Fonctions affines et tableaux de signes – Exercices

Fonctions affines

1 Les fonctions suivantes sont-elles affines ? Si oui préciser les coefficients a et b.

a. $f(x) = 4x + 5$ **b.** $f(x) = x^2 + 1$
c. $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ **d.** $f(x) = 3 - x$
e. $f(x) = x\left(\frac{1}{3} - x\right) + x^2$ **f.** $f(x) = \frac{-5+3x}{7}$
g. $f(x) = 2(x - 1)$ **h.** $f(x) = \frac{(2x+1)^2}{4} - x^2$

2 Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont croissantes sur ℝ ? Lesquelles sont décroissantes sur ℝ ?

$f_1(x) = 3x - 2$ $f_2(x) = -2x + 3$
$f_3(x) = -\frac{x}{2} + 3$ $f_4(x) = \frac{-x+3}{4}$

3 Pour chacune des fonctions de l'exercice précédent, construire le tableau de signe.

4 Dresser le tableau de signes de chacune des fonctions suivantes.

a. $f_1(x) = 3x - 6$ **b.** $f_2(x) = -2x - 1$
c. $f_3(x) = -5x + 7$ **d.** $f_4(x) = 2x$

5 Le tableau ci-dessous donne le tableau de signe d'une fonction affine f.

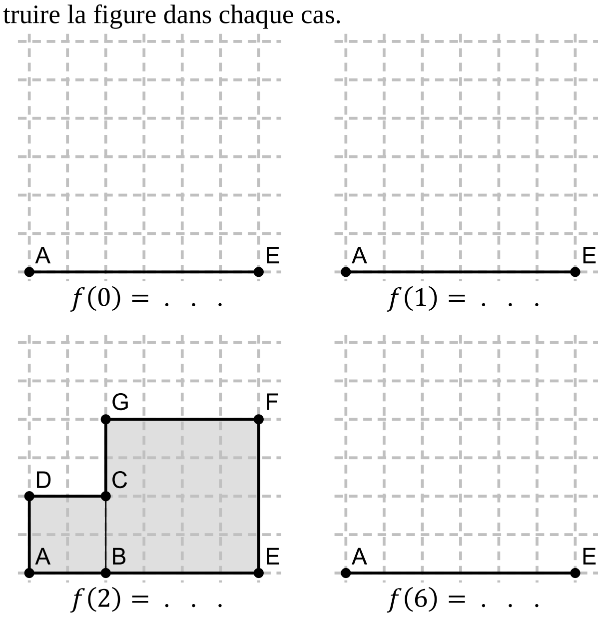
x	$-\infty$		-2		$+\infty$
signe de f		$-$	0	$+$	

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles peuvent convenir pour f ?

$f_1 : x \mapsto -x - 2$ $f_3 : x \mapsto 2x + 4$
$f_2 : x \mapsto 5 + \frac{5}{2}x$ $f_4 : x \mapsto x - 2$

6 Soit $[AE]$ un segment de longueur 6 et M un point de ce segment. On construit les carrés $ABCD$ et $BEFG$ comme indiqué sur la figure. On appelle x la longueur AB et $f(x)$ la longueur de la ligne polygonale $AEFGCDA$ en gras.

1. Calculer $f(x)$ pour les valeurs de x indiquées et construire la figure dans chaque cas.



2. Démontrer que

$$f(x) = \begin{cases} 24 - 2x, \text{si } x \in [0;3] \\ 12 + 2x, \text{si } x \in [3;6]. \end{cases}$$

3. Dans un repère orthogonal d'unité 1 cm en abscisses et 0,5 cm en ordonnées, tracer la courbe représentative de la fonction f.

4. Déterminer graphiquement l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la longueur de la ligne polygonale est comprise entre 20 et 22. Retrouver ceci par le calcul.

