Équations de droites

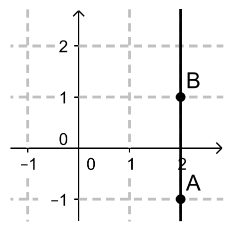
Dans tout ce chapitre, on se place dans un repère $(O; I, J)$ du plan.

1. Équation d'un ensemble de points

Définition. *Dans un repère, on appelle <u>équation d'un ensemble</u> de points S l'égalité que doivent vérifier les coordonnées x et y d'un point pour appartenir à S.*

Exemple

Soit les points $A(2; -1)$ et $B(2; 3)$. La droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées, c'est l'ensemble des points d'abscisse 2.
On dit que l'équation de cette droite est $x = 2$, cela signifie que pour qu'un point de coordonnées $(x; y)$ appartienne à cette droite, ses coordonnées doivent vérifier l'égalité $x = 2$.
Ainsi $C(5; 3)$ n'appartient pas à (AB) car $x = 5 \neq 2$



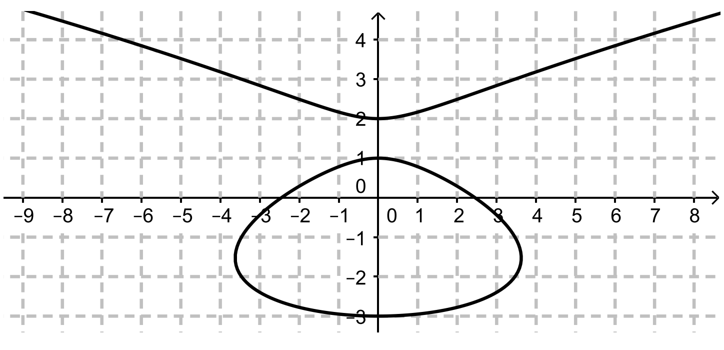
Exemple

Considérons l'ensemble S d'équation $y = x^2 - x + 1$. Parmi les points $A(2; 1)$, $B(0; 1)$, $C(-1; 3)$ et $D(0; 2)$, lesquels appartiennent à S ?
On a $2^2 - 2 + 1 = 3 \neq 1$, donc $A \notin S$. On a $0^2 - 0 + 1 = 1$, donc $B \in S$. On a $(-1)^2 - (-1) + 1 = 3$, donc $C \in S$. Enfin $0^2 - 0 + 1 = 1 \neq 2$, donc $D \notin S$.
Cet ensemble est simplement la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x + 1$.

Exemple

On a représenté sur GeoGebra l'ensemble S d'équation $x^2 = y^3 - 7y + 6$.

1. Trouver à l'aide du graphique trois points dont les coordonnées sont des nombres entiers.
2. Démontrer que S coupe l'axe des ordonnées aux points $P_1\left(-\sqrt{6}\,; 0\right)$ et $P_2\left(-\sqrt{6}\,; 0\right)$.



Réponse.

1. On constate que l'expression $y^3 - 7y + 6$ vaut 0 en remplaçant y par -3, 1 ou 2, donc les points $A(0; -3)$, $B(0; 1)$ et $C(0; 2)$ conviennent.
2. Pour qu'un point appartienne à l'axe des abscisses, son ordonnée doit être nulle. Cela traduit que l'axe des abscisses a pour équation $y = 0$.
   Pour qu'un point de coordonnées $(x; y)$ appartienne à l'axe des abscisses et à S, ses

coordonnées doivent vérifier les deux équations
$$y = 0 \text{ et } x^2 = y^3 - 7y + 6.$$
La seconde équation donne $x^2 = 6$, d'où l'on déduit $x = -\sqrt{6}$ ou $x = \sqrt{6}$. On trouve donc deux points $P_1\left(-\sqrt{6}\,;0\right)$ et $P_2\left(-\sqrt{6}\,;0\right)$.

2. Équations de droites

Théorème. Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $x = c$, où c est un réel.

La question est plus compliquée pour les droites non parallèles à l'axe des ordonnées.

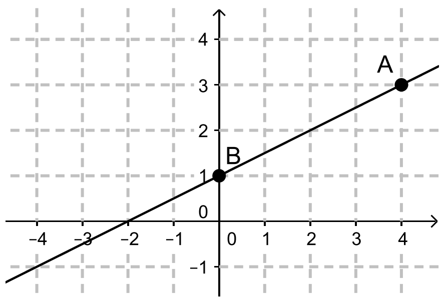
Théorème. Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $y = ax + b$, où a et b sont des réels.

