Fonctions carré et inverse – Exercices

Fonction carré

1 À l'aide d'un contre-exemple, montrer que les affirmations suivantes sont fausses.

a. Deux nombres et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.
b. Pour tout réel x, on a $x^2 = -x^2$.
c. Si $x \leq 5$, alors $x^2 \leq 25$.
d. Un réel est toujours inférieur à son carré.

2 Comparer sans calculatrice a^2 et b^2 dans chacun des cas suivants.

a. $a = 1{,}99$ et $b = 1{,}999$.
b. $a = -6$ et $b = -5$.
c. $a = -6{,}501$ et $b = -6{,}51$.
d. $a = 0{,}33$ et $b = \frac{1}{3}$.
e. $a = \pi$ et $b = 3{,}14$.

3 Donner le meilleur encadrement possible de x^2 dans chacun des cas suivants.

a. $0{,}5 \leq x \leq 2$ **b.** $-0{,}5 \leq x \leq 2$
c. $-5 \leq x \leq -3$ **d.** $-\frac{2}{9} \leq x \leq \frac{1}{5}$

4 Donner le minimum et le maximum de la fonction carré sur les intervalles suivants.

a. $[1; 5]$ **b.** $[-3; 2]$ **c.** $[-2; -1]$

5 Comparer sans calculatrice les nombres

a. $a = 3\sqrt{7}$ et $b = 8$.
b. $a = 2 - \sqrt{3}$ et $b = \sqrt{2} - 1$.

6 On considère les cinq propositions suivantes :

[1] $x < -2$ ou $x > 2$ **[2]** $x > 3$ **[3]** $x > 1{,}9$
[4] $x < -3$ ou $x > 3$ **[5]** $x < -10$

1. L'implication **[1]** $\Rightarrow x^2 > 4$ est-elle vraie ?
2. Dresser la liste des implications du type $\ldots \Rightarrow x^2 > 4$ qui sont vraies.
3. Dresser la liste des implications du type $x^2 > 4 \Rightarrow \ldots$ qui sont vraies.
4. En s'inspirant des questions précédentes, dresser une liste de quatre conditions impliquant $x^2 > 10^4$.

17 Dresser le tableau de signes de chacune des fonctions suivantes.

a. $f(x) = x^2$
b. $g(x) = (x-3)^2$
c. $h(x) = x^2(x+1)$

Fonction inverse

7 Vrai ou faux ? Justifier.

a. Un nombre réel non nul et son inverse sont de même signe.
b. Si a et b sont deux réels non nuls tel que $a > b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
c. Il n'existe aucun couple de réels (a, b) vérifiant $a < b$ et $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
d. Si $x \leq y < 0$ alors $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$.

8 Dans chacun des cas suivants, comparer, si c'est possible $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$.

a. $a > b > 2$ **b.** $b \leq a$ **c.** $a < 2 < b$
d. $a < 0 < b$ **e.** $a > 3$ et $b \geq 2$

9 Donner dans chacun des cas le meilleur encadrement possible de $\frac{1}{x}$

a. $1 \leq x \leq 3$ **b.** $-6 \leq x \leq -3$ **c.** $x \leq -5$
d. $0 < x \leq 1$ **e.** $\frac{1}{8} \leq x$ **f.** $x \leq 3$

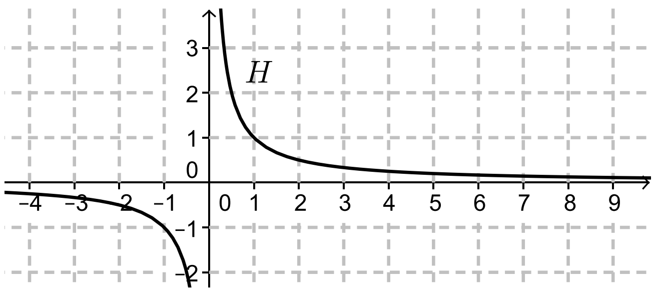
10 Indiquer le minimum et le maximum de la fonction inverse sur les intervalles suivants.

a. $[1; 2]$ **b.** $[-3; -2]$ **c.** $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$

Problèmes

11 Un nombre est-il toujours plus petit que son carré ? Émettre une conjecture graphique et la démontrer.
Un nombre non nul est-il toujours plus grand que son inverse ?

12 Soit l'hyperbole $H : y = \frac{1}{x}$ et la droite $D : y = \frac{4}{9}x - 1$.



1. Tracer la droite et conjecturer la position relative de H et D.
2. Prouver que $\frac{4}{9}x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{(x-3)(4x+3)}{9x}$ puis démontrer la conjecture.

13 **(Comparaison de x^2 et $\frac{1}{x}$)**

1. Justifier que pour $x < 0$, on a $\frac{1}{x} < x^2$.
2. Conjecturer à l'aide de la calculatrice la comparaison de x^2 et $\frac{1}{x}$.
3. On note $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$.
  a. Compléter le raisonnement suivant.
  La fonction f est . . . . . sur l'intervalle $]0; 1]$, donc pour $x \in]0; 1]$, $f(x)$ . . $f(1)$, c'est-à-dire . .
  La fonction g est . . . . . sur l'intervalle $]0; 1]$, donc pour $x \in]0; 1]$, $g(x)$ . . $g(1)$, c'est-à-dire . .
  Finalement pour tout $x \in]0; 1]$, ...
  b. Reprendre cette démonstration pour $x \in [1; +\infty[$.
4. Démonstration algébrique.
  a. Montrer que pour tout x non nul, on a
$$x^2 - \frac{1}{x} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x}.$$
  b. Montrer que $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ et en déduire le signe de $x^2 + x + 1$.
  c. Construire le tableau de signe de $x^2 - \frac{1}{x}$ et conclure.