

Vecteurs - Partie II – Exercices

Produit d'un vecteur par un réel

1 Dans un repère $(O; I, J)$, on considère les vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{w}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les coordonnées des vecteurs suivants.

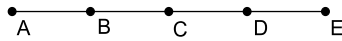
$$\vec{t}_1 = 3\vec{u}; \quad \vec{t}_2 = \vec{u} - 2\vec{v}; \quad \vec{t}_3 = 2\vec{w} + 4\vec{v}.$$

2 Les points A, B, C, D, E sont alignés et régulièrement espacés. Compléter les égalités suivantes par des réels.

a. $\overrightarrow{AD} = \dots \overrightarrow{BC} = \dots \overrightarrow{CE} = \dots \overrightarrow{ED}$

b. $\overrightarrow{BD} = \dots \overrightarrow{BC} = \dots \overrightarrow{BA} = \dots \overrightarrow{EA}$

c. $\overrightarrow{CB} = \dots \overrightarrow{DE} = \dots \overrightarrow{EB} = \dots \overrightarrow{AC}$

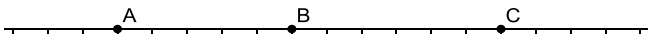


3 Placer les points D, E, F, G, H, J définis par

a. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$ b. $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

c. $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ d. $\overrightarrow{BG} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

e. $\overrightarrow{BH} = -\frac{7}{6}\overrightarrow{BC}$ f. $\overrightarrow{CJ} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$



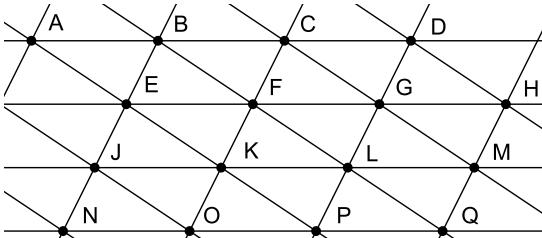
4 Compléter les égalités suivantes par des réels.

a. $\overrightarrow{BL} = \dots \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{JL} = \dots \overrightarrow{DG} + \dots \overrightarrow{HF}$

b. $\overrightarrow{GK} = \dots \overrightarrow{EG} + \dots \overrightarrow{NB}$

c. $\overrightarrow{FK} = \dots \overrightarrow{CM} + \dots \overrightarrow{CB} = \dots \overrightarrow{EK} + \dots \overrightarrow{EF}$

d. $\overrightarrow{CO} = \dots \overrightarrow{FL} + \dots \overrightarrow{OH}$

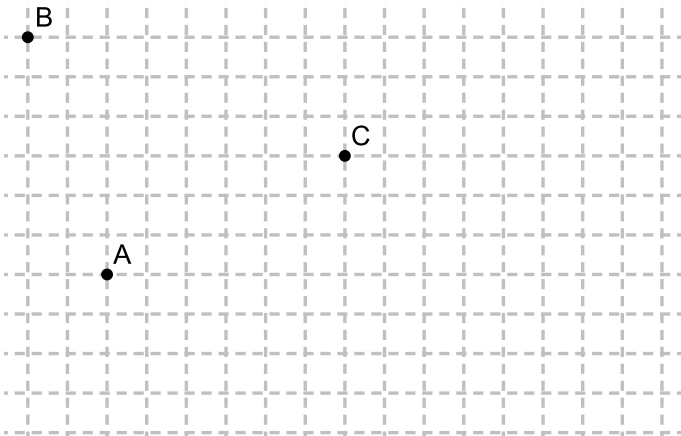


5 Placer les points P, Q, R, S, T définis par

a. $\overrightarrow{CR} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ b. $\overrightarrow{BQ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{BC}$

c. $\overrightarrow{CS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ d. $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

e. $\overrightarrow{AT} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{3}\overrightarrow{AC}$



6 Soit les points $A(-3; 2), B(-5; 4)$ et $C(x; y)$.

1. Calculer x et y pour que $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}$.

2. Même question pour que $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$.

Vecteurs colinéaires

7 Vrai ou faux ? Justifier.

a. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Tout vecteur colinéaire à \vec{u} a des coordonnées positives.

b. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Tout vecteur colinéaire à \vec{u} a des coordonnées de même signe.

c. Si $AB = 2AC$, alors les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires.

d. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Tout vecteur colinéaire à \vec{u} admet 0 comme première coordonnée.

e. Tout vecteur ayant 0 pour première coordonnée est colinéaire au vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

8 Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ? Si oui donner les réels k_1 et k_2 tels que $\vec{u} = k_1\vec{v}$ et $\vec{v} = k_2\vec{u}$.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ b. $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

c. $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$ d. $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

e. $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ f. $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ 2 \end{pmatrix}$

g. $\vec{u}\begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ 3\sqrt{5} \end{pmatrix}$ h. $\vec{u}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$

9 Déterminer x pour les vecteurs \vec{u} et \vec{v} soient colinéaires. Donner le nombre k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 9x \end{pmatrix}$ b. $\vec{u}\begin{pmatrix} 2-x \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

c. $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4x \\ 6x \end{pmatrix}$ d. $\vec{u}\begin{pmatrix} 2-x \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 2+x \end{pmatrix}$

10 Soit $\vec{u}(m-1; 4-m)$ et $\vec{v}(3-m; 3m-7)$ deux vecteurs où m est un nombre.

1. Montrer que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $2m^2 - 3m - 5 = 0$.

2. Développer $(m+1)(2m-5)$.

3. En déduire la ou les valeur(s) de m pour que \vec{u} et \vec{v} soient colinéaires. Pour chaque valeur de m trouvée, donner le réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Application à la géométrie

11 Déterminer si les points A, B, C sont alignés.

a. $A(1; 1), B(4; 1), C(4; 5)$.

b. $A(6; 3), B(-6; 1)$ et $C(12; 4)$.

c. $A(4; 0), B(0; 4), C(4; 4)$.

12 Déterminer dans chaque cas si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

a. $A(0; 1), B(2; 5), C(-1; 4)$ et $D(5; 15)$.

b. $A(0; 1), B(-1; 4), C(4; 6)$ et $D(7; 5)$.

c. $A(12; 27), B(60; 37), C(-21; -33)$ et $D(99; -8)$.

13 Soit les points $A(2; -1)$ et $B(-1; 2)$.

1. Calculer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Expliquer pourquoi A, B, C sont alignés.

2. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AC}$.

14 On considère un parallélogramme $ABCD$. Les points E et F sont définis par $\overrightarrow{BE} = -2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$.

Donner l'expression des vecteurs \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{AF} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{BC} et en déduire que les points A, E et F sont alignés.

15 Traduire chacune des situations géométriques suivantes à l'aide de vecteurs colinéaires.

- Le point A est le milieu du segment $[EF]$.
- $ABCD$ est un trapèze de bases $AB = 2$ et $CD = 7$.
- Le point M est sur le segment $[AB]$ et $AM = \frac{3}{4}AB$.
- Le point F est le symétrique de E par rapport à A .
- Le point M appartient au segment $[AB]$.

16 Dans un repère $(O; I, J)$, on considère les points $A(2; -2)$, $B(6; 1)$, $C(1; 4)$ et $D(-3; 1)$.

- Placer ces points dans un repère (grader l'axe des abscisses de -6 à 14 et celui des ordonnées de -2 à 7).
- Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
- Placer les points M et N définis par $\overrightarrow{BM} = -2\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.
- Calculer les coordonnées des points M et N .

17 On considère un parallélogramme $ABCD$ et les points E et F définis par $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

- Faire une figure. Que peut-on conjecturer sur les points B, F et E ?
On se place dans le repère $(A; D, B)$.
- Déterminer les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AC} et en déduire les coordonnées du point C .
- Déterminer les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AF} et en déduire les coordonnées du point F .
- Calculer les coordonnées du point E .
- Démontrer que \overrightarrow{BE} et \overrightarrow{BF} sont colinéaires. Conclure.

