Fonctions affines et tableaux de signes

1. Fonctions affines

Définition. *Soit a et b deux réels. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ $f(x) = ax + b$ s'appelle fonction <u>affine</u>. Si $b = 0$, la fonction est dite <u>linéaire</u>.*

<u>Exemple</u>

Les fonctions suivantes sont affines

- $x \mapsto -3x + 2$ avec $a = -3$ et $b = 2$;
- $x \mapsto \frac{1}{2} - x$ avec $a = -1$ et $b = \frac{1}{2}$;
- $x \mapsto \frac{-4+3x}{2}$ avec $a = \frac{3}{2}$ et $b = -\frac{4}{2} = -2$.
- $x \mapsto 3$ avec $a = 0$ et $b = 3$.

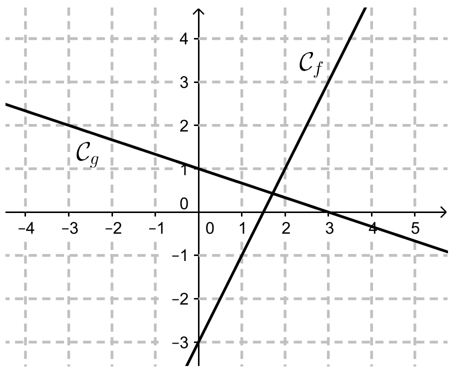
Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \frac{5}{x}$ ne sont pas affines.

Remarque. Si $a = 0$, la fonction est constante, égale à b.

Théorème. On munit le plan d'un repère. La courbe représentative d'une fonction affine est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.
Réciproquement, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la courbe représentative d'une fonction affine.

<u>Exemple</u>

On a représenté ci-dessous les courbes des fonctions f et g définies par $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = \frac{1}{3}x + 1$.
Leurs courbes représentatives sont les droites d'équation $y = 2x - 3$ et $y = \frac{1}{3}x + 1$.



❖ **Variations des fonctions affines**

Théorème (variation des fonctions affines). Soit f la fonction affine $f: x \mapsto ax + b$.
Si $a > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.
Si $a < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a > 0$

x	$-\infty$ ↗ $+\infty$
variation de f	↗

Si $a < 0$

x	$-\infty$ ↘ $+\infty$
variation de f	↘

Démonstration. Soit x et x' deux réels, avec $x < x'$. On a

$$f(x') - f'(x) = ax' - ax = a(x' - x)$$

et comme $x' - x > 0$ par hypothèse, le signe de $f(x') - f(x)$ est le même que celui de a.
Si $a > 0$, $f(x') - f(x) > 0$, soit $f(x') > f(x)$, ce qui traduit que f est croissante.
Si $a = 0$, $f(x) = f(x')$, la fonction ne prend qu'une seule valeur.
Si $a < 0$, $f(x') - f(x) < 0$, soit $f(x') < f(x)$, ce qui traduit que f est décroissante. ■

❖ **Signe des fonctions affines**

Théorème (signe de $ax + b$). Le signe de $ax + b$ (avec $a \neq 0$) dépend du signe de a.
Soit k la solution de l'équation $ax + b = 0$.

Si $a > 0$

x	$-\infty$	k	$+\infty$
signe de $ax + b$	$-$	0	$+$

Si $a < 0$

x	$-\infty$	k	$+\infty$
signe de $ax + b$	$+$	0	$-$

Démonstration. Supposons $a > 0$. On a $ax + b \geq 0 \Leftrightarrow ax \geq -b \Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}$ (car $a > 0$), d'où le signe dans ce cas en appelant k le nombre $-\frac{b}{a}$.
Si $a < 0$, on a $ax + b \geq 0 \Leftrightarrow ax \geq -b \Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$ (car $a < 0$). ■

Exemple

Construire les tableaux de signes des fonctions f et g définies par $f(x) = 2x + 4$ et $g(x) = -x + 7$. Clairement $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ et $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 7$. Les tableaux s'en déduisent en déterminant le signe de a (positif pour f et négatif pour g).

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
signe de $f(x)$	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	7	$+\infty$
signe de $g(x)$	$+$	0	$-$

2. Équations-produit

On se ramène, si possible, en factorisant, à la résolution d'une ou plusieurs équations du premier degré en utilisant le résultat suivant.

Théorème (Cas de nullité d'un produit). Soit A et B deux nombres. On a l'équivalence

$$AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

Ceci s'énonce communément « un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul ».

Exemple

Résolvons l'équation $(x + 3)(2x - 1) = 0$.

$$\begin{aligned} (x+3)(2x-1) = 0 &\Leftrightarrow x + 3 = 0 \text{ ou } 2x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } 2x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

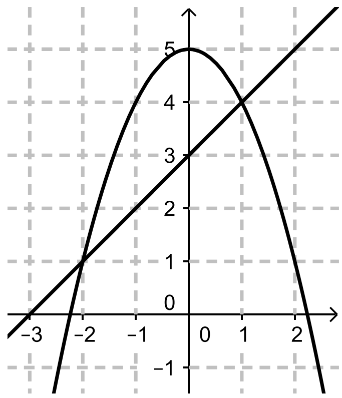
L'ensemble des solutions est donc $\left\{-3; \frac{1}{2}\right\}$.

Exemple

1. Résoudre graphiquement l'équation $5 - x^2 = x + 3$.
2. **a.** Vérifier que l'équation précédente équivaut à $-x^2 - x + 2 = 0$.
   b. Vérifier que $x^2 + x - 2 = (x + 2)(1 - x)$ et retrouver les solutions de l'équation $5 - x^2 = x + 3$ lues sur le graphique.

Réponse.

