Probabilités – Exercices

Univers et événements

1 Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, décrire l'univers et donner le nombre d'issues qui le composent.

a. On lance deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note
- **i.** le plus grand des numéros obtenus ;
- **ii.** la somme des numéros obtenus ;
- **iii.** l'écart entre les numéros obtenus (c'est-à-dire la différence sans le signe).

b. On lance cinq fois une pièce de monnaie. La sortie de pile rapporte un point, la sortie de face ne rapporte aucun point. On s'intéresse à la somme des points obtenus à l'issue des cinq lancers.

2 Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. Les boules paires sont bleues, les boules impaires sont vertes. Déterminer l'univers associé à chacune de ces expériences :

a. on tire une boule et on note sa couleur ;
b. on tire une boule et on note son numéro ;
c. on tire simultanément deux boules et on note l'écart des numéros obtenus ;
d. on tire successivement avec remise deux boules et on note l'écart des numéros obtenus ;
e. on tire simultanément deux boules et on note la somme des numéros obtenus ;
f. on tire successivement avec remise deux boules et on note la somme des numéros obtenus.

3 On lance deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on calcule la somme des numéros. Donner les issues qui réalisent les événements :
- A : « le résultat est pair » ;
- B : « le résultat est au moins égal à 5 ».

4 Une urne contient cinq boules numérotées de 1 à 5. Les boules 1 et 2 sont rouges, les autres sont jaunes.
On tire une première boule, puis, sans la remettre, une seconde boule. Les issues seront notés ab où a et b désignent les numéros obtenus dans l'ordre.

1. Vrai ou faux ? Justifier.
- **a.** L'événement A : « obtenir deux numéros différents » est certain.
- **b.** L'issue 23 réalise l'événement B : « obtenir des boules de couleurs différentes ».
- **c.** L'événement C : « obtenir deux boules rouges » est $\{12\}$.
- **d.** L'événement D : « la somme des numéros est 10 » est impossible.

2. Recommencer avec des tirages avec remise.

5 On dispose de quatre cartes sur les lesquelles sont écrites les lettres M, A, T et H. Les cartes sont retournées sur une table. Déterminer l'univers associé à chacune des expériences aléatoires suivantes :

a. on prend une carte ;
b. on prend successivement avec remise deux cartes ;
c. on prend successivement sans remise deux cartes ;
d. on prend simultanément deux cartes.

Probabilité

6 Dans chaque cas, déterminer la valeur de t qui permet de définir une loi de probabilité.

a.

Issues	Vert	Jaune	Rouge
Probabilités	0,15	0,5	t

b.

Issues	A	B	C	D
Probabilités	0,1	0,85	0,03	t

7 Pour chacune de ces expériences aléatoires, déterminer l'univers et donner la probabilité de chaque issue. Est-on dans une situation d'équiprobabilité ?

a. Le cycle d'un feu vert dure une minute : 40 secondes au rouge, 5 secondes au orange et 15 secondes au vert. Un automobiliste arrive et observe la couleur du feu.
b. On étudie dans un lycée la LV1 des élèves : 65 % ont choisi anglais, 25 % espagnol et le reste a pris allemand. On choisit un élève au hasard et on note sa LV1.
c. On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée et on note les côtés obtenus, dans l'ordre d'apparition (par exemple PPF pour pile, pile puis face).
d. On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée et on note le nombre de « pile » obtenus.

8 Une urne contient 11 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 11. Les boules paires sont bleues, les boules impaires sont vertes. On tire une boule et on note son numéro. Calculer la probabilité des événements :
- A : « le numéro obtenu est pair » ;
- B : « la boule obtenue est verte » ;
- C : « la boule est bleue et porte un numéro multiple de 3 » ;
- D : « la boule est verte et porte un numéro multiple de 4 ».

9 On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée et on note les côtés obtenus, dans l'ordre d'apparition. On considère les événements
- A : « obtenir exactement deux faces » ;
- B : « le deuxième jet est une face » ;
- C : « le troisième jet est différent du premier » ;
- D : « on obtient au moins un pile » ;
- E : « on obtient au plus une face ».

1. Écrire sous forme d'ensemble ces événements.
2. Calculer leur probabilité.

