Puissances et racine carrée – Exercices

Puissances

1 Simplifier (a et b sont des réels non nuls).

a. $(a^2)^3$ **b.** $(a^2)^7 \times a^{-13}$

c. $(ab)^2 \times a^{-2}$ **d.** $\frac{(2a)^2}{b^7} \times \left(\frac{a}{b}\right)^9$

e. $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \times \frac{b^{-4}}{a^2}$

2 Simplifier, sans calculatrice.

a. $(2^2)^2 + 1$ **b.** $2^{13} \times 0{,}5^{13}$

c. $\frac{22\times10^7}{2\times10^9}$ **d.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{13} \times 1{,}5^{12}$

3 Quel est le plus grand nombre : 700^{600} ou 600^{700} ?

4 Dans l'algorithme suivant, a désigne un réel et n un entier naturel.

```
p ← 1
Pour k de 1 à n
   p ← a × p
Retourner p
```

1. Exécuter l'algorithme à la main avec $a = 2$ et $n = 3$.
2. Que se passe-t-il pour $n = 0$?
3. Quel est le rôle de cet algorithme ?

On a programmé l'algorithme suivant sous Python en une fonction **puissp** qui prend en argument un réel a et un entier naturel n.

```
def puissp(a,n):
     p=1
     for k in range(1,n+1):
          p=a*p
     return p
```

4. Que renvoie puissp(3,2) ? puissp(3,0) ?
5. On souhaite étendre cette fonction aux exposants n entiers négatifs en utilisant la fonction **puissp**.
Compléter le script Python suivant.

```
def puiss(a,n):
     if
          return puissp(a,n)
     else:
          return
```

Développement, factorisation

5 Préciser si les expressions suivantes sont sous formes développées, factorisées ou autres.

a. $x^2 - 5 + 3x$ **b.** $(x+3)(x-2) + x$

c. $3x^4 - \frac{1}{5}x + x^2$ **d.** $(x-1)^3 + 5$

e. $(x-1)(x+3) + 2(x-1)$

6 Développer les expressions suivantes.

a. $x(x-2) - 7$
b. $(x-1)(x+3)$
c. $(2x+1)(7-x) + 2x^2$
d. $2x(3x-2)$
e. $\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x+4)$

7 Factoriser les expressions suivantes.

a. $6x + 7x$
b. $6x + x(x+1)$
c. $-3x^2 + 5x$
d. $7(x+1) - 5(x+1)$
e. $(x+3)(x+1) - 5(x+1)$
f. $(2x-1)(5-x) - x(5-x)$

8 Développer les expressions suivantes.

a. $(2x+3)^2$
b. $(2-y)^2$
c. $(x+y)^2 - (x-y)^2$
d. $(4x+1)^2 - (2x-1)(3+4x)$

9 Factoriser les expressions suivantes.

a. $x^2 - 16$
b. $25 - 4x^2$
c. $(x-5)^2 - (2x+3)^2$
d. $(y+1)^2 - 36$

10 Les identités remarquables permettent d'effectuer mentalement quelques calculs a priori difficiles.

1. En écrivant $31 = 30 + 1$, calculer 31^2 (sans calculatrice donc !).
2. Calculer de même, avec des identités remarquables, 51^2, 39^2, 49×51 et 101×99.

11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x+1)^2 - (x-2)^2.$$

1. Déterminer les formes développée et factorisée de $f(x)$.
2. Choisir la forme la plus adaptée pour calculer les images de $-\frac{1}{2}$, -3, 0 et $\sqrt{2}$.

12 Développer et simplifier

a. $\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{2}$ **b.** $\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}$

13 Vérifier l'égalité suivante

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2.$$

14 Vérifier l'égalité suivante

$$(a+b)^2 - (c+d)^2 + (a+c)^2 - (b+d)^2 = 2(a-d)(a+b+c+d).$$

Racines carrées

15 Simplifier, sans calculatrice.

a. $\sqrt{(25)^2}$ **b.** $\left(\sqrt{14}\right)^2$ **c.** $\left(-\sqrt{5}\right)^2$

d. $\sqrt{71^2}$ **e.** $\sqrt{(-2)^2}$ **f.** $\left(\sqrt{3}\right)^4$

g. $\left(\sqrt{2}\right)^{10}$ **h.** $\left(\sqrt{5}\right)^7$ **i.** $\left(3\sqrt{2}\right)^2$

16 Simplifier, sans calculatrice.

a. $\sqrt{16\times7}$ **b.** $\sqrt{8}$ **c.** $\sqrt{12}$

d. $\sqrt{50}$ **e.** $\sqrt{48}$ **f.** $\sqrt{72}$

17 Simplifier, sans calculatrice.

a. $\sqrt{\frac{1}{4}}$ **b.** $\sqrt{\frac{5}{9}}$ **c.** $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \times \sqrt{3}$

