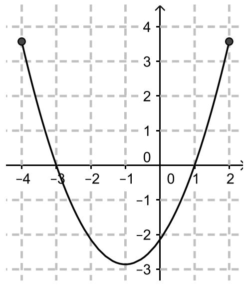
27 Un père a 25 ans de plus que son fils ; dans 5 ans il aura le double de l'âge de son fils. Quel est l'âge du fils ?

28 **a.** Un article augmente de 4 % et coûte maintenant 13 €. Quel était son prix avant augmentation ?
b. Un article diminue de 4 % et coûte maintenant 13 €. Quel était son prix avant diminution ?

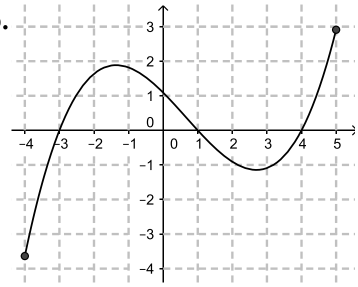
Signe d'une fonction

29 Dresser les tableaux de signe des fonctions définies sur ℝ représentées ci-dessous.

a.



b.



30 Soit f une fonction dont le tableau de signe est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1. Déterminer les signes de $f(3)$, $f(-1)$, $f\left(-\frac{11}{3}\right)$ et $f(1)$.

2. Résoudre $f(x) = 0$, $f(x) \geq 0$ et $f(x) < 0$.

31 On donne le tableau de variations et le tableau de signe d'une fonction f.
Proposer une représentation graphique de cette fonction.

x	-10		-6		-1		4
variations de f	-5	↗	1	↘	-3	↗	5

x	-10		-7		-3		1		4
signe de f		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

32 Déterminer le signe des fonctions affines f et g définies sur ℝ par $f(x) = 3 - x$ et $g(x) = 7x + 5$.

33 Déterminer le signe de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3$.