10 On interroge un échantillon représentatif de personnes âgées de 15 à 25 ans sur le nombre de SMS envoyés en moyenne par heure à des amis.
On obtient les résultats suivants.

Nombre moyen de SMS envoyés par heure	0	1	2	3 ou plus
Fréquence	10 %	17 %	53 %	20 %

On rencontre une personne âgée de 15 à 25 ans. Déterminer la probabilité des événements suivants.
- A : « la personne envoie en moyenne un SMS par heure » ;
- B : « la personne envoie en moyenne au moins deux SMS par heure » ;
- C : « la personne envoie en moyenne au plus deux SMS par heure ».

11 On considère une cité scolaire de 2000 élèves.

- 19 % des élèves sont en Terminale ;
- parmi les élèves de Terminale, 55 % sont des filles ;
- le taux de réussite au baccalauréat dans cet établissement est de 85 % ;
- parmi les candidats ayant échoué, la proportion de fille a été de $\frac{8}{19}$.

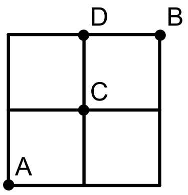
1. Compléter le tableau des effectifs regroupant les résultats au baccalauréat.

	Garçons	Filles	Total
Réussite			
Échec			
Total			380

2. On choisit un élève au hasard parmi les élèves de Terminale. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas été reçu au baccalauréat ?

3. On choisit au hasard un élève ayant eu son baccalauréat. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

12 Sur le quadrillage ci-contre, on se rend du point A au point B. Les « pas » autorisés sont de taille 1, soit vers la droite, codé d, soit vers le haut, codé h. Un trajet est par exemple $hhdd$.



1. Déterminer l'ensemble des trajets possibles.

2. Écrire sous forme d'ensemble les événements

- E_1 : « le trajet passe par le point C » ;
- E_2 : « le trajet passe par le point D » ;
- E_3 : « le trajet ne passe pas par le point C » ;
- E_4 : « le trajet ne passe ni par C, ni par D ».

Opérations sur les événements

13 On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. On appelle

- C l'événement « la carte tirée est un cœur » ;
- F l'événement « la carte tirée est une figure, c'est-à-dire valet, dame ou roi » ;

Décrire chacun des événements suivants par une phrase et donner le nombre d'issues qui le réalise.

a. $C \cap F$ **b.** $C \cup F$ **c.** $\bar{C} \cap F$ **d.** $\overline{C \cup F}$

14 On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie et on note les côtés obtenus, dans l'ordre d'apparition. On considère les événements

- A : « obtenir au moins un pile » ;
- B : « obtenir au plus un pile ».

1. Décrire les événements suivants par une phrase et l'écrire sous forme d'ensemble.

a. $\bar{A}$ **b.** $A \cap B$ **c.** $A \cup B$

2. Les événements A et B sont-ils incompatibles ?

15 On lance simultanément deux dés cubiques. On note l'issue ab avec $a \leq b$ où a et b sont les numéros obtenus sur les deux faces. On considère les événements :

- A : « la somme $a + b$ est 6 » ;
- B : « l'écart entre les deux numéros est 2 ».

1. Écrire sous forme d'ensemble A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$.

2. Décrire par une phrase les événements $A \cap B$ et $A \cup B$.

16 Soit S et T deux événements tels que

$P(S) = 0{,}5$; $P(T) = 0{,}6$ et $P(S \cup T) = 0{,}9$.

Calculer les probabilités suivantes.

a. $P(S \cap T)$ **b.** $P(\overline{S} \cup \overline{T})$ **c.** $P(\overline{S} \cap \overline{T})$

17 A et B sont deux événements incompatibles tels que $P(A) = 0{,}4$ et $P(B) = 0{,}22$. Calculer

a. $P(\bar{A})$ **b.** $P(\bar{B})$ **c.** $P(A \cup B)$

18 Dans chaque cas, existe-t-il deux événements A et B vérifiant les conditions données ?

a. $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}3$ et $P(A \cap B) = 0{,}5$.
b. $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}3$ et $P(A \cup B) = 0{,}8$.
c. $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cup B) = 0{,}5$.

