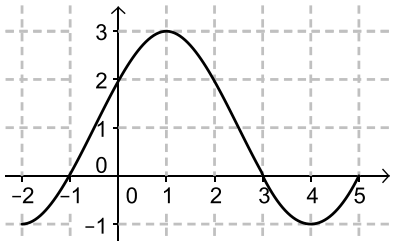
Équations et inéquations – Exercices

Résolution graphique d'(in)équations

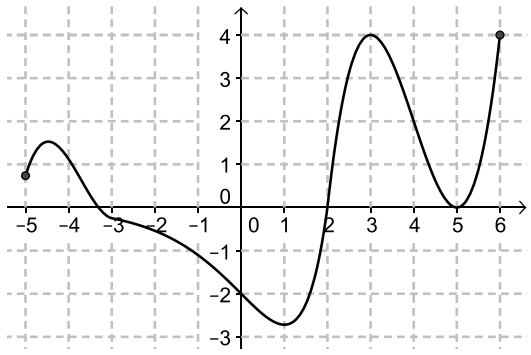
1 Soit f la fonction définie sur $[-2;5]$ dont la courbe est donnée ci-dessous.



Résoudre graphiquement les inéquations suivantes.

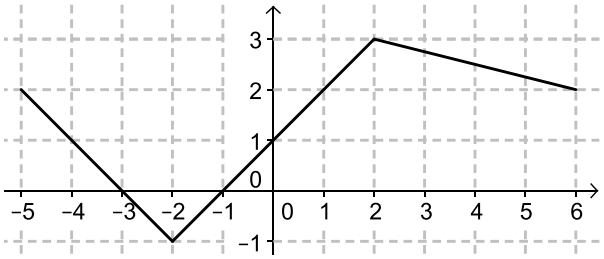
a. $f(x) > 0$ **b.** $f(x) \geq 0$ **c.** $f(x) < 0$
d. $f(x) \leq 0$ **e.** $f(x) \geq 2$

2 On considère la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-5;6]$.



1. Résoudre avec la précision permise par le graphique les équations et inéquations suivantes.
   a. $f(x) = 4$ **b.** $f(x) \leq 0$ **c.** $f(x) \leq 1$
   d. $f(x) < 4$
2. Quelles sont les valeurs possibles du nombre d'antécédents d'un réel par cette fonction ? Pour chacune d'elles, donner un réel ayant le nombre d'antécédents indiqué.

3 On considère la fonction f définie sur $[-5;6]$ et dont la courbe représentative est la suivante.



1. Résoudre les équations suivantes.
   a. $f(x) = 3$ **b.** $f(x) = 1$ **c.** $f(x) = 6$
2. Citer un réel ayant 3 antécédents ; préciser ses antécédents.
3. Citer les réels ayant un seul antécédent.
4. Résoudre les inéquations suivantes.
   a. $f(x) \leq 1$ **b.** $f(x) \geq 0$ **c.** $f(x) \geq 2$
   d. $f(x) < 3$ **e.** $f(x) \geq -1$ **f.** $f(x) > 0$
5. Donner en fonction du réel k le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.
   On complétera pour cela le tableau suivant.

L'équation $f(x) = k$ a … solutions	si $k \in$ …
0	
1	$\{-1;3\}$

4 Le tableau de variation d'une fonction f est donné ci-dessous. On a complété avec quelques valeurs.

x	-5		-3		-1		1		2		4
f		2	↗	5	↘	0	↘	-4	↗	0	↗	3

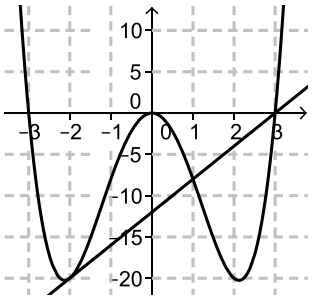
1. Tracer une courbe possible pour f.
2. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.
3. Combien 3 admet-il d'antécédents ?

