

Fonctions affines et tableaux de signes – Exercices

Fonctions affines

1 Les fonctions suivantes sont-elles affines ? Si oui préciser les coefficients a et b .

- a. $f(x) = 4x + 5$ b. $f(x) = x^2 + 1$
 c. $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ d. $f(x) = 3 - x$
 e. $f(x) = x\left(\frac{1}{3} - x\right) + x^2$ f. $f(x) = \frac{-5+3x}{7}$
 g. $f(x) = 2(x - 1)$ h. $f(x) = \frac{(2x+1)^2}{4} - x^2$

2 Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont croissantes sur \mathbb{R} ? Lesquelles sont décroissantes sur \mathbb{R} ?

$f_1(x) = 3x - 2$ $f_2(x) = -2x + 3$
 $f_3(x) = -\frac{x}{2} + 3$ $f_4(x) = \frac{-x+3}{4}$

3 Pour chacune des fonctions de l'exercice précédent, construire le tableau de signe.

4 Dresser le tableau de signes de chacune des fonctions suivantes.

a. $f_1(x) = 3x - 6$ b. $f_2(x) = -2x - 1$
 c. $f_3(x) = -5x + 7$ d. $f_4(x) = 2x$

5 Le tableau ci-dessous donne le tableau de signe d'une fonction affine f .

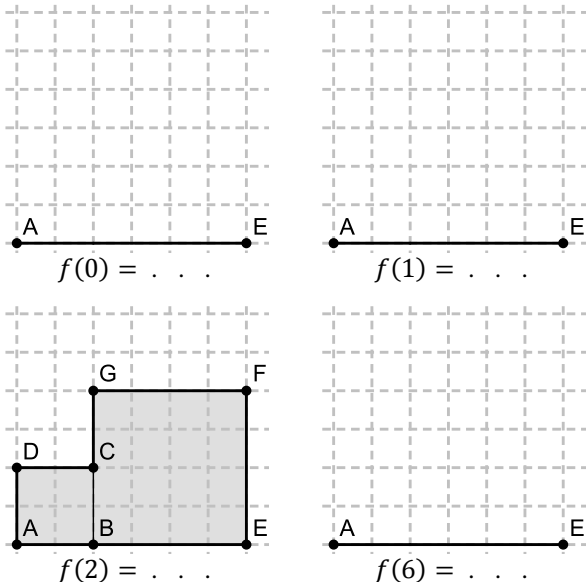
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
signe de $f(x)$	-	\emptyset	+

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles peuvent convenir pour f ?

$f_1(x) = -x - 2$ $f_2(x) = 2x + 4$
 $f_3(x) = 5 + \frac{5}{2}x$ $f_4(x) = x - 2$

6 Soit $[AE]$ un segment de longueur 6 et M un point de ce segment. On construit les carrés $ABCD$ et $BFGC$ comme indiqué sur la figure. On appelle x la longueur AB et $f(x)$ la longueur de la ligne polygonale $AEFGCDA$ en gras.

1. Calculer $f(x)$ pour les valeurs de x indiquées et construire la figure dans chaque cas.



2. Démontrer que

$$f(x) = \begin{cases} 24 - 2x, & \text{si } x \in [0; 3] \\ 12 + 2x, & \text{si } x \in [3; 6]. \end{cases}$$

3. Dans un repère orthogonal d'unité 1 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées, tracer la courbe représentative de la fonction f .
4. Déterminer graphiquement l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la longueur de la ligne polygonale est comprise entre 20 et 22. Retrouver ceci par le calcul.

Équations-produit

7 Résoudre les équations suivantes.

- a. $(2x - 4)(5 - x) = 0$
 b. $21(x - 1)(x - 3) = 0$
 c. $(x - 1)^2 = 0$
 d. $4(7x - 3)(4x + 1)^2 = 0$
 e. $-3(x - 2)(3x - 3)(5 - 4x) = 0$

8 Résoudre les équations suivantes.

- a. $3x^2 - 3x = 0$
 b. $3x(2x + 1) - (4 - x)(2x + 1) = 0$
 c. $(x - 1)(x + 2) = (x - 1)(2x + 1)$
 d. $(2x + 1)^2 = 4x^2$
 e. $x^2 - 1 = x + 1$

9 On souhaite résoudre $2x^2 = 3 - x$.

- Représenter graphiquement chacun des membres et conjecturer les solutions de l'équation.
- Développer $(2x + 3)(x - 1)$.
- En déduire les solutions de l'équation.

10 Mêmes questions que l'exercice précédent avec l'équation $3x - x^2 = 2$ après avoir vérifié que $3x - x^2 - 2 = (1 - x)(x - 2)$.

11 On considère l'équation $2x^2 = x + 6$.

- Résoudre graphiquement cette équation.
- Vérifier que

$$2x^2 - x - 6 = (2x + 3)(x - 2)$$

et en déduire les solutions.