Exemple

Soit $A(-1;3)$ et $B(2;-4)$. Vérifier que la droite (AB) a pour équation $y = -\frac{7}{3}x + \frac{2}{3}$.
Réponse. D'après le théorème, l'ensemble d'équation $y = -\frac{7}{3}x + \frac{2}{3}$ est bien une droite. Il suffit donc de vérifier que A et B appartiennent à cet ensemble, puisque deux points distincts définissent une droite.
Le point A appartient à l'ensemble d'équation $y = -\frac{7}{3}x + \frac{2}{3}$ équivaut par définition à dire que ses coordonnées $(x\,;y)$ vérifie l'égalité $y = -\frac{7}{3}x + \frac{2}{3}$. Or on a bien $-\frac{7}{3} \times (-1) + \frac{2}{3} = \frac{9}{3} = 3$. De même $-\frac{7}{3} \times 2 + \frac{2}{3} = \frac{-14+2}{3} = \frac{-12}{3} = -4$, donc B appartient à cette droite.

Exemple

Tracer la droite D d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$.
Réponse. Il suffit de déterminer deux points situés sur D en donnant à x deux valeurs différentes. Par exemple pour $x = 4$, on obtient $y = 3$, cela signifie que la droite D passe par le point $A(4;3)$. Pour $x = 0$, on obtient $y = 1$, donc D passe par $B(1;0)$.
Finalement la droite D est la droite (AB), on relie les deux points à la règle.



Définition. *Étant donné une droite d'équation $y = ax + b$, on dit que a est le <u>coefficient directeur</u> de la droite et b son <u>ordonnée à l'origine</u>.*

Théorème.
1. L'ordonnée à l'origine d'une droite d'équation $y = ax + b$ est l'ordonnée du point d'intersection de cette droite avec l'axe des ordonnées.
2. Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ sont deux points situés sur une droite (avec $x_A \neq x_B$), le coefficient directeur de cette droite est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Schématiquement, on pourra retenir

$$\text{coefficient directeur} = \frac{\text{varition des ordonnées}}{\text{variation des abscisses}}.$$

Le coefficient directeur a s'interprète ainsi : si l'on se déplace d'une unité en abscisse, on se déplacé de a unités en ordonnées.

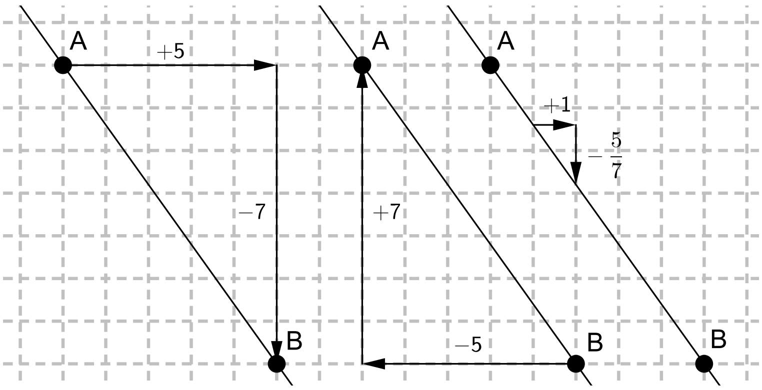
Exemple

Soit $A(-2;4)$ et $B(5;-1)$. La droite (AB) a pour coefficient directeur $\frac{-1-4}{5-(-2)} = \frac{-5}{7} = -\frac{5}{7}$.

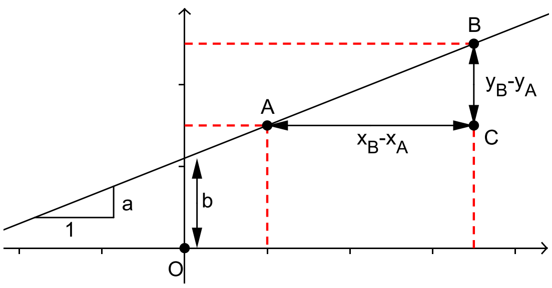
On aurait aussi pu faire comme calcul $\frac{4-(-1)}{-2-5} = \frac{5}{-7} = -\frac{5}{7}$.

