Arithmétique

1. Multiples, diviseurs

❖ Définitions

Exemple

Les entiers 4 et 6 sont des diviseurs de 12 car $12 = 4 \times 3$ et $12 = 6 \times 2$. On peut aussi dire que 12 est un multiple de 4 et de 6.

Définition. *Soit a et b des entiers naturels.*
a est un multiple de b s'il existe un entier b tel que $a = bq$.
Si $b \neq 0$, alors b est un diviseur de a (ou a est divisible par b).

Remarques.
- 1 a pour seul diviseur 1 et tout entier naturel $n \geq 2$ a au moins deux diviseurs : 1 et n ;
- 0 a pour seul multiple 0 ;
- 0 est un multiple de tout entier.

Rappelons quelques critères de divisibilité.
- Un entier est divisible par 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- un entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;
- un entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5 ;
- un entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

❖ Recherche des diviseurs d'un entier

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Si d est un diviseur de n, il existe d' tel que $n = dd'$. On a alors $d \leq \sqrt{n}$ ou $d' \leq \sqrt{n}$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $d > \sqrt{n}$ et $d' > \sqrt{n'}$, d'où $dd' > \sqrt{n} \times \sqrt{n}$, c'est-à-dire $dd' > n$, ce qui est en contradiction avec $dd' = n$.
La recherche des diviseurs de n peut donc s'écrire sous forme de l'algorithme suivant.

```
Pour d de 1 à partie entière de √n
    Si d divise n
        Afficher d, n/d
```

Exemple

Exécutons cet algorithme pour la recherche des diviseurs de 20. On a $\sqrt{20} \approx 4{,}5$ donc d va varier de 1 à 4.

d	1	2	3	4
d divise-t-il 20 ?	oui	oui	non	oui
Si oui, afficher …	1, 20	2, 10		4, 5

Ainsi les diviseurs de 20 sont : 1, 2, 4, 5, 10 et 20.

Remarque. Si n est un carré ($n = k^2$), l'algorithme retournera deux fois le diviseur k.

- **Nombres pairs et impairs**

Définition. *Un entier n est dit pair si c'est un multiple de 2, autrement dit n est pair si et seulement s'il existe un entier k tel que $n = 2k$.*
Dans le cas contraire, n est dit impair. Autrement dit, n est impair si et seulement s'il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.

Exemple

Montrons que le produit de deux entiers impairs est impair.
Soit n et n' deux entiers impairs. Il existe k et k' tels que $n = 2k + 1$ et $n' = 2k' + 1$. Alors

$$nn' = (2k + 1)(2k' + 1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1 = 2(2kk' + k + k') + 1.$$

Ainsi nn' est impair puisqu'il est de la forme $2K + 1$ où $K = 2kk' + k + k'$ est un entier.

Exemple

Montrons que la somme de quatre entiers consécutifs est un nombre pair, mais pas un multiple de 4.

Quatre entiers consécutifs s'écrivent n, $n + 1$, $n + 2$ et $n + 3$ où n est le premier d'entre eux. Leur somme est $4n + 6 = 2(2n + 3)$, elle est donc paire.
Si $4n + 6$ était un multiple de 4, il existerait un entier k tel que $4n + 6 = 4k$, d'où l'égalité $4(n - k) = 6$, ce qui est absurde car 6 n'est pas un multiple de 4.

2. Nombres premiers

Définition. *Un entier naturel est dit premier s'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.*

Exemple

Les entiers 0 et 1 ne sont pas premiers, pas plus que 4 ou 10.
Les entiers premiers inférieurs à 20 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19.

Le théorème suivant va nous aider à déterminer si un nombre donné est premier.

Théorème. Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Si aucun des entiers premiers compris entre 2 et $\sqrt{n}$ ne divise n, alors n est premier.

Exemple

Les nombres 191 et 187 sont-ils premiers ?

- $\sqrt{191} < 14$. On doit donc tester les diviseurs suivants : 2, 3, 5, 7, 11 et 13.
  - ✓ 191 n'est clairement pas divisible par 2, ni par 5.
  - ✓ 191 n'est pas divisible par 3 car $1 + 9 + 1 = 11$ n'est pas divisible par 3.
  - ✓ $\frac{191}{7} \approx 27{,}3$, donc 7 n'est pas un diviseur de 191.
  - ✓ De même, 11 et 13 ne sont pas des diviseurs de 191.

Finalement, 191 est premier.

- $\sqrt{187} < 14$, donc on teste si 187 est divisible par les entiers premiers inférieurs à 14, à savoir : 2, 3, 5, 7, 11 et 13. On constate alors que 187 n'est pas premier puisque $187 = 11 \times 17$.

Pour tester la primalité d'un nombre, le théorème ci-dessus nécessite de connaître les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$, ce qui est difficile à programmer. L'algorithme le plus simple (mais moins performant) est celui ci-dessous, qui teste la divisibilité par tous les entiers compris entre 2 et $\sqrt{n}$.

```
Pour d de 2 à √n
    Si d divise n
        Retourner « non premier »
Retourner « premier »
```

La traduction en Python ci-dessous est une fonction qui répond **True** ou **False** selon que le nombre choisi est premier ou pas.

Remarque. n**0.5 désigne $\sqrt{n}$. En effet, vous verrez ultérieurement qu'il existe des puissances qui ne sont pas entières, et notamment $\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$.

```python
def est_premier(n):
   for d in range(2,int(n**0.5)+1):
      if n%d==0:
         return False
   return True
```