Tableaux de signes

12 (Règle des signes)

- Rappeler la règle des signes d'un produit.
- f et g sont des fonctions dont les tableaux de signes sont les suivants.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Signe de $f(x)$	-	\emptyset	+

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
Signe de $g(x)$	+	\emptyset	-

Compléter le tableau de signe de $f(x) \times g(x)$.

x	
Signe de $f(x) \times g(x)$	

3. Résoudre les inéquations

$$f(x) \times g(x) > 0 \text{ et } f(x) \times g(x) \leq 0.$$

13 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 2.$$

1. Représenter graphiquement f et conjecturer son signe.
2. Vérifier que $f(x) = (x + 2)(2x - 1)$
3. Dans un même tableau, faire apparaître le signe de $x + 2$ et celui de $2x - 1$. En déduire le tableau de signe de f .
4. Résoudre les inéquations $f(x) < 0$ et $f(x) \geq 0$.

14 Dresser le tableau de signes de chacune des fonctions suivantes.

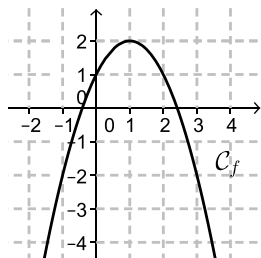
- a. $f(x) = (x - 3)(2x + 1)$
- b. $g(x) = (1 - x)(4x - 3)$
- c. $h(x) = 5x - 2x^2$

Résolution d'inéquations

15 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1.$$

1. a. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq -2$.
b. Montrer que cette inéquation équivaut à $(x + 1)(3 - x) \geq 0$ et retrouver les solutions grâce à une étude de signe.
2. a. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 1$.
b. Transformer l'inéquation et la résoudre à l'aide d'un tableau de signes.



16 Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$.

1. Résoudre graphiquement $f(x) > 0$.
2. Montrer que $f(x) = (x^2 + 1)(x + 2)$.
3. Justifier que pour tout x , on a $x^2 + 1 > 0$.
4. Résoudre par le calcul $f(x) > 0$.

17 On considère l'équation $x^3 = 2x - 4$.

1. Conjecturer les solutions de l'équation à l'aide de la calculatrice.
2. Montrer que $x^3 - 2x + 4 = (x + 2)(x^2 - 2x + 2)$.
3. Montrer que $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$.
4. Résoudre l'équation.

18 On considère l'algorithme ci-dessous.

Variables : i est un entier
Traitement : Pour i de -10 à 10 faire
 Si $i^2 - 2i \leq 1$ alors
 Afficher « i est solution »
 Sinon Afficher « i n'est pas solution »
 Fin Si
 Fin Pour

1. Quel est le rôle de cet algorithme ? Quelles valeurs s'affichent à l'écran ?
2. Montrer que $x^2 - 2x - 1 = (x - 1)^2 - 2$ et en déduire la factorisation de $x^2 - 2x - 1$.
Résoudre alors l'inéquation $x^2 - 2x - 1 \leq 0$.

Position relative de deux courbes

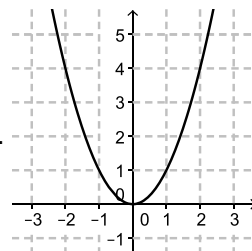
19 Soit les droites $D_1: y = x - 2$ et $D_2: y = -2x + 1$.

1. Les tracer dans un repère, conjecturer leur position relative.
2. Démontrer la conjecture.

20 Même exercice avec les droites $D_1: y = x + 1$ et $D_2: y = -\frac{1}{3}x + 2$.

21 On a tracé dans le repère ci-dessous la courbe C d'équation $y = x^2$. Soit D la droite d'équation $y = x + 2$.

1. Tracer la droite D et conjecturer la position relative de C et D .
2. Montrer que $x^2 - (x + 2) = (x - 2)(x + 1)$.
3. Construire le tableau de signe de $x^2 - (x + 2)$ et prouver la conjecture.



22 Soit C la courbe d'équation $y = 3x^2 - 5x$. Soit D la droite d'équation $y = 3x + 3$.

1. À l'aide de la calculatrice ou de GeoGebra, conjecturer la position relative de C et D .
2. Montrer que $3x^2 - 5x - (3x + 3) = (3x + 1)(x - 3)$.
3. Construire le tableau de signe de $3x^2 - 5x - (3x + 3)$ et prouver la conjecture.

23 On a représenté ci-dessous la courbe C d'équation $y = x^3 - 11x$. Soit D la droite d'équation $y = 2x - 12$.

1. Tracer la droite D et conjecturer la position relative de C et D .
2. Montrer que $x^3 - 11x - (2x - 12) = (x - 3)(x - 1)(x + 4)$.
3. Construire le tableau de signe de $(x - 3)(x - 1)(x + 4)$ et prouver la conjecture