Le coefficient directeur peut s'interpréter de plusieurs manières :

- quand on part d'un point de la droite, qu'on « avance » de 5 puisqu'on « descend » de 7, on obtient un nouveau de la droite ;
- quand on « recule » de 5, on « monte » de 7 ;
- quand on « avance » de 1, on « descend » de $\frac{5}{7}$.



Démonstration.



1. Ce point appartient à l'axe des ordonnées, donc son abscisse est 0. Puisqu'il est également sur la droite d'équation

$$y = ax + b,$$

son ordonnée est $a \times 0 + b = b$.

2. Comme $x_A \neq x_B$, la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées et d'après le théorème précédent, son équation est de la forme $y = ax + b$.

Le fait que les points A et B appartiennent à (AB) se traduit par les égalités $y_A = ax_A + b$ et $y_B = ax_B + b$. Par soustraction, on a obtient $y_B - y_A = ax_B - ax_A = a(x_B - x_A)$, et donc $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ puisque $x_B - x_A \neq 0$. ■

❖ Tracer une droite dans un repère

L'une des techniques vue ci-dessus consiste à déterminer deux points de la droite en choisissant deux abscisses, puis à relier ces points.

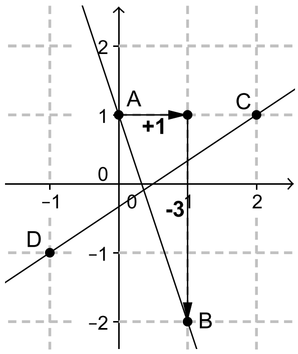
En voici une autre, utilisant la notion de coefficient directeur et d'ordonnée à l'origine.

Exemple

Soit à tracer les droites Δ d'équation $y = -3x + 1$ et Δ' d'équation $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.

- Tracé de Δ

L'ordonnée à l'origine de Δ étant 1, elle coupe l'axe des ordonnées au point A de coordonnées $(0; 1)$.
Le coefficient directeur est -3, ce qui signifie qu'en partant de A, en « avançant » de 1 et en « descendant » de 3, on obtient un point B de Δ.
La droite Δ est donc la droite (AB).



- Tracé de Δ'

On cherche un point sur Δ' ayant si possible des coordonnées entières. On constate qu'en remplaçant x par -1 on trouve $y = -1$, donc le point $D(-1; -1)$ appartient à Δ'. À présent soit on cherche un autre point (par exemple $C(2; 1)$) ou alors on interprète le coefficient directeur : en partant de D, en « avançant » de 3 et en « montant » de 2 on obtient un nouveau point (ou en partant de C en « reculant » de 3 et en « descendant » de 2).

❖ **Lire graphiquement l'équation d'une droite**

On peut fréquemment lire l'équation d'une droite à partir d'un schéma.

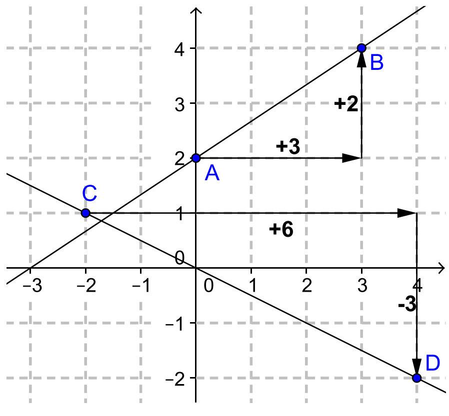
- Calcul du coefficient directeur : on repère deux points dont on connaît les coordonnées (en général situés sur un nœud du quadrillage) et on applique la formule du coefficient directeur ;
- lecture de l'ordonnée à l'origine : c'est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.

Exemple

On considère les points $A(0; 2)$, $B(3; 4)$, $C(-2; 1)$ et $D(4; -2)$.

- Équation de la droite (AB).

Pour aller de A à B, on « avance » de 3, et on « monte » de 2. Le coefficient directeur de (AB) est donc $\frac{2}{3}$. On peut s'en tenir aux formules : $A(0; 2)$ et $B(3; 4)$ donc le coefficient directeur est $\frac{4-2}{3-0} = \frac{2}{3}$.
Remarquons qu'on peut trouver le coefficient directeur en allant de B vers A : il faut « reculer » de 3 (donc l'accroissement des abscisses est -3) et « descendre » de 2 (donc l'accroissement des ordonnées est -2). On trouve bien encore $\frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$.



