

## Vecteurs – Partie II

On se place dans le plan muni d'un repère  $(O; I, J)$ .

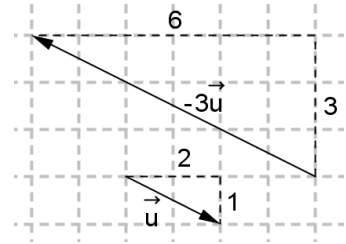
### 1. Produit d'un vecteur par un réel

**Définition.** Soit  $k$  un nombre réel et  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  un vecteur. On définit le vecteur  $k\vec{u}$  par  $\vec{v} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ .

**Exemple**

Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ , alors  $-3\vec{u} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

On admet que le vecteur  $k\vec{u}$  ainsi défini ne dépend pas du repère choisi.



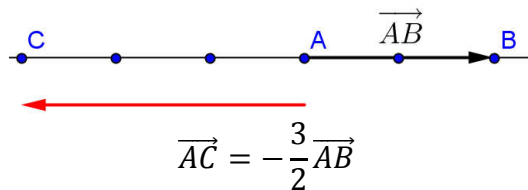
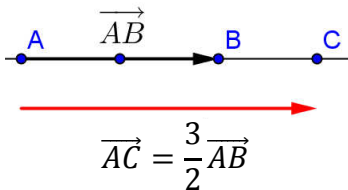
❖ **Construction géométrique du vecteur  $k\vec{AB}$**

Soit  $A$  et  $B$  deux points et  $k$  un réel.

Si  $\vec{AB} = \vec{0}$  ou  $k = 0$ , le vecteur  $k\vec{AB}$  est le vecteur nul.

Sinon le point  $C$  tel que  $\vec{AC} = k\vec{AB}$  est l'unique point de  $(AB)$  tel que

- Si  $k > 0$ ,  $AC = kAB$  et  $\vec{AC}$  et  $\vec{AB}$  sont de même sens.
- Si  $k < 0$ ,  $AC = -kAB$  et  $\vec{AC}$  et  $\vec{AB}$  sont de sens opposé.

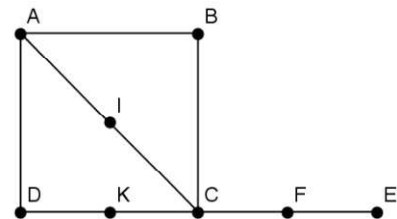


**Exemple A**

$ABCD$  est un carré,  $I$  est le milieu de  $[AC]$ , les points  $D, K, C, F, E$  sont alignés dans cet ordre avec  $DK = KC = CF = FE$ .

Compléter les égalités suivantes par des réels.

- 1)  $\vec{DC} = \dots \vec{FE} = \dots \vec{CK} = \dots \vec{ED}$
- 2)  $\vec{DF} = \dots \vec{DC} = \dots \vec{AB}$
- 3)  $\vec{CF} = \dots \vec{DE} = \dots \vec{EK}$
- 4)  $\vec{IC} = \dots \vec{AC} = \dots \vec{CA} = \dots \vec{IA} = \dots \vec{EB}$
- 5)  $\vec{DF} = \dots \vec{EF} = \dots \vec{CD} = \dots \vec{ED}$



**Réponse.**

- 1)  $\vec{DC} = 2\vec{FE} = -2\vec{CK} = \frac{1}{2}\vec{ED}$
- 2)  $\vec{DF} = \frac{3}{2}\vec{DC} = \frac{3}{2}\vec{AB}$
- 3)  $\vec{CF} = \frac{1}{4}\vec{DE} = -\frac{1}{3}\vec{EK}$
- 4)  $\vec{IC} = \frac{1}{2}\vec{AC} = -\frac{1}{2}\vec{CA} = -\vec{IA} = -\frac{1}{2}\vec{EB}$
- 5)  $\vec{DF} = -3\vec{EF} = -\frac{3}{2}\vec{CD} = -\frac{3}{4}\vec{ED}$

## ❖ Propriétés de calculs

**Théorème.** Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs et  $k$  et  $k'$  deux réels.

- 1)  $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$  ;
- 2)  $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$  ;
- 3)  $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$ .

