Fonctions du second degré – Exercices

Fonction carré

1 À l'aide d'un contre-exemple, montrer que les affirmations suivantes sont fausses.

a. Deux nombres et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.
b. Pour tout réel x, on a $x^2 = -x^2$.
c. Si $x \leq 5$, alors $x^2 \leq 25$.
d. Un réel est toujours inférieur ou égal à son carré.

2 Comparer sans calculatrice a^2 et b^2 dans chacun des cas suivants.

a. $a = 1{,}99$ et $b = 1{,}999$.
b. $a = -6$ et $b = -5$.
c. $a = -6{,}501$ et $b = -6{,}51$.
d. $a = 0{,}33$ et $b = \frac{1}{3}$.
e. $a = \pi$ et $b = 3{,}14$.

3 Donner le tableau de variations de la fonction carré sur les intervalles suivants puis préciser le minimum et le maximum.

a. $[1; 5]$ **b.** $[-3; 2]$ **c.** $[-2; -1]$

4 Donner le meilleur encadrement possible de x^2 dans chacun des cas suivants.

a. $0{,}5 \leq x \leq 2$ **b.** $-0{,}5 \leq x \leq 2$
c. $-5 \leq x \leq -3$ **d.** $-\frac{2}{9} \leq x \leq \frac{1}{5}$

5 Comparer sans calculatrice les nombres

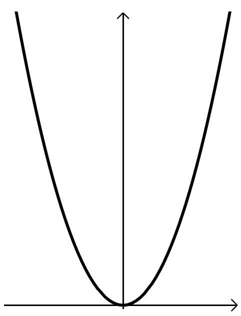
a. $a = 3\sqrt{7}$ et $b = 8$.
b. $a = 2 - \sqrt{3}$ et $b = \sqrt{2} - 1$.

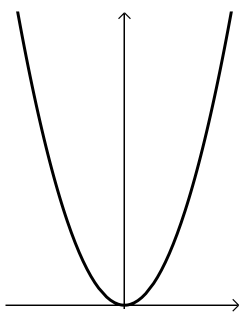
6 Résoudre les équations suivantes.

a. $x^2 = 9$ **b.** $x^2 = -4$
c. $x^2 = 0$ **d.** $x^2 = 5$

7 Résoudre graphiquement les inéquations suivantes. On pourra s'aider des paraboles ci-dessous.

a. $x^2 \leq 4$ **b.** $x^2 > 4$
c. $x^2 < 7$ **d.** $x^2 \geq 1296$





8 On souhaite résoudre par le calcul l'inéquation $x^2 \leq 4$.

1. Factoriser $x^2 - 4$ puis construire son tableau de signe.
2. En déduire les solutions.
3. Résoudre de même l'inéquation $x^2 > 1$.

9 On considère les cinq propositions suivantes :

[1] $x < -2$ ou $x > 2$ **[2]** $x > 3$ **[3]** $x > 1{,}9$
[4] $x < -3$ ou $x > 3$ **[5]** $x < -10$

1. L'implication **[1]** $\Rightarrow x^2 > 4$ est-elle vraie ?
2. Dresser la liste des implications du type … $\Rightarrow x^2 > 4$ qui sont vraies.
3. Dresser la liste des implications du type $x^2 > 4 \Rightarrow$ … qui sont vraies.

10 Dresser le tableau de signes de chacune des fonctions suivantes.

a. $f(x) = x^2$ **b.** $g(x) = (x-3)^2$
c. $h(x) = x^2(x+1)$

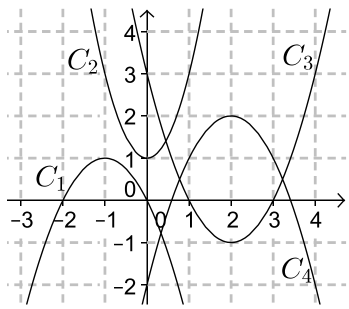
Formes développée, canonique, factorisée

11 Associer les formes développées et factorisées.

$2x^2 + x - 1$ ■	■ $(x-2)(x-3)$
$x^2 - 5x + 6$ ■	■ $(2x-1)(x+1)$
$x^2 - 1$ ■	■ $(4x-2)(x+3)$
$4x^2 + 10x - 6$ ■	■ $(x+1)(x-1)$

