Variations, extrema et signe d'une fonction

1. Variations d'une fonction

Intuitivement, on dit qu'une fonction est croissante lorsque sa courbe représentative « monte » quand on la parcourt de gauche à droite.
Parcourir de gauche à droite, cela signifie augmenter les abscisses. « Monter » signifie augmenter l'ordonnée. On a donc la définition suivante.

Définition. *Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$.*

- *On dit que f est <u>croissante</u> sur I si*

  pour tout x et x' dans I tels que $x < x'$, on a $f(x) \leq f(x')$.

  Ce qui s'écrit aussi

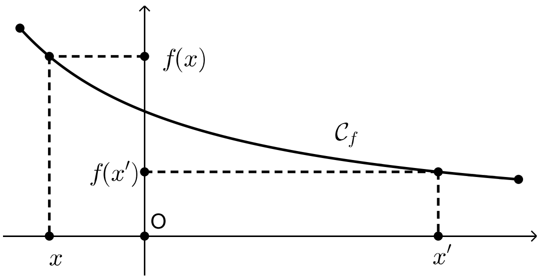
  $$\forall (x, x') \in I^2,\ x < x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x').$$

  et s'énoncé souvent « deux nombres et leurs images sont classés dans le même ordre ».

- *On dit que f est <u>décroissante</u> sur I si*

  $$\forall (x, x') \in I^2,\ x < x' \Longrightarrow f(x) \geq f(x').$$

En clair, une fonction est croissante sur I lorsque deux nombres de I et leur image sont classés dans le même ordre, et décroissante lorsque deux nombres de I et leur image sont classés dans l'ordre inverse.

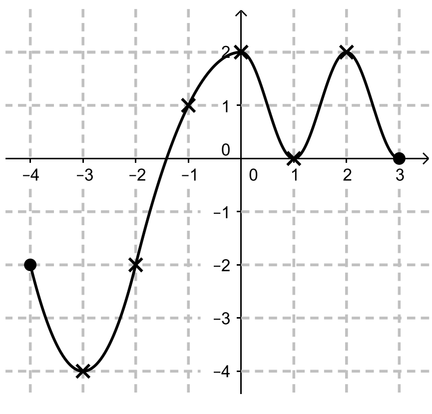


Un exemple de fonction décroissante

<u>Exemple A</u>

On considère la fonction f représentée ci-contre.
Elle est croissante sur les intervalles $[-3\,;0]$ et $[1;2]$ et décroissante sur les intervalles $[-4;-3]$, $[0;1]$ et $[2;3]$. On résume cela dans un tableau de variations.

x	-4	-3	0	1	2	3
variations de f	-2 ↘	-4 ↗	2 ↘	0 ↗	2 ↘	0



❖ Utilisation de la monotonie d'une fonction pour comparer des images

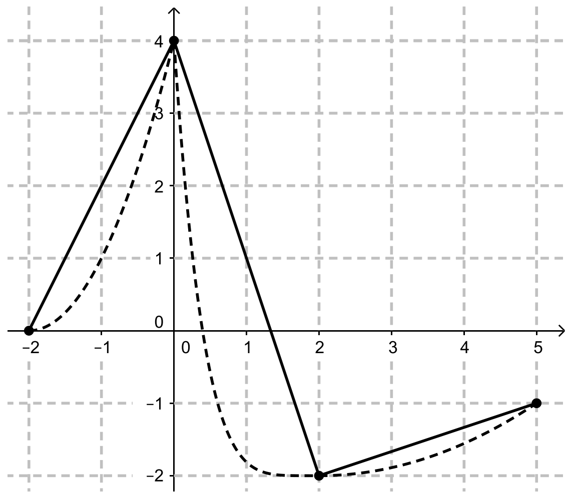
Exemple

Soit f une fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-2		0		2		5
variations de f	0	↗	4	↘	-2	↗	-1

1. Donner l'ensemble de définition de f et dessiner deux courbes représentatives possibles.
2. Répondre par vrai ou par faux, justifier.
   a. $f(3) \leq f(4)$.
   b. $f(1) = 2$.
   c. $f(1) \geq f(4)$.
   d. $f(-1) > f(3)$.

Réponse.



1. La courbe doit passer par les points de coordonnées $(-2; 0)$, $(0; 4)$, $(2; -2)$ et $(5; -1)$. Entre deux points il suffit de respecter le sens de variation. On a $\mathcal{D}_f = [-2; 5]$.
2. Il faut se méfier des mauvaises intuitions !
   a. Vrai. En effet, 3 et 4 appartiennent <u>tous les deux</u> à l'intervalle $[2\,;5]$ où la fonction f est croissante. Comme $3 < 4$, on a $f(3) < f(4)$.
   b. Faux. La seule chose que l'on peut dire est $-2 \leq f(1) \leq 4$. En effet, comme 1 appartient à l'intervalle $[0; 2]$ où la fonction g est décroissante, on a $0 < 1 < 2 \Longrightarrow f(0) \geq f(1) \geq f(2) \Longrightarrow 4 \geq f(1) \geq -2$.
   c. Faux. Voir un contre-exemple sur le graphique. On ne peut pas utiliser la méthode la question a) car 1 et 4 n'appartiennent pas à un intervalle où la fonction est monotone.
   d. Vrai. Le raisonnement se fait en deux parties en se plaçant sur des intervalles où f est monotone.
   - D'une part -2 et -1 appartiennt à l'intervalle $[-2; 0]$ où f est croissante. On a donc $f(-2) \leq f(-1)$, mais comme $f(-2) = 0$, on arrive à la conclusion $0 \leq f(-1)$.
   - D'autre part 3 et 5 appartiennent à l'intervalle $[2; 5]$ où f est croissante. On a donc $f(3) \leq f(5) = -1$.