Tableaux de signes

7 **(Règle des signes)**

1. Rappeler la règle des signes d'un produit.

2. f et g sont des fonctions dont les tableaux de signes sont les suivants.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

Compléter le tableau de signe de $f(x) \times g(x)$.

x	
Signe de $f(x) \times g(x)$	

3. Résoudre les inéquations

$$f(x) \times g(x) > 0 \text{ et } f(x) \times g(x) \leq 0.$$

8 On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^2 + 3x - 2$.

1. Représenter graphiquement f et conjecturer son signe.

2. Vérifier que $f(x) = (x + 2)(2x - 1)$

3. Dans un même tableau, faire apparaître le signe de $x + 2$ et celui de $2x - 1$. En déduire le tableau de signe de f.

4. Résoudre les inéquations $f(x) < 0$ et $f(x) \geq 0$.

9 Dresser le tableau de signes de chacune des fonctions suivantes.

a. $f(x) = (x - 3)(2x + 1)$
b. $g(x) = (1 - x)(4x - 3)$
c. $h(x) = x^2 - 3x$

10 Soit $f : x \mapsto x^3 + 2x^2 + x + 2$.

1. Résoudre graphiquement $f(x) > 0$.

2. Montrer que $f(x) = (x^2 + 1)(x + 2)$.

3. Justifier que pour tout x, on a $x^2 + 1 > 0$.

4. Résoudre par le calcul $f(x) > 0$.

11 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$.

1. Pour quelle valeur de x le dénominateur de $f(x)$ s'annule-t-il ?
Donner l'ensemble de définition de f.

2. Construire le tableau de signe de f.

3. Résoudre les inéquations $f(x) \leq 0$ et $f(x) > 0$.

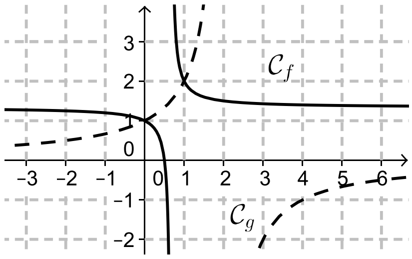
Équations-produit

12 On souhaite résoudre $2x^2 = 3 - x$.

1. Représenter graphiquement chacun des membres et conjecturer les solutions de l'équation.

2. Vérifier que l'équation équivaut à $(2x+3)(x-1)=0$ puis résoudre l'équation.

13 Soit l'équation $\frac{x}{3x-2}+1=\frac{2}{2-x}$ (E)
1. Déterminer les valeurs interdites de (E).
2. Soit $f : x \mapsto \frac{x}{3x-2}+1$ et $g : x \mapsto \frac{2}{2-x}$.
   On a tracé sur GeoGebra les courbes représentative $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g.
   Associer les fonctions à leur courbe représentative.



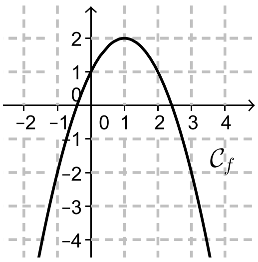
3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) ainsi que leur valeur.
4. Résoudre l'équation (E) algébriquement.

14 Soit l'équation $1+\frac{2}{x}=\frac{2}{3-x}$ (E)
1. Déterminer les valeurs interdites de (E).
2. Montrer que pour x différent des valeurs interdites, on a (E) $\Leftrightarrow x^2+x-6=0$.
3. Vérifier que $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$ et en déduire les solutions de (E).

15 On considère l'équation $x^3=2x-4$ (E).
1. Conjecturer les solutions de (E) à l'aide de la calculatrice.
2. Montrer que $x^3-2x+4=(x+2)(x^2-2x+2)$.
3. Montrer que $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$.
4. Résoudre l'équation (E).