5 À l'aide la calculatrice ou de GeoGebra, conjecturer le nombre de solutions des équations suivantes.

a. $3 - x^3 = 3x^2$ **b.** $3 - x^3 = 2x^2$
c. $x^3 + 2 = 6x^2 - x^4$ **d.** $x^3 + 6 = 6x^2 - x^4$

6 On tracé ci-contre les courbes représentatives des fonctions f et g définies par

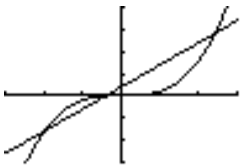
$$f(x) = x^4 - 9x^2$$
et $g(x) = 4x - 12$.



1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation
   $$f(x) = g(x)$$
   et conjecturer les solutions.
   Vérifier par un calcul que les valeurs conjecturées sont bien des solutions de l'équation.
2. Résoudre graphiquement $f(x) \leq g(x)$.

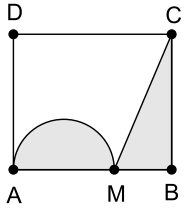
7 Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et $g(x) = 5x + 2$.

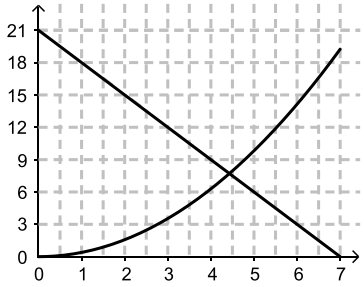
On a tracé ci-contre les courbes représentatives des fonctions f et g.



1. Conjecturer le nombre de solution de l'équation $f(x) = g(x)$.
2. Parmi ces solutions, l'une est un nombre entier. Laquelle ? Donner une valeur approchée à 0,01 des autres solutions grâce au zoom. Comparer ces valeurs $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$.

8 Soit $ABCD$ un rectangle. On place un point M libre sur le segment $[AB]$. Comme sur la figure ci-dessous, on trace un demi-cercle de diamètre $[AM]$ et le triangle MBC. On note x la distance AM.





Le graphique représente les aires $f(x)$ et $g(x)$ du demi-disque et du triangle respectivement.

1. Identifier les courbes de f et g.

2. Déterminer les dimensions du rectangle $ABCD$.

3. Estimer graphiquement la valeur de x pour laquelle le demi-disque et le triangle ont la même aire.
En donner une valeur approchée au centième.

9 **(Prix d'équilibre).** Une étude de marché s'intéresse à l'évolution de l'offre et de la demande d'un produit en fonction de son prix unitaire, exprimée en euros.
Pour un prix de x €, compris entre 2 et 30, le nombre de produits demandés est modélisé par la fonction f définie par $f(x) = 0{,}05x^2 - 4x + 80$ et le nombre de produits offerts par g définie par $g(x) = 2x + 6$.

1. Déterminer le nombre de produits offerts et le nombre de produits demandés lorsque le prix du produit est de 18 €.

2. On appelle prix d'équilibre le prix pour lequel l'offre et la demande sont égales.
- **a.** Déterminer graphiquement le prix d'équilibre.
- **b.** Quel est alors le nombre de produits demandés ?
- **c.** Quand y a-t-il rupture de stock ?

10 Soit l'équation $x^3 - x + 2 = 0$.

x	$f(x)$
$-1{,}54$	
$-1{,}53$	
$-1{,}52$	
$-1{,}51$	
$-1{,}5$	

1. À l'aide de la calculatrice, combien de solutions semble avoir l'équation ? Donner un encadrement à 0,1 près de ces solutions.

2. À l'aide de la « table » compléter le tableau ci-contre de valeurs de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - x + 2$.
En déduire un encadrement 0,01 près de la solution.