Arbres, tableaux

19 Une urne contient deux boules rouges numérotées 1 et 2, notées R_1, R_2 et trois boules bleues numérotées de 1 à 3, notées B_1, B_2, B_3.
Les boules sont indiscernables au toucher.
On tire au hasard *successivement* deux boules *avec remise* de la première boule.

1. Calculer la probabilité des événements suivants.

- A : « le tirage ne comporte que des boules bleues » ;
- B : « le tirage comporte au moins une boule bleue » ;
- C : « le tirage ne comporte que des boules numérotées 2 » ;
- D : « le tirage comporte au moins une boule numérotée 2 » ;
- E : « le tirage comporte une boule bleue ou une boule numérotée 2 ».

2. Reprendre les questions précédentes si l'on prélève successivement sans remise les deux boules.

20 Une urne contient 4 jetons indiscernables au toucher : deux jaunes, un rouge, un vert. On tire au hasard un jeton de l'urne puis un second *sans remettre* le premier. On note les couleurs obtenues, dans l'ordre d'apparition.

1. Représenter la situation par un arbre.

2. Combien y a-t-il d'issues ?

3. On considère les événements

- R : « le premier jeton tiré est rouge » ;
- J : « le deuxième jeton tiré est jaune ».

a. Déterminer $P(R)$ et $P(J)$.
b. Traduire par une phrase $R \cap J$ et calculer $P(R \cap J)$.
c. Calculer $P(R \cup J)$.

4. On considère l'événement

- N : « aucun jeton tiré n'est jaune ».

a. Calculer $P(N)$.
b. Traduire $\overline{N}$ par une phrase et calculer $P(\overline{N})$.

21 On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes, on note sa valeur, puis on la remet dans le jeu avant d'en tirer une seconde dont on note la valeur.

1. Quel est l'univers ? Combien y a-t-il d'issues ?

2. Est-ce une situation d'équiprobabilité ?

3. Calculer la probabilité des événements suivants

- A : « tirer 2 cœurs » ;
- B : « ne pas tirer de cœur » ;
- C : « tirer exactement un cœur » ;
- D : « tirer deux fois la même carte » ;
- E : « tirer deux cartes différentes » ;
- F : « tirer le roi de cœur ».

4. Reprendre les questions 1 à 3 si l'on tire deux cartes, l'une après l'autre sans remettre la première carte.

22 On lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on calcule l'écart entre ces deux numéros.

1. Donner l'univers de cette expérience aléatoire.
2. À l'aide d'un tableau à double entrée, donner la loi de probabilité de cette expérience.
3. Quelle est l'issue la plus probable ?

23 Un hôpital comporte deux salles d'opération s_1 et s_2 qui ont la même probabilité d'être occupées.

- La probabilité que l'une des salles au moins soit occupée est 0,9 ;
- La probabilité que les deux salles soient occupées est 0,5.

On s'intéresse à l'état d'occupation des deux salles ; l'univers est constitué de quatre issues notées dans la suite : s_1s_2, $s_1\overline{s_2}$, $\overline{s_1}s_2$ et $\overline{s_1}\,\overline{s_2}$.

1. Donner en une phrase la signification de chacune de ces quatre issues.
2. On note S_1 l'événement « la salle s_1 est occupée » et S_2 « la salle s_2 est occupée ». Donner l'écriture sous forme d'ensemble de S_1 et S_2 et traduire les trois hypothèses de l'énoncé à l'aide de ces événements (et éventuellement leur réunion, intersection, contraire etc.)
3. Exprimer les événements suivants à l'aide de S_1 et S_2 et calculer leur probabilité (on justifiera soigneusement).
   - A : « la salle s_1 est libre » ;
   - B : « les deux salles sont libres » ;
   - C : « l'une des salles au moins est libre » ;
   - D : « une seule des deux salles est libre ».

Simulation

24 **Problème du Grand Duc de Toscane**

Un jeu en vogue à la cour de Florence au début du 17ème siècle consistait à lancer trois dés cubiques équilibrés et à faire la somme des numéros des trois faces.

Le Duc observa que la somme 10 avait tendance à apparaître plus souvent que 9, alors qu'il y a autant de possibilité d'écrire 9 et 10 comme somme de trois numéros de face.

