Fonctions affines et tableaux de signes

1. Fonctions affines

Définition. *Soit a et b deux réels. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ax + b$ s'appelle fonction <u>affine</u>. Si $b = 0$, la fonction est dite <u>linéaire</u>.*

<u>Exemple</u>

Les fonctions suivantes sont affines

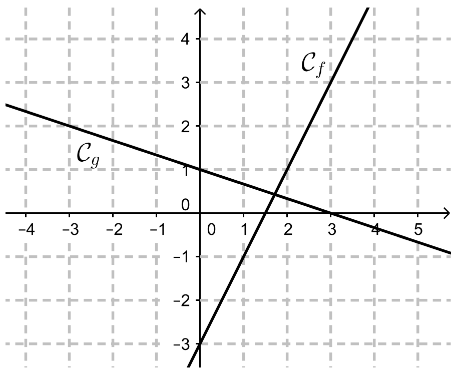
- $x \mapsto -3x + 2$ avec $a = -3$ et $b = 2$;
- $x \mapsto \frac{1}{2} - x$ avec $a = -1$ et $b = \frac{1}{2}$;
- $x \mapsto \frac{-4+3x}{2}$ avec $a = \frac{3}{2}$ et $b = -\frac{4}{2} = -2$.

Remarque. Si $a = 0$, la fonction est constante, égale à b.

Théorème. On munit le plan d'un repère $(O; I, J)$. La courbe représentative d'une fonction affine est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.
Réciproquement, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la courbe représentative d'une fonction affine.

<u>Exemple</u>

On a représenté ci-dessous les courbes des fonctions f et g définies par $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = \frac{1}{3}x + 1$.



❖ **Variations des fonctions affines**

Théorème (variation des fonctions affines). Soit f la fonction affine $f: x \mapsto ax + b$.
Si $a > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.
Si $a < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a > 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
variation de f	↗

Si $a < 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
variation de f	↘

Démonstration. Soit x et x' deux réels, avec $x < x'$. On a
$$f(x') - f'(x) = ax' - ax = a(x' - x)$$
et comme $x' - x > 0$ par hypothèse, le signe de $f(x') - f(x)$ est le même que celui de a.
Si $a > 0$, $f(x') - f(x) > 0$, soit $f(x') > f(x)$, ce qui traduit que f est croissante.
Si $a = 0$, $f(x) = f(x')$, la fonction ne prend qu'une seule valeur.
Si $a < 0$, $f(x') - f(x) < 0$, soit $f(x') < f(x)$, ce qui traduit que f est décroissante. ■

❖ **Signe des fonctions affines**

Théorème (signe de $ax + b$). Le signe de $ax + b$ (avec $a \neq 0$) dépend du signe de a. Soit k la solution de l'équation $ax + b = 0$.

Si $a > 0$

x	$-\infty$		k		$+\infty$
signe de $ax + b$		$-$	0	$+$	

Si $a < 0$

x	$-\infty$		k		$+\infty$
signe de $ax + b$		$+$	0	$-$	

Démonstration. Supposons $a > 0$. On a $ax + b \geq 0 \Leftrightarrow ax \geq -b \Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}$ (car $a > 0$), d'où le signe dans ce cas en appelant k le nombre $-\frac{b}{a}$.
Si $a < 0$, on a $ax + b \geq 0 \Leftrightarrow ax \geq -b \Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$ (car $a < 0$). ■

Exemple

Construire les tableaux de signes de $f: x \mapsto 2x + 4$ et $g: x \mapsto -x + 7$. Clairement $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ et $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 7$. Les tableaux s'en déduisent en déterminant le signe de a (positif pour f et négatif pour g).

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		7		$+\infty$
signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

2. Tableaux de signes et position relative de courbes

On sait déjà construire les tableaux de signe des fonctions affines. On va apprendre à étudier le signe de fonctions plus compliquées en factorisant.

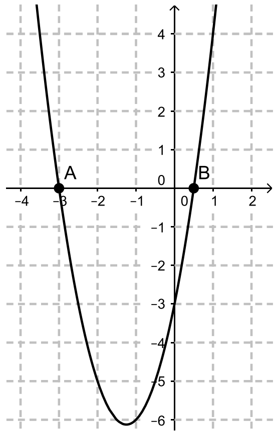
Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$.
La fonction f se factorise en $f(x) = (2x - 1)(x + 3)$ car
$$(2x - 1)(x + 3) = 2x^2 + 6x - x - 3 = 2x^2 + 5x - 3 = f(x).$$

Dans un même tableau, on met le signe de chacun des facteurs $2x - 1$ et $x + 3$ puis à l'aide de la règle on détermine le signe du produit $f(x)$.

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Cela montre que la courbe de f est située au-dessous de l'axe des abscisses sur $\left[-3; \frac{1}{2}\right]$ et au-dessus sur $]-\infty; -3] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.
Les points d'intersection de l'axe des abscisses avec la courbe de f sont $A(-3; 0)$ et $B\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.
Un tableau de signe permet donc de résoudre une équation-produit.

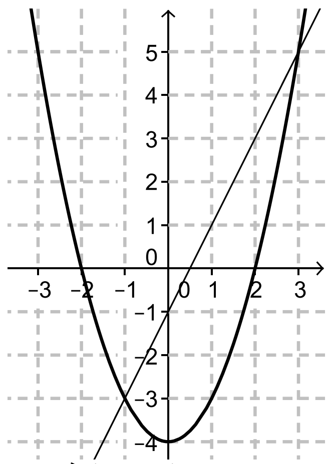


Les tableaux de signes permettent d'étudier la « position relative » des courbes de deux fonctions f et g, c'est-à-dire de savoir quand la courbe de f est située au-dessous (ou au-dessus) de celle de g. Pour cela on étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Tracer la droite D d'équation $y = 2x - 1$.
2. Montrer que
$$f(x) - (2x - 1) = (x - 3)(x + 1)$$
et déterminer la position relative de D et C.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de D et C.



Réponse.

1. Voir le graphique.
2. En développant :
$$(x - 3)(x + 1) = x^2 - 2x - 3 = x^2 - 4 - (2x - 1).$$
Le signe de $f(x) - (2x - 1)$ est donc le même que celui de $(x - 3)(x + 1)$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Signe de $x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x) - (2x - 1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où la conclusion :
- si $x \in]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[$, $f(x) - (2x - 1) \geq 0$ soit $f(x) \geq 2x - 1$, ce qui signifie que C est au-dessus de D ;
- si $x \in [-1; 3]$, $f(x) - (2x - 1) \leq 0$ soit $f(x) \leq 2x - 1$, ce qui signifie que C est au-dessous de D.
3. Les courbes D et C se coupent lorsque $f(x) = g(x)$, c'est-à-dire lorsque $x = -1$ ou $x = 3$ d'après le tableau de signe.
Les coordonnées des points d'intersection de D et C sont donc $(-1; 0)$ et $(3; 0)$.

Les tableaux de signes peuvent s'appliquer à des fonctions comportant des quotients. Il faut prendre soin d'identifier les valeurs interdites.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$ par $f(x)=\frac{-x+1}{x+2}$.

1. Déterminer le signe de f.
2. Résoudre $f(x)\geq 0$ et $f(x)<0$.

Réponse.

1. On construit les tableaux de signes de $-x+1$ et $x+2$. Dans la ligne concernant le signe de $f(x)$, on indique les valeurs interdites par une double barre.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de $-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

2. En lisant le tableau de signe, on constate que l'ensemble des solutions de $f(x)\geq 0$ est $]-2;1]$ et celui de l'inéquation $f(x)\leq 0$ est $]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$.