3. Trouver un encadrement à 0,001 près.

11 On considère l'équation (E) : $3x - x^3 = x + 2$.

1. Conjecturer le nombre de solution de (E).

2. Expliquer pourquoi l'équation peut s'écrire
$$3x - x^3 - x - 2 = 0.$$

3. À l'aide de la table de la calculatrice, donner une valeur approchée de la solution de (E) à 0,01 près.

12 À l'aide de la calculatrice ou de GeoGebra, conjecturer les solutions des inéquations suivantes.

a. $2x^2 - x^3 \geq 2 - x$ **b.** $2x^2 - x^3 \leq x$

13 On considère l'algorithme ci-contre.

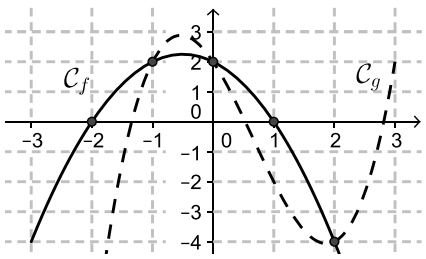
```
Pour i de −3 à 3
  Si i² ≥ i + 3
  Afficher i
  FinSi
FinPour
```

1. Quelles valeurs s'affichent à l'écran à l'exécution de l'algorithme ?

2. Quel est le rôle de cet algorithme ?

3. Que retourne-t-il si l'on remplace $i + 3$ par $i - 3$?

14 Voici les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $[-3; 3]$.



Pour chacune des propositions, dire si elle est vraie, énoncer la réciproque et dire si cette dernière est vraie.

a. Si $x \in]0; 2[$, alors $f(x) < g(x)$.

b. Si $x = -2$, alors $g(x) = 0$.

c. Si $x \in [1; 2]$, alors $f(x) \times g(x) < 0$.

Résolution d'(in)équations par le calcul

15 Entourer les bonnes réponses.

1. La solution de l'équation $3x = 0$ est
a. -3 **b.** 3 **c.** 0

2. La solution de l'équation $-x + 1 = -2x - 1$ est
a. -2 **b.** $\frac{2}{3}$ **c.** -1

3. Une solution de l'équation $x^2 = 2x + 3$ est
a. 3 **b.** 1 **c.** -1

4. Une solution de l'équation $x^3 = 7x - 6$ est
a. 1 **b.** 2 **c.** -3

16 Vrai ou faux ? Justifier.

1. On considère l'équation $x + 3 = -x - 1$.
- **a.** Une solution de cette équation est -2.
- **b.** La solution de cette équation est -2.
- **c.** L'ensemble des solutions est $\{-2\}$.

2. On considère l'équation $(x - 1)(x + 2) = 0$.
- **a.** Une solution de cette équation est -2.
- **b.** La solution de cette équation est -2.

3. On considère l'équation $x^3 = 7x + 6$.
- **a.** -1 et -2 sont des solutions de cette équation.
- **b.** L'ensemble des solutions est $\{-1; -2\}$.

4. Les équations $2x - 3 = -x$ et $2 + x = 3x$ sont équivalentes.

5. L'équation $2x - 1 = 5 + 2x$ n'a pas de solution.

6. On considère les équations
$$x^2 - 1 = 0 \text{ et } x^2 = 2x + 3.$$
- **a.** Ces équations ont une solution commune.
- **b.** Ces équations sont équivalentes.

7. On considère l'inéquation $2x + 3 \geq 6 - x$.
- **a.** 1 et 2 sont des solutions de l'inéquation.
- **b.** L'ensemble des solutions est $[-1; +\infty[$.

8. On considère l'inéquation $x^3 < x$.
- **a.** 1 est solution de l'inéquation.
- **b.** L'ensemble des solutions est $]0; 1[$.

