# Vecteurs – Partie II

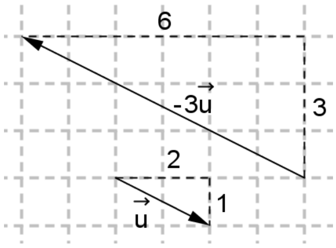
On se place dans le plan muni d'un repère $(O; I, J)$.

## 1. Produit d'un vecteur par un réel

**Définition.** *Soit $k$ un nombre réel et $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur. On définit le vecteur $k\vec{u}$ par $\vec{v}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.*

**Exemple**

Soit $\vec{u}\binom{2}{-1}$, alors $-3\vec{u}\binom{-6}{3}$.

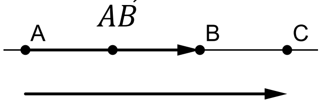



On admet que le vecteur $k\vec{u}$ ainsi défini ne dépend pas du repère choisi.

### ❖ Construction géométrique du vecteur $k\overrightarrow{AB}$

Soit $A$ et $B$ deux points et $k$ un réel.
Si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ou $k = 0$, le vecteur $k\overrightarrow{AB}$ est le vecteur nul.
Sinon le point $C$ tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ est l'unique point de $(AB)$ tel que

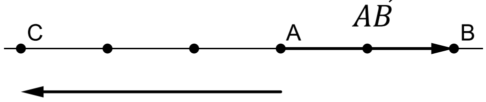
- Si $k > 0$, $AC = kAB$ et $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens.




$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

- Si $k < 0$, $AC = -kAB$ et $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens opposé.




$$\overrightarrow{AB}$$

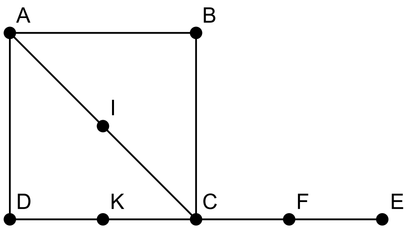
$$\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

**Exemple A**

$ABCD$ est un carré, $I$ est le milieu de $[AC]$, les points $D, K, C, F, E$ sont alignés dans cet ordre avec $DK = KC = CF = FE$.

Compléter les égalités suivantes par des réels.

**1.** $\overrightarrow{DC} = \ldots\overrightarrow{FE} = \ldots\overrightarrow{CK} = \ldots\overrightarrow{ED}$
**2.** $\overrightarrow{DF} = \ldots\ \overrightarrow{DC} = \ldots\overrightarrow{AB}$
**3.** $\overrightarrow{CF} = \ldots\overrightarrow{DE} = \ldots\overrightarrow{EK}$
**4.** $\overrightarrow{IC} = \ldots\overrightarrow{AC} = \ldots\overrightarrow{CA} = \ldots\overrightarrow{IA} = \ldots\overrightarrow{EB}$
**5.** $\overrightarrow{DF} = \ldots\overrightarrow{EF} = \ \ldots\overrightarrow{CD} = \ldots\overrightarrow{ED}$




**Réponse.**

**1.** $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{FE} = -2\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$
**2.** $\overrightarrow{DF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$
**3.** $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{EK}$
**4.** $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$
**5.** $\overrightarrow{DF} = -3\overrightarrow{EF} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{ED}$

❖ **Propriétés de calculs**

**Théorème.** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et $k$ et $k'$ deux réels.
**1.** $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ ;
**2.** $(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$ ;
**3.** $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$.

**Démonstration.** Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
Le vecteur $k(\vec{u}+\vec{v})$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} k(x+x') \\ k(y+y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx+kx' \\ ky+ky' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kx' \\ ky' \end{pmatrix}$. On reconnaît la somme des coordonnées des vecteurs $k\vec{u}$ et $k\vec{u}$, d'où l'égalité 1).
On procède de même pour les égalités 2) et 3). ■

**Exemple**

- $3\left(\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{EF}\right) = 3\overrightarrow{AB} + 3\left(-\frac{4}{3}\overrightarrow{EF}\right) = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{EF}$
- $3\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AB} = (3-5)\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB}$

## 2. Vecteurs colinéaires

**Définition.** *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un réel $k$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.*
*En particulier $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur puisque $0\vec{u} = k\vec{0} = \vec{0}$ pour tout $\vec{u}$ et $k$.*

**Exemple A**

Les vecteurs $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires, mais $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{CE}$ ne le sont pas.

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel $k$ tel que $\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$ ou tel que $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$ autrement dit si leurs coordonnées sont proportionnelles. Le tableau suivant constitué de leurs coordonnées doit donc être un tableau de proportionnalité.

| | |
|---|---|
| $x$ | $x'$ |
| $y$ | $y'$ |

Cela se traduit finalement par $xy' = x'y$, d'où le théorème suivant.

**Théorème.** Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' = x'y$.

**Démonstration. 1.** Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et l'égalité $xy' = x'y$ est bien satisfaite car elle se réduit à $0 = 0$.
**2.** On suppose dans la suite $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires. Il existe $k \neq 0$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ce qui donne aux niveaux des coordonnées les égalités $x = kx'$ et $y = ky'$. En multipliant la première égalité par $y'$ puis en utilisant la seconde, il vient $xy' = kx'y' = x' \times (ky') = x'y$.
Réciproquement, supposons $xy' = x'y$. Deux cas sont à envisager.

