Fonctions du second degré

1. Variations et extrema d'une fonction : compléments

Intuitivement, on dit qu'une fonction est croissante lorsque sa courbe représentative « monte » quand on la parcourt de gauche à droite.
Parcourir de gauche à droite, cela signifie augmenter les abscisses. « Monter » signifie augmenter l'ordonnée. On a donc la définition suivante.

Définition. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*

- *On dit que f est <u>croissante</u> sur I si*

  pour tout x et x' dans I tels que $x < x'$, on a $f(x) \leq f(x')$.

  Ce qui s'écrit aussi

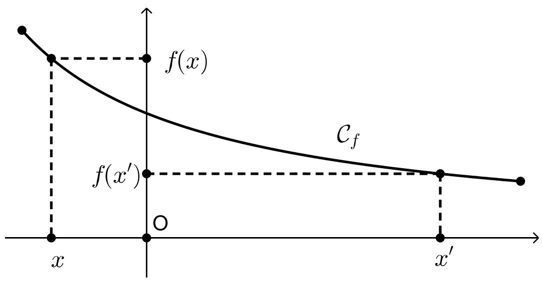
  $$\forall (x, x') \in I^2,\ x < x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x').$$

  et s'énoncé souvent « deux nombres et leurs images sont classés dans le même ordre ».

- *On dit que f est <u>décroissante</u> sur I si*

  $$\forall (x, x') \in I^2,\ x < x' \Longrightarrow f(x) \geq f(x').$$

En clair, une fonction est croissante sur I lorsque deux nombres de I et leur image sont classés dans le même ordre, et décroissante lorsque deux nombres de I et leur image sont classés dans l'ordre inverse.



Un exemple de fonction décroissante

Définition. *Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans son ensemble de définition.*
On appelle <u>maximum</u> de f sur I, s'il existe, la plus grande valeur possible des images, égale à $f(a)$ pour un certain $a \in I$.
Autrement dit, « M est le maximum de f atteint en a » signifie

$$M = f(a) \text{ et pour tout } x \in I, f(x) \leq M.$$

De même, on dit que le <u>minimum</u> de f est m, atteint en a si

$$m = f(a) \text{ et pour tout } x \in I, f(x) \geq m.$$

Un <u>extremum</u> est un minimum ou un maximum.

<u>**Exemple**</u>

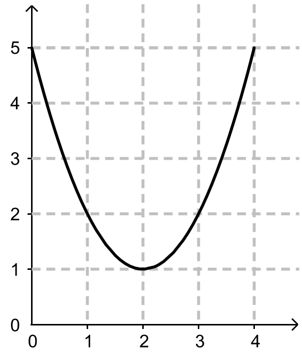
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

1. Tracer la courbe représentative de f et conjecturer le minimum de f.
2. Démontrer que $f(x) = (x - 2)^2 + 1$.
3. Démontrer la conjecture concernant le minimum.

Réponse.

1. Voir graphique ci-contre. Le minimum semble être 1 atteint en $x = 2$.
2. On a $(x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$, donc
$$f(x) = (x-2)^2 + 1.$$
3. Pour montrer que 1 est le minimum, il faut montrer que pour tout $x \in [0;4]$, on a $f(x) \geq 1$ et qu'il existe (au moins) une valeur de $x \in [0;4]$ pour laquelle l'égalité $f(x) = 1$ a lieu.
   - Un carré étant positif, $(x-2)^2 \geq 0$, donc $(x-2)^2 + 1 \geq 1$, c'est-à-dire : pour tout $x \in [0;4]$, $f(x) \geq 1$.
   - De plus $f(2) = 1$.

   Il résulte de cela que le minimum de f sur $[0;4]$ est 1 et qu'il est atteint pour $x = 2$.



2. Fonction carré

Définition. *On appelle fonction carré la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.*

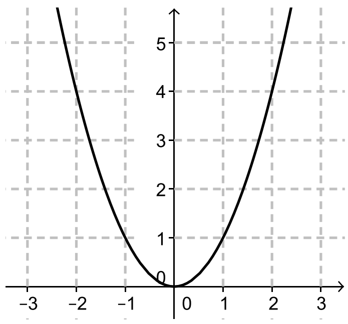
Voici quelques valeurs de la fonction carrée, notée f.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

❖ **Représentation graphique de la fonction carré**

Définition. *La courbe représentative de la fonction carré est une parabole.*

Cette parabole est située au-dessus de l'axe des abscisses, et elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées puisque deux nombres opposés ont le même carré.



❖ **Sens de variation de la fonction carré**

Théorème. La fonction carré f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variation de f	$\searrow$	0	$\nearrow$

On retient ce résultat sous la forme : « deux nombres positifs et leur carré sont rangés dans le même ordre et deux nombres négatifs et leur carré sont rangés dans l'ordre contraire ».