1. On trace les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = 5 - x^2$ et $g(x) = x + 3$. Elles se coupent visiblement en les points de coordonnées $(-2; 1)$ et $(1; 4)$. On vérifie immédiatement par un calcul que -2 et 1 sont des solutions de l'équation et il semblerait qu'il n'y en ait pas d'autres. Donc l'ensemble des solutions de l'équation semble être $\{-2; 1\}$.



2. **a.** En passant tous les termes à gauche
$$5 - x^2 = x + 3 \Leftrightarrow -x^2 - x + 2 = 0.$$
   b. La vérification est immédiate. L'équation produit $(x + 2)(1 - x) = 0$ a pour solution -2 et 1.
   Ce calcul démontre que ce sont les seules solutions de l'équation alors que le graphique nous avait simplement permis de constater que -2 et 1 sont <u>des</u> solutions, sans certitude qu'il n'y en ait pas d'autres.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4$.

1. Calculer l'image de 3.
2. Déterminer les antécédents de -3.
3. Déterminer les antécédents de -10.

Réponse.

1. On a $f(3) = 5$, l'image de 3 est donc 5. On peut également dire que 3 est <u>un</u> antécédent de 5 par f (il n'est pas exclu qu'il y en ait d'autres).
2. On cherche les nombres x dont l'image est -3. Autrement x est solution de l'équation $f(x) = -3$. En utilisant les équations-produits et une identité remarquable, on a
$$\begin{aligned} f(x) = -3 &\Leftrightarrow x^2 - 4 = -3 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ou } x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1. \end{aligned}$$
   Donc <u>les</u> antécédents de -3 par f sont 1 et -1 (on est sûr qu'il n'y a pas d'autres antécédents puisqu'on a résolu l'équation qu'ils vérifient).
3. L'équation $f(x) = -10$ équivaut $x^2 = -6$. Or on sait qu'un carré est toujours positif, cette équation n'a donc pas de solution et -10 n'admet aucun antécédent par la fonction f.

3. Tableaux de signes et position relative de courbes

On sait déjà construire les tableaux de signe des fonctions affines. On va étudier le signe de fonctions plus compliquées en les factorisant.

Exemple

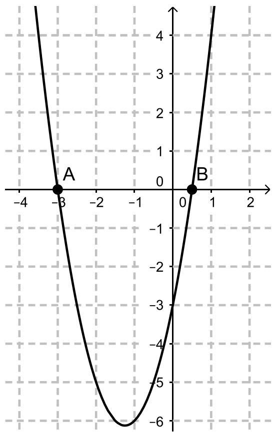
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$.
La fonction f se factorise en $f(x) = (2x-1)(x+3)$ car

$$(2x-1)(x+3) = 2x^2 + 6x - x - 3 = 2x^2 + 5x - 3 = f(x).$$

Dans un même tableau, on met le signe de chacun des facteurs $2x-1$ et $x+3$ puis à l'aide de la règle des signes on détermine le signe du produit $f(x)$.

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Cela montre que la courbe de f est située au-dessous de l'axe des abscisses sur $\left[-3; \frac{1}{2}\right]$ et au-dessus sur $]-\infty; -3] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.
Les points d'intersection de l'axe des abscisses avec la courbe de f sont $A(-3; 0)$ et $B\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.



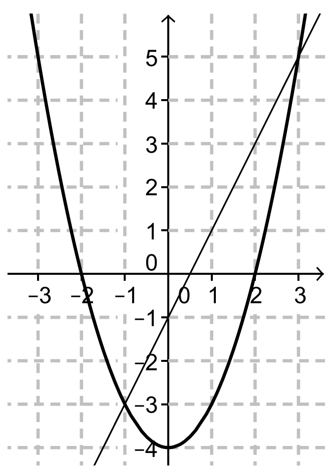
De ce tableau de signes, on peut déduire par exemple que

- L'équation $f(x) = 0$ a pour ensemble de solution $\left\{-3; \frac{1}{2}\right\}$.
- L'inéquation $f(x) \geq 0$ a pour ensemble de solution $]-\infty; -3] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.
- L'inéquation $f(x) < 0$ a pour ensemble de solution $\left]-3; \frac{1}{2}\right[$.

Les tableaux de signes permettent d'étudier la « position relative » des courbes de deux fonctions f et g, c'est-à-dire de savoir quand la courbe de f est située au-dessous (ou au-dessus) de celle de g. Pour cela on étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.



1. Tracer la droite D d'équation $y = 2x - 1$ et conjecturer la position relative de C et D.
2. Montrer que
$$f(x) - (2x-1) = (x-3)(x+1)$$
et déterminer la position relative de D et C.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de D et C.

Réponse.

1. Voir le graphique.
2. En développant :

$$(x-3)(x+1) = x^2 - 2x - 3 = x^2 - 4 - (2x-1).$$

Le signe de $f(x) - (2x-1)$ est donc le même que celui de $(x-3)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x)-(2x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où la conclusion :

- si $x \in]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[$, $f(x) - (2x-1) \geq 0$ soit $f(x) \geq 2x - 1$, ce qui signifie que C est au-dessus de D ;
- si $x \in [-1; 3]$, $f(x) - (2x-1) \leq 0$ soit $f(x) \leq 2x - 1$, ce qui signifie que C est au-dessous de D.

3. Les courbes D et C se coupent lorsque $f(x) = 2x - 1$, c'est-à-dire lorsque $x = -1$ ou $x = 3$ d'après le tableau de signe.
Les coordonnées des points d'intersection de D et C sont donc $\left(-1; f(-1)\right)$ et $\left(3; f(3)\right)$, c'est-à-dire $(-1; -3)$ et $(3; 5)$.