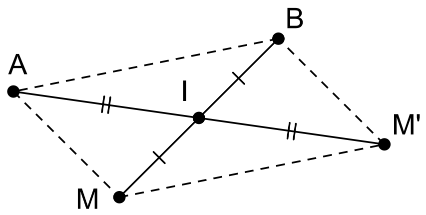
Vecteurs – Partie I

1. Translations et vecteurs

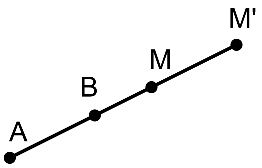
❖ Translation, vecteurs et représentants

Définition. *On se donne deux points A et B du plan.*
À tout point M, on associe l'unique point M' tel que $ABM'M$ soit un parallélogramme.
Cette transformation est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

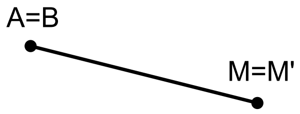
Il y a trois situations possibles.



$M \notin (AB)$



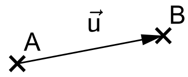
$M \in (AB)$



$A = B$

Si $A \neq B$, on représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par une flèche d'origine A et d'extrémité B.
Visuellement, ce vecteur donne l'idée d'un déplacement : il indique

- la direction (celle de la droite (AB)) ;
- le sens (de A vers B) ;
- la longueur AB.



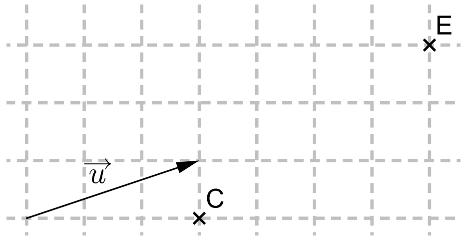
Si l'on ne porte pas d'attention à une origine où une extrémité particulière, le vecteur peut être désigné par une seule lettre, par exemple $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{t}$.

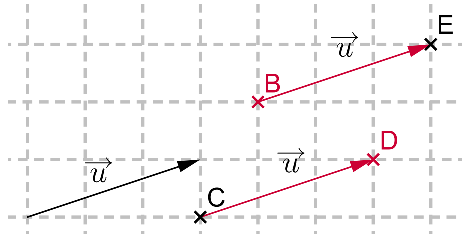
Attention. Un vecteur n'est pas un ensemble de points. C'est un objet abstrait qui caractérise une translation et qu'il est commode de représenter par une flèche.

Définition. *Soit $\vec{u}$ un vecteur et A et B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. On dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le représentant du vecteur $\vec{u}$ d'origine A et d'extrémité B.*

Exemple

Construire le représentant du vecteur $\vec{u}$ d'origine C et celui d'extrémité E.





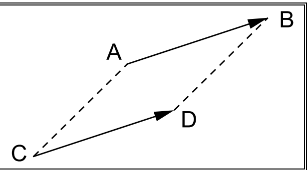
Définition. *Par la translation qui transforme A en A, tout point est sa propre image. Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé vecteur nul et est noté $\vec{0}$.*

❖ **Vecteurs égaux**

Définition. *Deux vecteurs sont égaux s'ils sont associés à la même translation.*

Visuellement, deux vecteurs sont égaux s'ils donnent l'idée du « même déplacement ».

Théorème. Soit A, B, C, D quatre points. Alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.



Exemple

Soit $ABDC$ et $CDFE$ deux parallélogrammes. Montrer que $ABFE$ est également un parallélogramme.

Réponse. $ABDC$ et $CDFE$ sont des parallélogrammes se traduit par les égalités de vecteurs $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$. Il en résulte que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ et que $ABFE$ est un parallélogramme.

❖ **Caractérisation vectorielle des parallélogrammes**

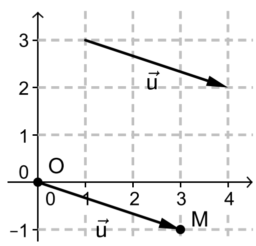
Théorème. Si $ABCD$ est un parallélogramme alors on a les quatre égalités suivantes

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\ ;\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}.$$

Réciproquement, si on a l'une des égalités précédentes, alors $ABCD$ est un parallélogramme.

2. Coordonnées d'un vecteur

Soit $(O; I, J)$ un repère du plan.



Définition. *Soit $\vec{u}$ un vecteur et M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. On appelle <u>coordonnées du vecteur</u> $\vec{u}$ les coordonnées du point M. Si les coordonnées de M sont $(x; y)$ on note $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.*

Remarque. Les coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ correspondent au déplacement effectué sur le quadrillage : x sur l'axe des abscisses et y sur l'axe des ordonnées. Sur le graphique ci-dessus, on a $M(3; -1)$ donc $\vec{u}\binom{3}{-1}$ ce qui traduit que pour aller de l'origine à l'extrémité du vecteur il faut avancer de 3 carreaux et descendre de un carreau.