Démonstration 1. Soit a et b deux réels vérifiant $a < b$. Si a et b sont positifs, en multipliant cette égalité par a, on obtient $a^2 \leq ab$, tandis que si on la multiplie par b on a $ab \leq b^2$. Ainsi $a^2 \leq ab \leq b^2$ ce qui prouve que $f(a) \leq f(b)$.

On fait un raisonnement analogue si a et b sont négatifs.

Démonstration 2. On se donne deux réels a et b avec $a < b$. Calculons la différence des images de a et b :

$$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Par hypothèse $a - b < 0$. Mais on est embêté par le signe de $a + b$. Il faut donc envisager deux cas.

- Si a et b sont tous les deux négatifs, on a $a + b < 0$ et donc par la règle du signe d'un produit $(a - b)(a + b) > 0$, soit encore $f(a) - f(b) < 0$. On a donc l'implication :
  $$\forall\ (x, x') \in]-\infty; 0]^2, a < b \Rightarrow f(a) > f(b),$$
  ce qui traduit que f est décroissante sur $]-\infty; 0]$.
- Si a et b sont tous les deux positifs, alors cette fois $a + b > 0$, donc $f(a) < f(b)$ ce qui traduit que f est croissante sur $[0; +\infty[$.

En conclusion, on a montré que la fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$. ■

Exemple

Donner l'encadrement le plus précis possible de x^2 dans chacun des cas suivants :

a. $1 \leq x \leq 4$;

b. $-3 \leq x \leq -2$;

c. $-1 \leq x \leq 2$.

Réponse. On se place sur des intervalles où $f : x \mapsto x^2$ est monotone.

a. Les nombres $1, x, 4$ appartiennent à l'intervalle $[0; +\infty[$ où f est croissante, donc l'inégalité $1 \leq x \leq 4$ entraîne $1^2 \leq x^2 \leq 4^2$, c'est-à-dire $1 \leq x^2 \leq 16$.

b. Les nombres $-3, x, -2$ appartiennent à l'intervalle $]-\infty; 0]$ où f est décroissante, donc $(-3)^2 \geq x^2 \geq (-2)^2$, c'est-à-dire $4 \leq x^2 \leq 9$.

c. On découpe l'intervalle $[-1; 2]$ en deux : $[-1; 0]$ et $[0; 2]$. Si $-1 \leq x \leq 0$, alors $0 \leq x^2 \leq 1$ par décroissance de f. Si $0 \leq x \leq 2$, alors $0 \leq x^2 \leq 4$ par croissance de f. Donc le meilleur encadrement que l'on puisse donner de x^2 est $0 \leq x^2 \leq 4$.

❖ Signe de la fonction carré

Le carré d'un nombre non nul est strictement positif, et le carré de 0 est 0. Le tableau de signe de la fonction carré est donc le suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de f		$+$	0	$+$	

3. Fonctions du second degré

❖ Définition

Définition. *On appelle* <u>*fonction du second degré*</u> *toute fonction f de la forme*

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b, c sont trois réels avec $a \neq 0$. Ceci est la <u>*forme développée*</u> *de la fonction du second degré considérée.*

Exemple

$x \mapsto x^2$, $x \mapsto -5x + x^2 - 1$ sont des fonctions du second degré, mais pas $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Définition. *La courbe représentative d'une fonction du second degré (c'est-à-dire toute courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$) s'appelle une <u>parabole</u>.*

❖ Forme canonique

Il est clair qu'étant donné trois réels a, α, β la fonction f définie par $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ est une fonction du second degré, il suffit de développer pour s'en rendre compte : on obtient des x^2, des x et une constante.

Définition. *On appelle <u>forme canonique</u> une expression du second degré du type*

$$a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où a, α et β sont des réels avec $a \neq 0$.

Exemple

Forme canonique	Forme développée	a	b	c	α	β
$(x-2)^2 - 1$	$x^2 - 4x + 3$	1	-4	3	2	-1
$2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{2}$	$2x^2 + 2x - 12$	2	2	-12	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{25}{2}$
x^2	x^2	1	0	0	0	0
$-x^2 - 1$	$-x^2 - 1$	-1	0	-1	0	-1

Une fonction du second degré écrite sous forme canonique est assez simple à étudier comme on le verra par la suite. Il serait donc intéressant de pouvoir mettre sous forme canonique toutes les fonctions du second degré. Le théorème suivant affirme que c'est possible.