18 Dans l'algorithme suivant, a désigne un réel positif.

```
r ← 0
Tant que r² ≤ a
    r ← r + 1
Retourner r − 1
```

1. Exécuter l'algorithme à la main avec $a = 21$.
2. Quel est le rôle de cet algorithme ?

19 Développer les expressions suivantes.

a. $\sqrt{2}(1+\sqrt{2})$ **b.** $(1+\sqrt{2})^2$
c. $(2-\sqrt{7})^2$ **d.** $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

20 Vrai ou faux ? Justifier.

a. Pour tous réels positifs a et b, on a $\sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$.
b. Pour tous réels positifs a et b, on a $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$.
c. Pour tout réel a, on a $\sqrt{a^2} = a$.
d. $\sqrt{2x-3}$ existe si $x \geq 0$.

21 Résoudre les équations suivantes.

a. $x^2 = 9$ **b.** $x^2 = -4$
c. $x^2 = 0$ **d.** $x^2 = 5$

22 Résoudre les équations suivantes.

a. $\sqrt{x} = 2$ **b.** $\sqrt{x} = -3$
c. $\sqrt{x} = \sqrt{17}$ **d.** $\sqrt{x} = 16$

23 Résoudre les équations suivantes.

a. $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x-2}$ **b.** $\sqrt{x^2-9} = x-3$
c. $\sqrt{x^2+2} = 1-x^2$ **d.** $\sqrt{3x+1} = x-1$

24 Comparer sans calculatrice $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ dans chacun des cas suivants.

a. $a = 7$ et $b = 41$
b. $a = 0{,}05$ et $b = 0{,}5$
c. $a = 21{,}7^2$ et $b = 32^2$
d. $a = (-2019)^2$ et $b = 2018^2$
e. $a = \sqrt{7}$ et $b = 4$
f. $a = 3\sqrt{7}$ et $b = 8$

25 Vrai ou faux ? Justifier.

a. Pour tout réel x, on a $\sqrt{(x^2+2)^2} = x^2+2$.
b. Pour tout réel x, on a $\sqrt{(x^2+3x+1)^2} = x^2+3x+1$.
c. On a $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
d. Pour tout réel x strictement positif, $\frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$.

26 Montrer que $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$.

27 Montrer que $\frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$.

28 Montrer que pour tout entier naturel n, on a

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}.$$

29 Montrer que

$$\sqrt{30+10\sqrt{5}}+\sqrt{30-10\sqrt{5}}$$

est un nombre entier.

30 Parmi $a = 2-\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{2}-1$, lequel de ces deux nombres est le plus grand ? Calculatrice interdite.

31 Une voiture roule sur route sèche à la vitesse v (en $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$) au moment où le conducteur appuie brusquement sur le frein. On montre en physique que la distance de freinage d (en m) parcourue par ce véhicule avant l'arrête complet est donnée par

$$d = \frac{v^2}{2G\mu}$$

où G est la gravité (G = 9,81 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$) et μ le coefficient de frottement du pneumatique ; il est toujours compris entre 0 et 1. Sur route sèche et lorsque le pneu est en bon état, on considère qu'il est de 0,65, ce que nous ferons dans la suite.

1. Calculer la distance nécessaire à un véhicule roulant à 90 $\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ pour qu'il s'arrête.
2. Montrer que si la vitesse v est exprimée en $\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, la distance d'arrêt est approximativement égale à
$$d = 0{,}006v^2$$
3. Que peut-on dire de la distance d'arrêt quand la vitesse est doublée ?
4. À quelle vitesse doit rouler un véhicule pour qu'il mette 150 m à s'immobiliser ?

32 **Approximation rationnelle de $\sqrt{a}$**

Voici un algorithme qui permet de déterminer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par un rationnel à 10^{-3} près.

```
u ← 2
Tant que u − √2 > 10⁻³
    u ← 1/2 (u + 2/u)
Retourner u
```

1. Compléter le tableau suivant jusqu'à l'arrêt de l'algorithme. On complètera la première ligne par des rationnels.

u	2			
$u-\sqrt{2} > 10^{-3}$	oui			

Donner une approximation rationnelle de $\sqrt{2}$ avec (au moins) 10 chiffres exacts après la virgule.

2. De façon plus générale, voici algorithme qui permet d'avoir une approximation rationnelle de $\sqrt{a}$ à ε près.

```
u ← partie entière de √a
Tant que u − √a > ε
    u ← 1/2 (u + a/u)
Retourner u
```

Cet algorithme définit une fonction que l'on appellera **approx(a, ε)**.
Que vaut approx($3, 10^{-5}$) ? approx($17, 10^{-10}$) ? Et enfin approx($25, 10^{-500}$) ?