Théorème. Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x = x'\\y = y'\end{cases}.$$

Démonstration. Soit M et N les points tels que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$. Donc $M(x; y)$ et $N(x'; y')$. On a

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} \Leftrightarrow [OM] \text{ et } [ON] \text{ ont le même milieu.}$$

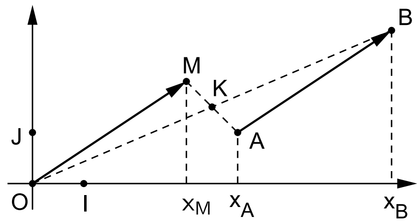
Or les coordonnées du milieu de $[OM]$ sont $\left(\frac{x}{2};\frac{y}{2}\right)$ et celle du milieu de $[ON]$ sont $\left(\frac{x'}{2};\frac{y'}{2}\right)$, donc $[OM]$ et $[ON]$ ont le même milieu $\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{x'}{2}\\ \frac{y}{2}=\frac{y'}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=x'\\ y=y'\end{cases}$ ■

Théorème. Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$. Alors $\overrightarrow{AB}\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A}$.

Démonstration. Notons M le point tel que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$ et $(x_M;y_M)$ les coordonnées de M. Puisque $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$ les segments $[OB]$ et $[AM]$ ont le même milieu K. Donc

$$\frac{x_O+x_B}{2}=\frac{x_A+x_M}{2} \text{ et } \frac{y_O+y_B}{2}=\frac{y_A+y_M}{2}$$

c'est-à-dire $x_M=x_B-x_A$ et $y_M=y_B-y_A$.
Or, par définition, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont celles de M. ■



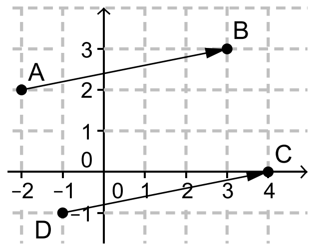
Exemple

Soit $A(-2;2)$, $B(3;3)$, $C(4;0)$ et $D(-1;-1)$. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Réponse. Il suffit de prouver que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ (attention à l'ordre des points). Or

$$\overrightarrow{AB}=\binom{3-(-2)}{3-2}=\binom{5}{1} \text{ et } \overrightarrow{DC}=\binom{4-(-1)}{0-(-1)}=\binom{5}{1}$$

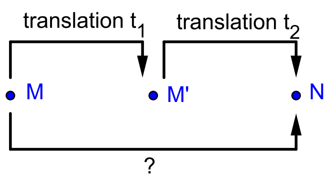
d'où l'égalité des vecteurs.



3. Somme de deux vecteurs

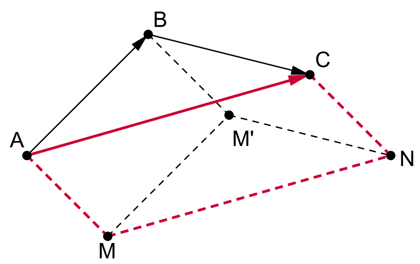
Théorème. L'enchaînement de deux translations est encore une translation.

Démonstration. Soit t_1 la translation de vecteur $\vec{u}$ et t_2 la translation de vecteur $\vec{v}$. Soit $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\vec{u}$ et C le point tel que $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$.



Donnons-nous un point M du plan et déterminons son image par l'application successive de ces deux translations.

Soit M' l'image de M par t_1 et N l'image de M' par t_2. Les quadrilatères $ABM'M$ et $BCNM'$ sont des parallélogrammes, donc $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BM'}$ et $\overrightarrow{BM'}=\overrightarrow{CN}$, d'où $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CN}$ ce qui démontre que $ACNM$ est un parallélogramme, donc que N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.



Ainsi, l'enchaînement de deux translations est encore une translation. ■

Ce théorème conduit à la définition suivante.

Définition. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur associé à la translation égale à l'enchaînement des deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On le note $\vec{u}+\vec{v}$.*

Théorème (relation de Chasles). Pour tous points A, B et C on

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

Démonstration. Cela résulte de la démonstration du théorème : on a vu que l'enchaînement de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec celle de vecteur $\overrightarrow{BC}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$, ce qui s'écrit par définition d'un vecteur somme $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. ■

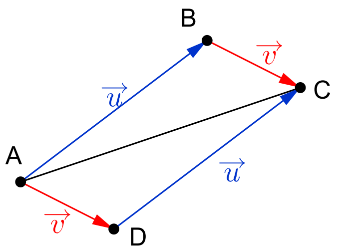
Remarque. Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$.