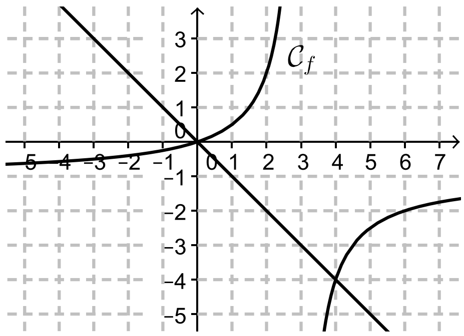
Résolution d'inéquations

16 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x)=-x^2+2x+1.$$



1. **a.** Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq -2$.
   b. Montrer que cette inéquation équivaut à
   $$(x+1)(3-x)\geq 0$$
   et retrouver les solutions grâce à une étude de signe.
2. **a.** Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)<1$.
   b. Transformer l'inéquation et la résoudre à l'aide d'un tableau de signe.

17 Soit f la fonction définie sur $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$ par $f(x)=\frac{-x}{x-3}$. On a représenté ci-dessous sa courbe représentative C_f.
1. En utilisant le graphique, résoudre
   a. $f(x)\leq 1$ **b.** $f(x)>-x$
2. **a.** Montrer que $f(x)\leq 1$ équivaut à $\frac{-2x+3}{x-3}\leq 0$.
   b. Construire le tableau de signe de $\frac{-2x+3}{x-3}\leq 0$.
   c. Retrouver le résultat de la question **1.a.**
3. Résoudre par le calcul l'inéquation de la question **1.b.**



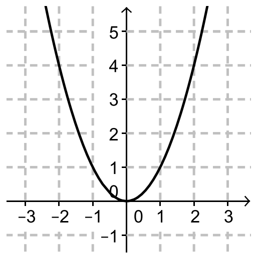
18 Résoudre par le calcul les inéquations suivantes.

a. $\frac{2}{x-3}<1$ **b.** $\frac{1}{x}\geq 2-x$ **c.** $\frac{2}{x-1}\geq x-2$

a'. $\frac{2}{x-3}\geq 1$ **b'.** $\frac{1}{x}<2-x$ **c'.** $\frac{2}{x-1}\leq x-2$

Position relative de deux courbes

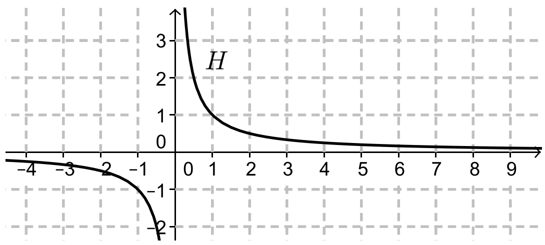
19 On a tracé dans le repère ci-dessous la courbe C d'équation $y=x^2$. Soit D la droite d'équation $y=x+2$.



1. Tracer la droite D et conjecturer la position relative de C et D.
2. Montrer que $x^2-(x+2)=(x-2)(x+1)$.
3. Construire le tableau de signe de $(x-2)(x+1)$ et prouver la conjecture.

20 Un nombre est-il toujours plus petit que son carré ? Émettre une conjecture graphique et la démontrer.
Un nombre est-il toujours plus grand que son inverse ?

21 Soit l'hyperbole $H : y=\frac{1}{x}$ et la droite $D : y=\frac{4}{9}x-1$.



1. Tracer la droite et conjecturer la position relative de H et D.
2. Prouver que $\frac{4}{9}x-1-\frac{1}{x}=\frac{(x-3)(4x+3)}{9x}$ puis démontrer la conjecture.

22 On considère l'algorithme ci-dessous.

```
Variables :   i est un entier
Traitement :  Pour i de −10 à 10 faire
                Si i² − 2i ≤ 1 alors
                  Afficher « i est solution »
                  Sinon Afficher « i n'est pas solution »
                Fin Si
              Fin Pour
```

1. Quel est le rôle de cet algorithme ? Quelles valeurs s'affichent à l'écran ?
2. Montrer que $x^2-2x-1=(x-1)^2-2$ et en déduire la factorisation de x^2-2x-1.
   Résoudre alors l'inéquation $x^2-2x-1\leq 0$.