La droite (AB) coupe l'axe des ordonnées au point A dont l'ordonnée est 2. Donc l'ordonnée à l'origine de cette droite est 2.
En conclusion (AB) a pour équation $y = \frac{2}{3}x + 2$.
Pour confirmer ce résultat, il suffit de vérifier que les points A et B sont bien sur la droite (AB). Se référer à l'exemple A.

- Équation de la droite (CD).

Pour aller de C à D, on « avance » de 6 et on « descend » de 3, donc le coefficient

directeur de cette droite est $\frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$.
La droite semble couper l'axe des ordonnées à l'origine du repère, c'est bien le cas car le trajet « avancer » de 2 et « descendre » de 1 en partant de C nous amène à l'origine du repère. Donc l'ordonnée à l'origine de (CD) est 0.
L'équation de (CD) est donc $y = -\frac{1}{2}x$.

❖ **Déterminer l'équation d'une droite par le calcul**

Bien souvent, on ne pourra déterminer l'équation d'une droite par une simple lecture graphique, par exemple lorsque les valeurs exactes « ne tombent pas juste »

➢ *Déterminer l'équation d'une droite connaissant un de ces points et son coefficient directeur.*

Exemple

Déterminons l'équation de la droite D passant par $A(1;2)$ et coefficient directeur -3.
Puisque D est une droite, son équation est de la forme $y = ax + b$, avec a le coefficient directeur, donc l'équation est $y = -3x + b$, où b reste à déterminer.
Comme A appartient à D, ses coordonnées $(x;y)$ vérifient l'égalité $y = -3x + b$, d'où $2 = -3 \times 1 + b$ et donc $b = 5$. Ainsi l'équation de D est $y = -3x + 5$.

➢ *Déterminer l'équation d'une droite connaissant deux de ses points*

Exemple

Déterminons l'équation de la droite D passant par $A(-1;3)$ et $B(2;-4)$
On commence par calculer le coefficient directeur : $a = \frac{-4-3}{2-(-1)} = -\frac{7}{3}$.
On est alors ramené au cas précédent, puisqu'on connaît le coefficient directeur de D et l'un de ses points (A ou B, on choisit celui que l'on veut).
L'équation de D est de la forme $y = -\frac{7}{3}x + b$, avec b à déterminer.
Comme A appartient à D ses coordonnées vérifient $3 = -\frac{7}{3} \times (-1) + b$, d'où l'on déduit $b = 3 - \frac{7}{3} = \frac{2}{3}$.
Ainsi l'équation de (AB) est $y = -\frac{7}{3}x + \frac{2}{3}$.
On peut vérifier que les calculs sont corrects en procédant comme dans l'exemple A.

3. Position relative de deux droites, système d'équations linéaires

❖ **Droites parallèles**

Théorème. Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur.

Démonstration. Soit deux droites $\Delta : y = ax + b$ et $\Delta' : y = a'x + b'$. On appelle A et C les points d'intersection de Δ et Δ' avec l'axe des ordonnées et B le point de Δ d'abscisse 1. On a donc $A(0;b)$ et $C(0;b')$ et $B(1;a+b)$.

Soit $D(x_D; y_D)$ le point tel que $ABDC$ soit un parallélogramme :

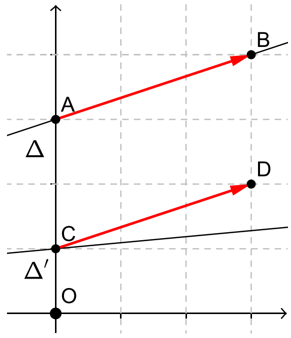
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-0 \\ a+b-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D - 0 \\ y_D - b' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = a + b' \end{cases}$$

donc $D(1; a+b')$.

Les droites Δ et Δ' sont parallèles si et seulement si $D \in \Delta'$, ce qui équivaut à

$$y_D = a'x_D + b' \Leftrightarrow a + b' = a' + b' \Leftrightarrow a = a'$$

d'où le théorème puisque a et a' sont les coefficients directeurs. ■



❖ **Droites sécantes**

Théorème. Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont sécantes si et seulement si elles ont des coefficients directeurs différents.

Cet énoncé est la contraposée du théorème précédent.