   En comparant les deux inégalités obtenues, on a
   $$f(3) \leq -1 < 0 \leq f(-1),$$
   ce qui prouve que $f(3) < f(-1)$.

2. Extrema d'une fonction

Définition. *Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans son ensemble de définition.*
On appelle <u>maximum</u> de f sur I, s'il existe, la plus grande valeur possible des images, égale à $f(a)$ pour un certain $a \in I$.
Autrement dit, « M est le maximum de f atteint en a » signifie

$$M = f(a) \text{ et pour tout } x \in I, f(x) \leq M.$$

De même, on dit que le <u>minimum</u> de f est m, atteint en a si

$$m = f(a) \text{ et pour tout } x \in I, f(x) \geq m.$$

Un <u>extremum</u> est un minimum ou un maximum.

Exemple A

On considère la fonction f de l'exemple A.

1. Donner les extrema de f sur $\mathcal{D}_f$ et préciser pour quelle(s) valeur(s) ils sont atteints.
2. Donner les extrema de f sur $[0; 3]$.

Réponse.

1. Le minimum de f est -4, il est atteint en -3. En effet, on a d'après le graphique : $\forall x \in [-4; 3], f(x) \geq -4$ et $f(-3) = -4$.
   Le maximum de f est 2, il est atteint en 0 et 2. En effet, on a d'après le graphique : $\forall x \in [-4; 3], f(x) \leq 2$ et $f(0) = f(2) = 2$.
2. Le minimum de f sur $[0; 3]$ est 0 et le maximum est 2.

Remarque importante. Il est insuffisant de prouver que $f(x) \geq -4$. En effet on a aussi $f(x) \geq -5$ et ce n'est pas pour autant que -5 est le minimum.

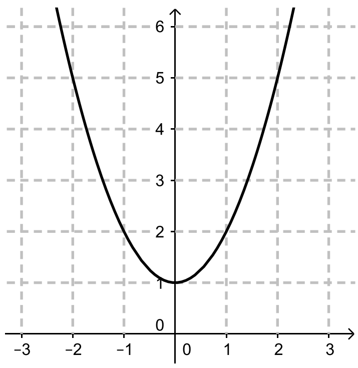
Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.

1. Tracer la courbe représentative de f.
2. Quel semble être le minimum de f ? Le maximum ?

Réponse.

1. Voir ci-contre.
2. Un carré étant toujours positif, on a $x^2 + 1 \geq 1$. D'autre part $f(0) = 1$. Donc le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 1, atteint en $x = 0$.
   La fonction f n'admet pas de maximum, car elle prend des valeurs de plus en plus grandes.



Exemple

On considère la fonction définie sur $I = [0; 4]$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

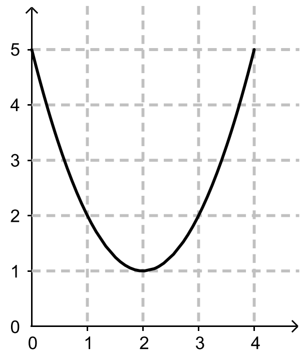
1. Tracer la courbe représentative de f et conjecturer le minimum de f.
2. Démontrer que $f(x) = (x-2)^2 + 1$.
3. Démontrer la conjecture concernant le minimum.

Réponse.

1. Voir graphique ci-contre. Le minimum semble être 1 atteint en $x = 2$.
2. On a $(x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$, donc

$$f(x) = (x-2)^2 + 1.$$

3. Pour montrer que 1 est le minimum, il faut montrer que pour tout $x \in [0; 4]$, on a $f(x) \geq 1$ et qu'il existe (au moins) une valeur de $x \in [0; 4]$ pour laquelle l'égalité $f(x) = 1$ a lieu.



On calcule la différence $f(x) - 1$:

$$f(x) - 1 = (x - 2)^2.$$

- Un carré étant positif, $(x-2)^2 \geq 0$, donc $f(x) - 1 \geq 0$, c'est-à-dire : pour tout $x \in [0; 4]$, $f(x) \geq 1$.
- De plus $f(x) = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Donc 2 est le seul nombre qui a pour image 1.

Il résulte de cela que le minimum de f sur $[0; 4]$ est 1 et qu'il est atteint pour $x = 2$.

3. Signe d'une fonction

Déterminer le signe d'une fonction f, c'est donner en fonction des valeurs de x le signe de $f(x)$, à savoir : positif, négatif ou nul.
Graphiquement, cela revient à cherche pour quelles valeurs de x la courbe de f est au-dessus, au-dessous ou coupe l'axe des abscisses.

Exemple A

Le tableau de signes de la fonction f est le suivant.

x	-4		$-1{,}5$		1		3
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 4$.
La fonction f prend des valeurs positives lorsque $f(x) \geq 0$. On a

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Cela montre que

- si $x > 2$, alors $f(x) > 0$;
- si $x = 2$, alors $f(x) = 0$;
- si $x < 2$, alors $f(x) < 0$.

Le signe de f est donc le suivant.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	