12 On a représenté quatre fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4. Les associer à leur courbe.

$f_1(x) = (x-2)^2 - 1$
$f_2(x) = -(x+1)^2 + 1$
$f_3(x) = 2x^2 + 1$
$f_4(x) = -(x-2)^2 + 2$



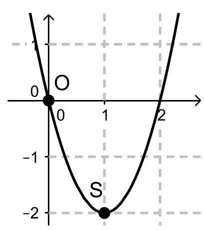
13 Associer les formes développées et canoniques.
Préciser les coordonnées du sommet des paraboles représentant les fonctions.

$f_1(x) = 2x^2 + 2x + 1$ ■	■ $(x-1)^2 + 2$
$f_2(x) = 2x^2 - x + 1$ ■	■ $2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}$
$f_3(x) = x^2 - 2x + 3$ ■	■ $2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$
$f_4(x) = -x^2 - 2x + 3$ ■	■ $-(x+1)^2 + 4$

14 Compléter le tableau suivant.

Forme canonique	Forme développée	a	b	c	α	β
$2(x-3)^2 - 1$						
$-2(x-1)^2$						
		-1			-1	-1
$-8\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 5$						

15 La parabole P ci-contre représente une fonction du second degré f. Elle passe par l'origine du repère O et admet pour sommet le point $S(1; -2)$.



1. Justifier qu'il existe un réel a tel que $f(x) = a(x-1)^2 - 2$.
2. Déterminer a à l'aide du point O.
3. Donner la forme développée de $f(x)$.

16 On sait que :

- la parabole P_1 coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 1 et 2 ;
- la parabole P_2 a pour sommet le point $S(2; 1)$;
- la parabole P_3 coupe l'axe des ordonnées au point $A(0; -1)$.

Retrouver l'équation de chacune de ces paraboles parmi celles proposées.

$y=(x-1)(x-2)$ $\qquad$ $y=x^2+2x-1$

$y=(x-2)^2+1$

17 Vrai ou faux ? Justifier.

a. Pour tout réel x, $(x+1)^2+1=x^2+2$.
b. Il existe un réel x tel que $(x+1)^2+1=x^2+2$.
c. Pour tout réel x, $(x+1)^2+1\geq 0$.
d. Il existe un réel x tel que $(x+1)^2-1<0$.

18 On considère une fonction f du second degré sous forme développée $f(x)=ax^2+bx+c$, avec $a\neq 0$. Répondre par vrai ou faux, justifier.

a. Si $c=0$, alors $f(0)=0$.
b. Si $a<0$, alors pour tout réel x, $f(x)\leq 0$.
c. Si les réels a,b,c sont tous positifs, alors pour tout réel x, $f(x)\geq 0$.

Variation et signe

19 Construire le tableau de variations des fonctions suivantes.

$f(x)=2(x-3)^2-7$ $\qquad$ $g(x)=-2(x+3)^2+7$

20 Construire le tableau de variations de chacune des fonctions de l'exercice 13.

21 Pour chacun des tableaux ci-dessous, donner une fonction du second degré ayant le tableau de variation indiqué.

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ $+\infty$
variation de f	↘ 2 ↗

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ $+\infty$
variation de g	↗ 2 ↘

22 Soit f définie par $f(x)=x^2+2x-8$.

1. Recopier et compléter : $f(x)=(x+1)^2-\dots$
2. En déduire le tableau de variation de f.
3. Donner la forme factorisée de f
4. Construire le tableau de signe de f.
5. Résoudre $f(x)=0$ et $f(x)>0$.

23 On considère la fonction f définie par

$$f(x)=2x^2-2x-4.$$

1. Vérifier que

$$f(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{2}=2(x-2)(x+1).$$

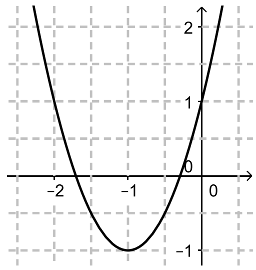
2. Utiliser la forme la plus adaptée pour
  a. Calculer l'image de -3, de 2 et de $\frac{1}{2}$.
  b. Déterminer le sens de variation de f.
  c. Déterminer le minimum de f.
  d. Calculer l'image de $\sqrt{3}$ et de $\sqrt{5}-1$.
  e. Résoudre l'équation $f(x)=0$.
  f. Résoudre l'équation $f(x)=-4$.
  g. Résoudre l'équation $f(x)=8$.