Dans le cas où les droites d'équation $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ sont sécantes (si $a \neq a'$ d'après le théorème) les coordonnées $(x; y)$ du point d'intersection des deux droites sont solutions du système

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = a'x + b' \end{cases}$$

Exemple

Montrer que les points $A(-4; 7)$, $B(6; 2)$ et $C(-32; 21)$ sont alignés.

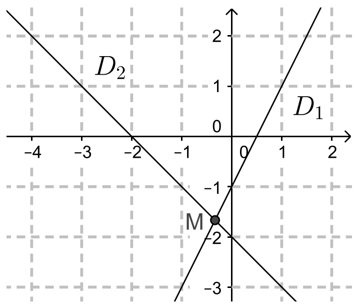
Réponse. Le coefficient directeur de (AB) est $\frac{2-7}{6-(-4)} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$ et celui de la droite (AC) est $\frac{21-7}{-32-(-4)} = \frac{14}{-28} = -\frac{1}{2}$. Ainsi les droites (AB) et (AC) sont parallèles, mais comme elles ont le point A en commun, elles sont confondues, ce qui prouve que les points A, B et C sont alignés.

Exemple

Tracer les droites D_1 et D_2 d'équation $y = 2x - 1$ et $y = -x - 2$ et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

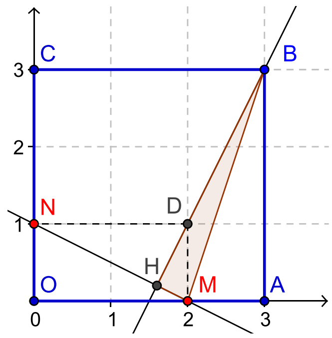
Réponse. Ces droites ne sont pas parallèles car elles ont des coefficients directeurs différents. Les coordonnées $(x; y)$ du point d'intersection M de D_1 et D_2 vérifient le système $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x - 2 \end{cases}$. On déduit alors l'équation sur x :

$$2x - 1 = -x - 2 \Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$$



La valeur de y s'obtient en remplaçant x par $-\frac{1}{3}$ dans l'une des deux équations, par exemple la première : $y = 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 1 = -\frac{5}{3}$. Ainsi $M\left(-\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

Exemple



Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(3;0)$ et $M(2;0)$. $OABD$ est un carré, $OM = CN$ et $OMDN$ est un rectangle.

1. Déterminer les équations des droites (BD) et (MN) et en déduire les coordonnées de H.
2. Montrer que (BD) et (MN) sont perpendiculaires.

Réponse. Voici les coordonnées des autres points : $N(0;1)$, $B(3;3)$, $C(0;3)$ et $D(2;1)$.

1. La droite (BD) a pour coefficient directeur $\frac{3-1}{3-2} = 2$ donc son équation est de la forme $y = 2x + b$. Or $B \in (BD)$ donc ses coordonnées vérifient $3 = 2 \times 3 + b$, d'où $b = -3$. Donc (BD): $y = 2x - 3$.
   La droite (MN) a pour coefficient directeur $\frac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2}$, donc elle a une équation de la forme $y = -\frac{1}{2}x + b$. Le point où (MN) recoupe l'axe des ordonnées est N, donc b est l'ordonnée de N, c'est-à-dire 1. Donc (MN): $y = -\frac{1}{2}x + 1$.
   Puisque le point H est à l'intersection de (BD) et (MN), ses coordonnées $(x;y)$ sont solutions du système
   $$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}.$$
   Donc x est solution de
   $$2x - 3 = -\frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow 2x + \frac{1}{2}x = 1 + 3 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{8}{5}$$
   puis $y = 2 \times \frac{8}{5} - 3 = \frac{16}{5} - \frac{15}{5} = \frac{1}{5}$. Ainsi $H\left(\frac{8}{5};\frac{1}{5}\right)$.
2. Il suffit de montrer que le triangle BHM est rectangle en H. On a
   - $BM^2 = (2-3)^2 + (0-3)^2 = 10$
   - $HM^2 = \left(2 - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{4+1}{25} = \frac{5}{25}$
   - $BH^2 = \left(\frac{8}{5} - 3\right)^2 + \left(\frac{1}{5} - 3\right)^2 = \left(-\frac{7}{5}\right)^2 + \left(-\frac{14}{5}\right)^2 = \frac{49+196}{25} = \frac{245}{25}$

   Par conséquent $BH^2 + HM^2 = \frac{245}{25} + \frac{5}{25} = \frac{250}{25} = 25 = BM^2$ et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle BHM est rectangle en H.