Théorème (commutativité de l'addition de vecteurs). Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}.$$

Démonstration. Soit $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\vec{u}$, C le point tel que $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$ et D le point tel que $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$.
Puisque $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\vec{u}$. Par conséquent en utilisant à deux reprises la relation de Chasles on a

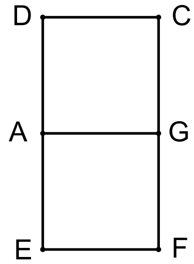
$$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{v}+\vec{u}.\ ■$$



Définition. *Soit $\vec{u}$ un vecteur de représentant $\overrightarrow{AB}$. On appelle <u>opposé du vecteur</u> $\vec{u}$ le vecteur $\overrightarrow{BA}$. On le note $-\vec{u}$. L'opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA}$, ce qui s'écrit $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.*
La différence des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u}-\vec{v}$ égal à $\vec{u}+(-\vec{v})$.

<u>Exemple</u>

$ADCG$ et $AGFE$ sont deux carrés. Déterminer



a. $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AG}$ **b.** $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DG}$ **c.** $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{EF}$
d. $\overrightarrow{EG}-\overrightarrow{AD}$ **e.** $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{CA}$ **f.** $\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{CF}$

Réponse. On essaie de remplacer un ou deux des vecteurs de la somme par des vecteurs qui leur sont égaux dans le but d'appliquer la relation de Chasles.

a. Par la relation de Chasles $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{DG}$.
b. Puisque $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AF}$, la relation Chasles permet d'écrire $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{DF}$.
c. Comme $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AG}$, on a $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{CG}$.
d. Par définition d'une différence de vecteur, $\overrightarrow{EG}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{DA}$. On a $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CG}$, donc $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}$.
e. Comme $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}$, il vient $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.
f. Puisque $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CF}$, la différence $\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{FC}$ est égale à $\vec{0}$.

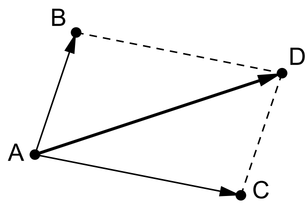
Théorème (règle du parallélogramme). Soit A, B, C, D quatre points. Alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

Démonstration. On raisonne par équivalence :

$ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

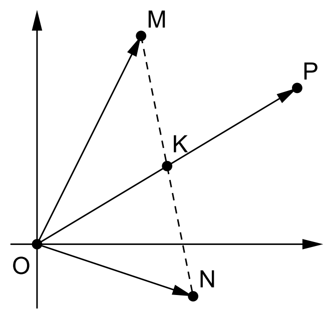
$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$ (on ajoute $\overrightarrow{AB}$ à chaque membre)

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ (relation de Chasles) ■



Théorème. Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. Alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

Démonstration. Soit M, N et P les points tels que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$, $\overrightarrow{ON}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{OP}=\vec{u}+\vec{v}$. On a donc $M(x;y)$ et $N(x';y')$ et les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ sont celles du point P.
D'après la règle du parallélogramme, $OMPN$ est un parallélogramme, donc ses diagonales se coupent en leur milieu K.
Comme K est le milieu de $[MN]$, on a $K\left(\frac{x+x'}{2};\frac{y+y'}{2}\right)$. D'autre part K est le milieu de $[OP]$ donc $K\left(\frac{x_P}{2};\frac{y_P}{2}\right)$. On en déduit donc $\frac{x_P}{2}=\frac{x+x'}{2}$ et $\frac{y_P}{2}=\frac{y+y'}{2}$ d'où $x_P=x+x'$ et $y_P=y+y'$. ■



Exemple

Soit $A(-1;2)$, $B(-3;-1)$ et $C(3;1)$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteurs $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer les coordonnées du point D défini par $\overrightarrow{AD}=\vec{u}$.
3. Démontrer que $ABDC$ est un parallélogramme.

Réponse.

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-(-1)\\-1-2\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-(-1)\\1-2\end{pmatrix}=\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}-2+4\\-3+(-1)\end{pmatrix}=\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$.
2. Soit $D(x_D;y_D)$. D'une part $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}x_D-(-1)\\y_D-2\end{pmatrix}$ et d'autre part $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$. On a donc
$$\begin{cases}x_D+1=2\\y_D-2=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=1\\y_D=-2\end{cases}$$
et on conclut que $D(1;-2)$.
3. D'après la règle du parallélogramme, l'égalité $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ est équivalente au fait que $ABDC$ est un parallélogramme.
On peut conclure en calculant $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1-3\\-2-1\end{pmatrix}=\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ et en invoquant le fait que l'égalité $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ prouve bien que $ABDC$ est un parallélogramme.