24 Factoriser (lorsque c'est possible) les fonctions suivantes et construire leur tableau de signe.

a. $f_1(x)=(x+1)^2-9$ $\qquad$ **b.** $f_2(x)=3(x+1)^2+7$
c. $f_3(x)=-(x+1)^2+4$ $\qquad$ **d.** $f_4(x)=(x-2)^2-3$
e. $f_5(x)=-(3x+4)^2-\frac{2}{7}$ $\qquad$ **f.** $f_6(x)=2(x-1)^2-\frac{1}{2}$

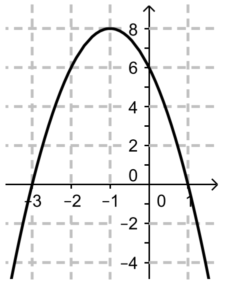
25 La parabole P ci-contre représente une fonction du second degré f définie par

$$f(x)=ax^2+bx+c.$$



1. Donner par lecture graphique $f(0)$, $f(-1)$ et $f(-2)$.
2. En déduire a, b, c puis donner l'expression de $f(x)$.
3. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.

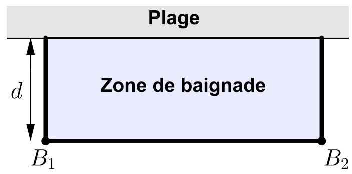
26 La parabole P ci-contre représente une fonction du second degré f.



1. Déterminer sa forme canonique.
2. En déduire sa forme factorisée.
3. Construire le tableau de signe de la fonction f.

Problèmes du second degré

27 Un maître-nageur dispose d'une corde de 160 mètres. Il souhaite délimiter une surface de baignade rectangulaire ayant la plus grande aire possible.

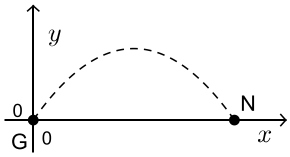


1. Montrer que si d désigne la distance de la plage aux bouées, la surface est donnée par
$$f(d)=d(160-2d).$$
2. Montrer que $f(d)=-2(d-40)^2+3200$ et conclure.
3. On souhaite connaître les valeurs de d pour lesquelles l'aire est supérieure à 2400 m^2.
Transformer l'inéquation $f(d)\geq 2400$ en inéquation-produit et conclure à l'aide d'un tableau de signe.

28 Une grenouille saute d'un nénuphar au nénuphar voisin suivant une courbe qui a pour équation

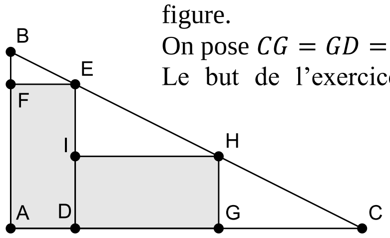
$$y=-3{,}72x^2+1{,}43x$$

dans le repère ci-contre (x et y sont en mètres).



1. Quelle est la longueur de son saut au cm près ?
2. Quelle hauteur, au cm près, a-t-elle atteint ?

29 ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB=6$ et $AC=12$. On construit G et D sur $[CA]$ tels que $CG=GD$ puis $ADEF$ et $DGHI$ des rectangles comme indiqués sur la figure.



On pose $CG=GD=x$.

Le but de l'exercice est de trouver pour quelle(s) valeur(s) de x les triangles $ADEF$ et $DGHI$ ont même aire.

1. Montrer que $0\leq x\leq 6$.
2. Exprimer GH en fonction de x. En déduire que l'aire de $DGHI$ est $\frac{x^2}{2}$.
3. Prouver que $ED=x$. En déduire l'aire de $ADEF$ en fonction de x.
4. Justifier que le problème revient à résoudre l'équation $5x^2-24x=0$ et le résoudre.