17 On donne les algorithmes suivants.

Algorithme A	**Algorithme B**
• Choisir un nombre • Le mettre au carré • Ajouter 3 • Multiplier par 2 • Afficher le résultat	• Choisir un nombre • En prendre l'inverse s'il existe • Soustraire 3 • Afficher le résultat

1. Pour chaque algorithme, calculer lorsque c'est possible les images de 2 ; -1 ; 0 ; $\frac{1}{3}$.

2. Chaque algorithme définit une fonction. Donner une expression algébrique de celle-ci en précisant l'ensemble de définition.

3. Déterminer les antécédents de 8 et de 0.

18 Résoudre les équations suivantes.

a. $2x = -x + 3$ **b.** $3 - x = x + 2$

c. $7 - (x - 1) = x$ **d.** $5 - (1 + x) = -x + 3$

e. $3(x - 1) = 4x - 1$ **f.** $\frac{4x+1}{3} = \frac{1-x}{2}$

19 Résoudre les équations suivantes.

a. $x+1=-2x-4$ **b.** $\frac{1}{2}x+3=\frac{1}{3}x+4$

c. $\frac{1}{2}+x=\frac{x}{2}$ **d.** $7x-\frac{1}{3}=5x+2$

e. $\frac{2x-3}{2}=\frac{x}{4}$ **f.** $\frac{x}{2}+3=\frac{x-1}{5}$

20 Résoudre les inéquations suivantes.

a. $2x \geq x+3$ **b.** $x \geq 4x+6$

c. $7+x \leq 3-2x$ **d.** $\frac{x}{2} \leq \frac{x}{5}$

e. $\frac{x}{2} \leq x+1$ **f.** $1-x \leq \frac{1+x}{3}$

21 Pour chacune des équations, entourer parmi les propositions les solutions.

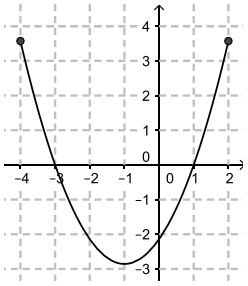
Équation	Solutions proposées		
1. $\frac{2x-2}{x+1}=0$	**a.** 1	**b.** -1	**c.** 2
2. $\frac{x^2-4}{2-x}=0$	**a.** 2	**b.** -2	**c.** 1
3. $\frac{x+1}{x-1}=\frac{6}{x}$	**a.** 1	**b.** 2	**c.** 3
4. $\frac{4}{x}=\frac{3x-2}{4-x}$	**a.** $\frac{1}{3}$	**b.** $-\frac{8}{3}$	**c.** 2
5. $\frac{3x-x^2}{5-x}=\frac{x}{x+1}$	**a.** 0	**b.** 1	**c.** 2

22 Un père a 30 ans de plus que son fils ; dans 7 ans il aura le triple de l'âge de son fils. Quel est l'âge du fils ?

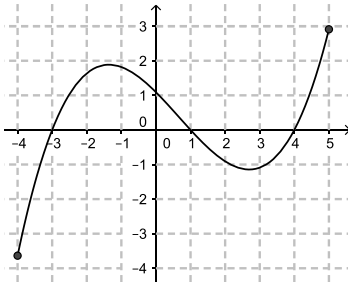
Signe d'une fonction

23 Dresser les tableaux de signe des fonctions représentées ci-dessous.

a.



b.



24 Soit f une fonction dont le tableau de signe est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1. Déterminer les signes de $f(3)$, $f(-1)$, $f\left(-\frac{11}{3}\right)$ et $f(1)$.

2. Résoudre $f(x)=0$, $f(x) \geq 0$ et $f(x)<0$.

25 On donne le tableau de variations et le tableau de signe d'une fonction f.

Proposer une représentation graphique de cette fonction.

x	-10		-6		-1		4
variations de f	-5	↗	1	↘	-3	↗	5

x	-10		-7		-3		1		4
signe de f		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

26 Déterminer le signe des fonctions affines f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3-x$ et $g(x)=7x+5$.

27 Déterminer le signe de la fonction f définie par $f(x)=x^2+3$.