Fonctions carré et inverse

1. Fonction carré

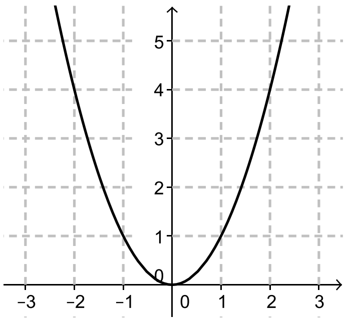
Définition. *On appelle fonction carré la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à un nombre associe son carré, ce que l'on note $x \mapsto x^2$.*

Voici quelques valeurs de la fonction carrée, notée f.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

❖ **Représentation graphique de la fonction carré**

Définition. *La courbe représentative de la fonction carré est une <u>parabole</u>.*



Cette parabole est située au-dessus de l'axe des abscisses, et elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées puisque deux nombres opposés ont le même carré.

❖ **Sens de variation de la fonction carré**

Théorème. La fonction carré f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$ et croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variation de f	$\searrow$	0	$\nearrow$

On retient ce résultat sous la forme : « deux nombres positifs et leur carré sont rangés dans le même ordre et deux nombres négatifs et leur carré sont rangés dans l'ordre contraire ».

Démonstration 1. Soit a et b deux réels vérifiant $a < b$. Si a et b sont positifs, en multipliant cette égalité par a, on obtient $a^2 \leq ab$, tandis que si on la multiplie par b on a $ab \leq b^2$. Ainsi $a^2 \leq ab \leq b^2$ ce qui prouve que $f(a) \leq f(b)$.
On fait un raisonnement analogue si a et b sont négatifs.

Démonstration 2. On se donne deux réels a et b avec $a < b$. Calculons la différence des images de a et b :

$$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Par hypothèse $a - b < 0$. Mais on est embêté par le signe de $a + b$. Il faut donc envisager deux cas.

- Si a et b sont tous les deux négatifs, on a $a + b < 0$ et donc par la règle du signe d'un produit $(a-b)(a+b) > 0$, soit encore $f(a) - f(b) < 0$. On a donc l'implication :

  $$\forall\ (x, x') \in]-\infty;0]^2, a < b \Rightarrow f(a) > f(b),$$

  ce qui traduit que f est décroissante sur $]-\infty;0]$.

- Si a et b sont tous les deux positifs, alors cette fois $a + b > 0$, donc $f(a) < f(b)$ ce qui traduit que f est croissante sur $[0; +\infty[$.

En conclusion, on a montré que la fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$. ■

Exemple

Donner l'encadrement le plus précis possible de x^2 dans chacun des cas suivants :

a. $1 \leq x \leq 4$;
b. $-3 \leq x \leq -2$;
c. $-1 \leq x \leq 2$.

Réponse. On se place sur des intervalles où $f : x \mapsto x^2$ est monotone.

a. Les nombres $1, x, 4$ appartiennent à l'intervalle $[0; +\infty[$ où f est croissante, donc l'inégalité $1 \leq x \leq 4$ entraîne $1^2 \leq x^2 \leq 4^2$, c'est-à-dire $1 \leq x^2 \leq 16$.
b. Les nombres $-3, x, -2$ appartiennent à l'intervalle $]-\infty; 0]$ où f est décroissante, donc $(-3)^2 \geq x^2 \geq (-2)^2$, c'est-à-dire $4 \leq x^2 \leq 9$.
c. On découpe l'intervalle $[-1; 2]$ en deux : $[-1; 0]$ et $[0; 2]$. Si $-1 \leq x \leq 0$, alors $0 \leq x^2 \leq 1$ par décroissance de f. Si $0 \leq x \leq 2$, alors $0 \leq x^2 \leq 4$ par croissance de f. Donc le meilleur encadrement que l'on puisse donner de x^2 est $0 \leq x^2 \leq 4$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 3$.

1. Déterminer le sens de variation de f.
2. Donner un encadrement de $f(x)$ pour $x \in [0; 1]$.

Réponse. On peut s'aider de la représentation graphique de f pour savoir où l'on va.

1. Soit a et b deux réels de $]-\infty; 0]$ avec $a < b$. Comme $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$, on a $a^2 > b^2$. En multipliant par -2, il vient $-2a^2 < -2b^2$ et finalement en ajoutant 3, on obtient $-2a^2 + 3 < -2b^2 + 3$. On a donc montré

$$\forall (a, b) \in]-\infty; 0]^2, a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

ce qui démontre que f est croissante sur $]-\infty; 0]$.