- Si $y' = 0$, alors $x'y = 0$ et comme $x' \neq 0$ (sinon on aurait $\vec{v} = \vec{0}$), on a $y = 0$. Il en résulte que $\vec{u}\binom{x}{0}$ et $\vec{v}\binom{x'}{0}$, d'où $\vec{u} = \frac{x}{x'}\vec{v}$, ce qui montre que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- Si $y' \neq 0$, on peut écrire $x = \frac{x'}{y'}y$, donc en posant $k = \frac{x'}{y'}$ on obtient les égalités $x = ky$ et $x' = ky'$. Cela montre l'égalité $\vec{u} = k\vec{v}$ et la colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. ■

**Exemple**

Soit $\vec{u}\binom{4}{-2}$, $\vec{v}\binom{-2}{1}$ et $\vec{w}\binom{2}{-3}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car $4 \times 1 = -2 \times (-2)$. Remarquons que $\vec{u} = -2\vec{v}$.
En revanche $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires car $-2 \times (-3) \neq 2 \times 1$.

**Théorème.** Les assertions suivantes sont équivalentes.
*(i)* $I$ est le milieu du segment $[AB]$ ;
*(ii)* $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ;
*(iii)* $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ;
*(iv)* $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

**Démonstration.**
**1.** Démontrons $(i) \Leftrightarrow (ii)$. On a successivement

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} &\Leftrightarrow AIBI \text{ est un parallélogramme} \\ &\Leftrightarrow [AB] \text{ et } [II] \text{ se coupent en leur milieu} \\ &\Leftrightarrow I \text{ est le milieu de } [AB]. \end{aligned}$$

**2.** Il est immédiat que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, d'où $(ii) \Leftrightarrow (iii)$.
**3.** Pour $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ on obtient grâce à la relation de Chasles :

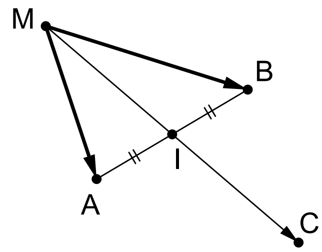
$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

ce qui est bien le résultat attendu. ■

**Théorème.** Soit $I$ le milieu d'un segment $[AB]$. Pour tout point $M$ on a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

**Démonstration.** En faisant apparaître le point $I$ dans $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} \\ &= 2\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{=\vec{0}} = 2\overrightarrow{MI}. \ ■ \end{aligned}$$




## 3. Applications

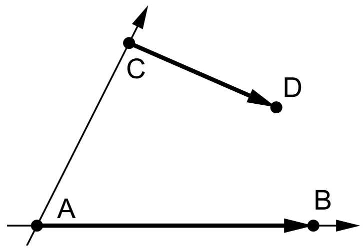
**Théorème.** Soit $A, B, C, D$ quatre points avec $A \neq B$ et $C \neq D$. Les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

**Démonstration.** Si les quatre points sont alignés, il n'y a rien à démontrer.
Sinon parmi les quatre points il y en a au moins trois non alignés, par exemple $A, B, C$. Comme $A \neq B$ et que $C$ n'est pas aligné avec ces points, on peut considérer le repère $(A; B, C)$. Dans ce repère, on a $A(0; 0)$, $B(1; 0)$ et $C(0; 1)$ et appelons $(x_D, y_D)$ les coordonnées de $D$.

Les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles si et seulement $C$ et $D$ ont la même ordonnée, c'est-à-dire si et seulement si $y_D = 1$.
D'autre part $\overrightarrow{AB}\binom{1}{0}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{x_D}{y_D - 1}$. Ces vecteurs sont colinéaires si et seulement si

$$1 \times (y_D - 1) = 0 \times x_D$$

soit $y_D = 1$. On retrouve la même condition que celle qui traduit le parallélisme de $(AB)$ et $(CD)$, ce qui établit l'équivalence. ■




On énoncé « deux vecteurs sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction ».

**Théorème.** Trois points $A, B, C$ sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

**Démonstration.** Si deux de ces points sont confondus, l'équivalence est claire puisqu'alors l'un des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AC}$ est nul et le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.
Supposons maintenant que $A, B, C$ sont deux à deux distincts. D'après le théorème précédent, les droites $(AB)$ et $(AC)$ sont parallèles, mais comme $A$ est commun, ces deux droites sont confondues, ceci revient bien à dire que $A, B, C$ sont alignés. ■

**Exemple**

Dans un repère, on considère les points $A(-1;-1)$, $B(2;8)$, $C(-2;-4)$, $D(3;3)$ et $E(9;21)$.

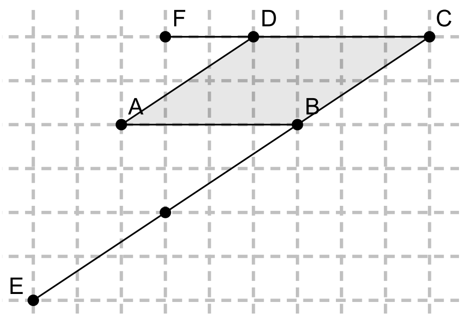
1. Montrer que les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.
2. Les droites $(AB)$ et $(DE)$ sont-elles parallèles ?

**Réponse.**

1. On a $\overrightarrow{AB}\binom{3}{9}$ et $\overrightarrow{AC}\binom{-1}{-3}$. On remarque $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires qui prouve que les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.
2. Comme $\overrightarrow{DE}\binom{6}{18}$, on constate que $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{AB}$, ce qui prouve que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et que les droites $(AB)$ et $(DE)$ sont parallèles.

**Exemple**

$ABCD$ est un parallélogramme. Les points $E$ et $F$ sont définis par $\overrightarrow{BE} = -2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$.
Donner l'expression des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points $A, E$ et $F$ sont alignés.




**Réponse.** On utilise la relation de Chasles pour faire apparaître les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ :
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - 2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
et en remarquant que $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ on a

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Ainsi $\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AF}$, les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires, donc les points $A$, $E$ et $F$ sont alignés.