Théorème (mise sous forme canonique). Toute fonction du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où α et β sont deux réels. Plus précisément, on a $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Démonstration du théorème. On a en effet $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ ce qui montre que $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{4ac-b^2}{4a}$ conviennent (on ne retiendra pas la valeur de β !). ■

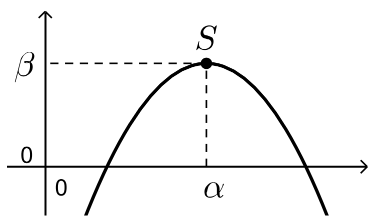
Exemple

Soit f définie par $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$. On a $a = 2$, $b = 4$, donc $\alpha = -\frac{4}{2 \times 2} = -1$ et $\beta = f(-1) = 1$, d'où $f(x) = 2(x+1)^2 + 1$.

Définition. *On appelle <u>sommet</u> de la parabole d'équation*

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

le point de coordonnées $(\alpha; \beta)$.



❖ Variation d'une fonction du second degré

Commençons par étudier un exemple.

Exemple

Soit f définie par $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$. La forme canonique est $2(x+1)^2 + 1$ d'après l'exemple précédent.
On se donne deux réels x et x' avec $x < x' \leq -1$. On a donc
$$x + 1 < x' + 1 \leq 0$$
et comme $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$ il vient
$$(x+1)^2 > (x'+1)^2$$
d'où en multipliant par 2, $2(x+1)^2 > 2(x'+1)^2$ puis enfin en ajoutant 1,
$$2(x+1)^2 + 1 > 2(x'+1)^2 + 1,$$
c'est-à-dire
$$f(x) > f(x').$$
Cela prouve que f est décroissante sur $]-\infty; -1]$. On montre de même que f est croissante sur $[-1; +\infty[$ en utilisant la croissance de $x \mapsto x^2$ sur $[0; +\infty[$.

Dans le cas général on a le résultat suivant, qu'en pratique on appliquera directement.

Théorème (sens de variation d'une fonction du second degré). Le sens de variation de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ dépend du signe de a.
Soit $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ sa forme canonique. Alors

Si $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
variation de f	$\searrow$	β	$\nearrow$

Si $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
variation de f	$\nearrow$	β	$\searrow$

Démonstration. On sait que toute fonction du second degré f s'écrit sous sa forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
Supposons $a > 0$.
Soit $x < x' \leq \alpha$. Il vient donc $x - \alpha < x' - \alpha \leq 0$ et comme $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$ on a $(x-\alpha)^2 > (x'-\alpha)^2$.
On a donc $a(x-\alpha)^2 > a(x'-\alpha)^2$ puis $f(x) > f(x')$ en ajoutant β. Cela montre que f est décroissante sur $]-\infty; \alpha]$.
Pour $\alpha \leq x < x'$, on a $0 \leq x - \alpha < x' - \alpha$ et donc $(x-\alpha)^2 < (x'-\alpha)^2$. En multipliant par $a > 0$ puis en ajoutant β on conclut donc que $f(x) < f(x')$, ce qui traduit que f est croissante sur $[\alpha; +\infty[$.
Pour $a < 0$, les inégalités sont inversées puisque la multiplication par un nombre négatif d'une inégalité change son sens. ■

Exemple A

Construire les tableaux de variations des fonctions f et g définies par
$$f(x) = (x+3)^2 - 4 \text{ et } g(x) = -x^2 + 2x - 4$$
après avoir montré que $g(x) = -(x-1)^2 - 3$.

Réponse. La fonction f est déjà sous forme canonique, avec $a = 1 > 0$, $\alpha = -3$ et

$\beta = -4$. La vérification demandé pour g est immédiate, les coefficients de sa forme canonique sont donc $a = -1 < 0$, $\alpha = 1$ et $\beta = -3$.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
variation de f	$\searrow$	-4	$\nearrow$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
variation de g	$\nearrow$	-3	$\searrow$

❖ Étude du signe et factorisation d'une fonction du second degré

Si la forme canonique d'une fonction du second degré se présente comme une différence de deux carrés, on peut la factoriser grâce à l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ puis déterminer son signe par un tableau de signe. Dans l'autre cas, la forme canonique est une somme de deux carrés, le signe est alors constant (et on ne peut pas factoriser).

Exemple A

Construire les tableaux de signe des fonctions f et g précédentes.

Réponse. On a

$$f(x) = (x + 3)^2 - 4 = (x + 3)^2 - 2^2 = (x + 3 - 2)(x + 3 + 2) = (x - 1)(x + 5),$$

ceci est la forme factorisée de f. On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
signe de $x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x + 5$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'autre part $g(x) = -(x - 1)^2 - 3$. Mais $-(x - 1)^2 \leq 0$ puisque qu'un carré est positif, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leq -3$ donc g est strictement négative.