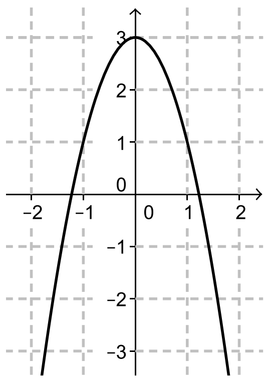
Soit maintenant a et b deux réels de $[0; +\infty[$ avec $a < b$. Comme $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0; +\infty[$, on a $a^2 < b^2$. En multipliant par -2, puis en ajoutant 3, on obtient $-2a^2 + 3 > -2b^2 + 3$. On a donc montré

$$\forall (a, b) \in [0; +\infty[\,^2, a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$$

ce qui démontre que f est décroissante sur $]-\infty; 0]$.

Le tableau de variation de f est le suivant.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variation de f	$\nearrow$	3	$\searrow$



2. Comme f est décroissante sur $]-\infty; 0]$, on a $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(0) \geq f(x) \geq f(1)$, c'est-à-dire $1 \leq f(x) \leq 3$.

❖ Signe de la fonction carré

Le carré d'un nombre non nul est strictement positif, et le carré de 0 est 0. Le tableau de signe de la x^2 est donc le suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de f		$+$	0	$+$	

2. Fonction inverse

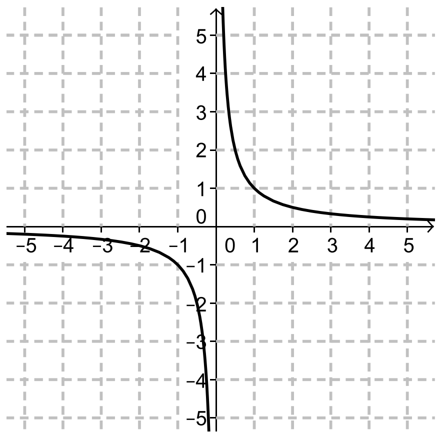
Définition. On appelle <u>fonction inverse</u> la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ (tous les réels sauf 0) par $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Remarque. Puisque 0 n'a pas d'inverse, il n'est pas dans l'ensemble de définition de $x \mapsto \frac{1}{x}$. On dit que la fonction inverse n'est pas définie en 0.

❖ Représentation graphique de la fonction inverse

Définition. *La courbe représentative de fonction inverse est une <u>hyperbole</u>.*

Le fait que l'ensemble de définition de la fonction inverse f « saute » 0 entraîne un comportement particulier de cette fonction pour les valeurs proches de 0.
Construisons un tableau de valeurs de f pour des valeurs proches de 0.



x	$-0{,}4$	$-0{,}2$	$-0{,}1$	$-0{,}05$	$-0{,}01$
$f(x)$	$-2{,}5$	-5	-10	-50	-100

x	$0{,}01$	$0{,}05$	$0{,}1$	$0{,}2$	$0{,}4$
$f(x)$	100	50	10	5	$2{,}5$

On constate que plus x est proche de 0, plus son image est grande. L'hyperbole longe indéfiniment l'axe des ordonnées sans jamais le toucher, on dit que l'axe des ordonnées et une asymptote à l'hyperbole.

❖ Sens de variation de la fonction inverse

Théorème. La fonction inverse f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ et sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Son tableau de variation est le suivant.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variation de f	↗		↗

On retient ce résultat sous la forme « deux nombres non nuls de même signe et leurs inverses sont rangés dans l'ordre contraire ».

Démonstration. Soit $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ et deux réels a et b non nuls de même signe avec $a < b$. On a
$$f(a) - f(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}.$$
Or $a < b$, donc $b - a > 0$, et comme a et b sont de même signe, ab est positif. D'après la règle des signes $f(a) - f(b) > 0$, c'est-à-dire $f(a) > f(b)$, ce qui démontre que f est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. ■

Exemple

Donner l'encadrement le plus précis possible de $\frac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants :

a. $2 \leq x \leq 5$;
b. $-\frac{5}{3} \leq x \leq -1$;
c. $x \leq -3$;
d. $0 < x \leq 2$.

Réponse. Soit f la fonction inverse.

a. Les nombres $2, x, 5$ appartiennent à l'intervalle $]0; +\infty[$ où f est décroissante, donc l'inégalité $2 \leq x \leq 5$ entraîne $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{5}$, ou encore $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$.

b. Les nombres $-\frac{5}{3}, x, -1$ appartiennent à l'intervalle $]-\infty; 0[$ où f est décroissante, donc $-\frac{3}{5} \geq x \geq -1$, ou encore $-1 \leq x \leq -\frac{3}{5}$.

c. Les nombres x et 3 appartiennent à l'intervalle $]-\infty; 0[$ où f est décroissante, donc $\frac{1}{x} \geq -\frac{1}{3}$, ou encore $-\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x}$. De plus comme $x < 0$, on a $\frac{1}{x} < 0$ par la règle des signes, donc finalement $-\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} < 0$.

d. Les nombres x et 2 appartiennent à l'intervalle $]0; +\infty[$ où f est décroissante, donc $x \leq 2$ implique $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$.

❖ Signe de la fonction inverse

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de f	$-$	‖	$+$