Problèmes

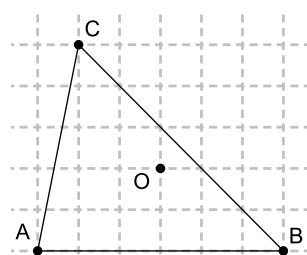
18 (Démonstration du critère de colinéarité)

Soit deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On va démontrer que \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

- Établir l'équivalence si l'un des vecteurs est nul.
- On suppose à présent les deux vecteurs non nuls.
 - Montrer que si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires, on a l'égalité $xy' - x'y = 0$.
 - Réciproquement soit deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} tels que $xy' - x'y = 0$.
 - Si $x = 0$ que peut-on dire de y ? En déduire qu'il existe k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.
 - Si $x \neq 0$, conclure aussi qu'il existe k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

19 Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit, A' le milieu de $[BC]$ et X le point défini par $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

- On considère le triangle ci-contre.
 - Vérifier par un calcul de longueur que O est le centre du cercle circonscrit.

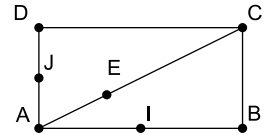


b. Placer le point X et tracer les droites (AX) , (BX) et (CX) . Quelle conjecture peut-on faire?

On revient à présent au cas général.

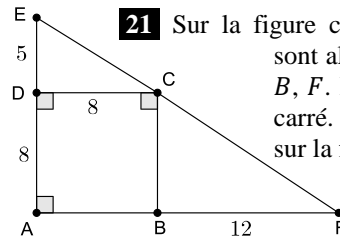
- Justifier que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$, en déduire $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{OA'}$.
- Montrer que X appartient à la hauteur issue de A .
- En déduire que les hauteurs d'un triangle sont concourantes et que leur point d'intersection H vérifie $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.

20 Soit $ABCD$ un rectangle, I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$. On considère le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.



On se place dans le repère $(A; I, J)$.

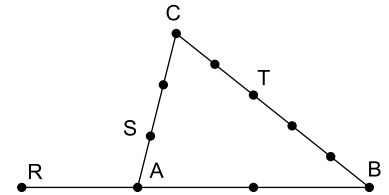
- Déterminer les coordonnées des points de la figure.
- Montrer que \overrightarrow{DE} et \overrightarrow{DI} sont colinéaires. Qu'en déduit-on pour les points D, E, I ?
- Que peut-on dire des points B, E, J ?
- Qu'en conclut-on sur les droites (AC) , (DI) et (BJ) ?



21 Sur la figure ci-contre, les points A, D, E sont alignés, ainsi que les points A, B, F . Le quadrilatère $ABCD$ est un carré. Les dimensions sont inscrites sur la figure.

Les points E, C, F sont-ils alignés?

22 On considère le triangle ABC et les points R, S et T appartenant aux droites (AB) , (AC) et (BC) . Les subdivisions portées sur la figure sont régulières.



- À partir de la figure, déterminer les réels tels que $\overrightarrow{AR} = \dots \overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AS} = \dots \overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{BT} = \dots \overrightarrow{BC}$

Dans la suite, on se propose de démontrer que les points R, S, T sont alignés en utilisant deux méthodes.

Partie A – Dans cette partie, on utilise des égalités vectorielles.

- Montrer que
 - $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
 - $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$
- Exprimer alors le vecteur \overrightarrow{RT} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
- Vérifier que $\overrightarrow{RS} = \frac{5}{9}\overrightarrow{RT}$. Conclure.

Partie B – On considère le repère $(A; B, C)$.

- Donner les coordonnées des points A, B, C, S et R .
- Calculer les coordonnées du point T .
- Montrer que le vecteur \overrightarrow{ST} a pour coordonnées $(\frac{2}{5}; \frac{4}{15})$.
- Montrer que les vecteurs \overrightarrow{ST} et \overrightarrow{SR} sont colinéaires. Conclure.

23 On considère un triangle ABC et a un réel.

Les points M, S, T sont définis par

$$\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{BT} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}.$$

Déterminer a pour que M, S, T soient alignés.