1. Écrire 9 et 10 comme somme de trois numéros de face. Par exemple : $9 = 6 + 2 + 1 = 5 + 3 + 1 = \ldots$
2. On souhaite simuler 10 000 fois l'expérience aléatoire sur un tableur.

	A	B	C	D	E	F
1	Dé n°1	Dé n°2	Dé n°3	Somme	Issues	Fréquence
2	5	2	2	9	9	12,01%
3	4	6	3	13	10	12,35%
4	5	1	2	8		

   a. Laquelle de ces formules faut-il taper en A2 pour que par recopie la plage A2:C10001 soit remplie d'entiers entre 1 et 6 ?
   `=6*ALEA()+1` `=ENT(6*ALEA()+1)`
   `=ENT(ALEA())` `=ALEA(6*ENT()+1)`

   b. Quelle formule faut-il saisir en D2 pour l'étendre jusqu'en D10001 ?

   c. Laquelle de ces formules faut-il saisir en F2 pour que par recopie en F3 le tableur calcule la fréquence de 9 et de 10.
   `=NB.SI(A2:D10001;9)/10000`
   `=NB.SI($A2:$D10001;E2)/10000`
   `=NB.SI($D2:$D10001;9)/10000`
   `=NB.SI(D$2:D$10001;E2)/10000`

   d. L'observation est-elle cohérente avec celle du Duc de Toscane ?
3. Montrer que la probabilité d'obtenir la somme 9 est $\frac{25}{216}$ et celle d'obtenir 10 est $\frac{27}{216}$.

25 Un QCM comportant quatre questions est donné dans un devoir. À chaque question sont associées deux propositions : l'une est fausse, l'autre est vraie. On les nommera J_1, F_1 pour la première question, J_2, F_2 pour la deuxième, etc.
Une réponse juste rapporte 1 point, une réponse fausse retire 0,5 point.
Un élève n'ayant pas appris le cours répond au hasard à chacune des questions. Il donne ainsi « une réponse complète » formée de quatre éléments, par exemple $(J_1; F_2; F_3; J_4)$.

1. Quel est le nombre total de « réponses complètes » possibles pour l'élève ?
2. a. Les « réponses complètes » $(J_1; F_2; F_3; J_4)$ et $(F_1; F_2; J_3; J_4)$ aboutissent-elles à la même note à l'exercice ? Indiquer un critère qui permet d'affirmer que deux « réponses complètes » aboutissent à la même note finale à l'exercice.
   b. Pour que la note finale soit supérieure à 0, combien l'élève doit-il donner d'éléments justes dans une « réponse complète » ?
3. a. Expliquer à quel problème répond l'algorithme suivant.

```
Variables :
  n, S, i, R1, R2, R3, R4, N
Début
  Saisir n
  S ← 0
  Pour i allant de 1 à n faire
    R1 ← EntierAléaEntre(0; 1)
    R2 ← EntierAléaEntre(0; 1)
    R3 ← EntierAléaEntre(0; 1)
    R4 ← EntierAléaEntre(0; 1)
    N ← R1 + R2 + R3 + R4
    Si N ≥ 2 alors
      S ← S + 1
    FinSi
  FinPour
  Afficher(« la fréquence est : », S/n)
Fin
```

   b. Programmer l'algorithme sur une calculatrice ou dans une feuille de calcul sur un tableur.
   c. Victor affirme « Pour que la note soit supérieure à 0 il faut 2, 3 ou 4 éléments justes. Or l'élève peut donner 0, 1, 2, 3 ou 4 éléments justes. Donc la probabilité que la note soit supérieure à 0 est $\frac{3}{5}$ ». Utiliser le programme pour confirmer ou infirmer l'affirmation de Victor.
4. À l'aide d'un arbre à 16 branches, montrer que la probabilité que l'élève ait une note positive est $\frac{11}{16}$. Que penser de la stratégie de l'élève ?
5. On suppose qu'à présent que chacune des quatre questions du QCM comporte trois propositions : l'une est juste et les deux autres fausses.
Que penser de la stratégie de l'élève qui répond au hasard à toutes les questions ?