**Démonstration.** Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ .

Le vecteur  $k(\vec{u} + \vec{v})$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} k(x+x') \\ k(y+y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx+kx' \\ ky+ky' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kx' \\ ky' \end{pmatrix}$ . On reconnaît la somme des coordonnées des vecteurs  $k\vec{u}$  et  $k\vec{v}$ , d'où l'égalité 1).

On procède de même pour les égalités 2) et 3). ■

### Exemple

- $3\left(\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{EF}\right) = 3\overrightarrow{AB} + 3\left(-\frac{4}{3}\overrightarrow{EF}\right) = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{EF}$
- $3\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AB} = (3 - 5)\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB}$

## 2. Vecteurs colinéaires

**Définition.** Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont dits colinéaires s'il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{u} = k\vec{v}$  ou  $\vec{v} = k\vec{u}$ .

En particulier  $\vec{0}$  est colinéaire à tout vecteur puisque  $0\vec{u} = k\vec{0} = \vec{0}$  pour tout  $\vec{u}$  et  $k$ .

### Exemple A

Les vecteurs  $\overrightarrow{AI}$ ,  $\overrightarrow{IC}$  et  $\overrightarrow{BE}$  sont colinéaires, mais  $\overrightarrow{AI}$  et  $\overrightarrow{CE}$  ne le sont pas.

Deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont colinéaires si et seulement si il existe un réel  $k$  tel que  $\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$  ou tel que  $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$ , autrement dit si leurs coordonnées sont proportionnelles. Le tableau suivant constitué de leurs coordonnées doit donc être un tableau de proportionnalité.

$x$	$x'$
$y$	$y'$

Cela se traduit finalement par  $xy' = x'y$ , d'où le théorème suivant.

**Théorème.** Deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont colinéaires si et seulement si  $xy' = x'y$ .

**Démonstration.** 1) Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et l'égalité  $xy' = x'y$  est bien satisfaite car elle se réduit à  $0 = 0$ .

2) On suppose dans la suite  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$ .

Supposons  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  colinéaires. Il existe  $k \neq 0$  tel que  $\vec{u} = k\vec{v}$  ce qui donne aux niveaux des coordonnées les égalités  $x = kx'$  et  $y = ky'$ . En multipliant la première égalité par  $y'$  puis en utilisant la seconde, il vient  $xy' = kx'y' = x' \times (ky') = x'y$ .

Réciproquement, supposons  $xy' = x'y$ . Deux cas sont à envisager.

- Si  $y' = 0$ , alors  $x'y = 0$  et comme  $x' \neq 0$  (sinon on aurait  $\vec{v} = \vec{0}$ ), on a  $y = 0$ . Il en résulte que  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix}$ , d'où  $\vec{u} = \frac{x}{x'} \vec{v}$ , ce qui montre que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.
- Si  $y' \neq 0$ , on peut écrire  $x = \frac{x'}{y'} y$ , donc en posant  $k = \frac{x'}{y'}$  on obtient les égalités  $x = ky$  et  $x' = ky'$ . Cela montre l'égalité  $\vec{u} = k\vec{v}$  et la colinéarité de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . ■

### Exemple

Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires car  $4 \times 1 = -2 \times (-2)$ . Remarquons que  $\vec{u} = -2\vec{v}$ .  
En revanche  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  ne sont pas colinéaires car  $-2 \times (-3) \neq 2 \times 1$ .

**Théorème.** Les assertions suivantes sont équivalentes.

- $I$  est le milieu du segment  $[AB]$  ;
- $\vec{AI} = \vec{IB}$  ;
- $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$  ;
- $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ .

### Démonstration.

1) Démontrons  $(i) \Leftrightarrow (ii)$ . On a successivement

$$\begin{aligned} \vec{AI} = \vec{IB} &\Leftrightarrow AIBI \text{ est un parallélogramme} \\ &\Leftrightarrow [AB] \text{ et } [II] \text{ se coupent en leur milieu} \\ &\Leftrightarrow I \text{ est le milieu de } [AB]. \end{aligned}$$

2) Il est immédiat que  $\vec{AI} = \vec{IB} \Leftrightarrow \vec{AI} - \vec{IB} = \vec{0} = \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ , d'où  $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ .

3) Pour  $(ii) \Leftrightarrow (iv)$  on obtient grâce à la relation de Chasles :

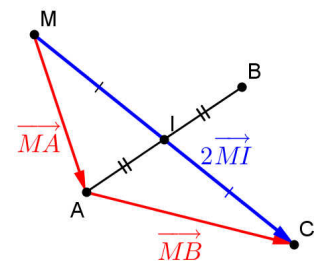
$$\vec{AI} = \vec{IB} \Leftrightarrow \vec{AI} = \vec{IA} + \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AI} = -\vec{AI} + \vec{AB} \Leftrightarrow 2\vec{AI} = \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB},$$

ce qui est bien le résultat attendu. ■

**Théorème.** Soit  $I$  le milieu d'un segment  $[AB]$ . Pour tout point  $M$  on a  $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$ .

**Démonstration.** En faisant apparaître le point  $I$  dans  $\vec{MA}$  et  $\vec{MB}$ ,

$$\begin{aligned} \vec{MA} + \vec{MB} &= \vec{MI} + \vec{IA} + \vec{MI} + \vec{IB} \\ &= 2\vec{MI} + \underbrace{\vec{IA} + \vec{IB}}_{=\vec{0}} = 2\vec{MI}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$



## 3. Applications

**Théorème.** Soit  $A, B, C, D$  quatre points avec  $A \neq B$  et  $C \neq D$ . Les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles si et seulement si les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$  sont colinéaires.

**Démonstration.** Si les quatre points sont alignés, il n'y a rien à démontrer.

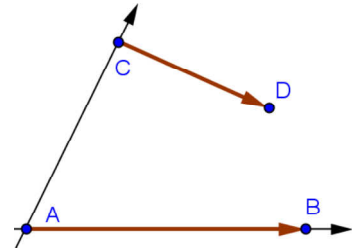
Sinon parmi les quatre points il y en a au moins trois non alignés, par exemple  $A, B, C$ . Comme  $A \neq B$  et que  $C$  n'est pas aligné avec ces points, on peut considérer le repère  $(A; B, C)$ . Dans ce repère, on a  $A(0; 0)$ ,  $B(1; 0)$  et  $C(0; 1)$  et appelons  $(x_D, y_D)$  les coordonnées de  $D$ .

Les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles si et seulement si  $C$  et  $D$  ont la même ordonnée, c'est-à-dire si et seulement si  $y_D = 1$ .

D'autre part  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x_D \\ y_D - 1 \end{pmatrix}$ . Ces vecteurs sont colinéaires si et seulement si

$$1 \times (y_D - 1) = 0 \times x_D$$

soit  $y_D = 1$ . On retrouve la même condition que celle qui traduit le parallélisme de  $(AB)$  et  $(CD)$ , ce qui établit l'équivalence. ■



On énonce « deux vecteurs sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction ».

**Théorème.** Trois points  $A, B, C$  sont alignés si et seulement si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.

**Démonstration.** Si deux de ces points sont confondus, l'équivalence est claire puisqu'alors l'un des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  ou  $\overrightarrow{AC}$  est nul et le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

Supposons maintenant que  $A, B, C$  sont deux à deux distincts. D'après le théorème précédent, les droites  $(AB)$  et  $(AC)$  sont parallèles, mais comme  $A$  est commun, ces deux droites sont confondues, ceci revient bien à dire que  $A, B, C$  sont alignés. ■

### Exemple

Dans un repère, on considère les points  $A(-1; -1)$ ,  $B(2; 8)$ ,  $C(-2; -4)$ ,  $D(3; 3)$  et  $E(9; 21)$ .

- 1) Montrer que les points  $A, B$  et  $C$  sont alignés.
- 2) Les droites  $(AB)$  et  $(DE)$  sont-elles parallèles ?

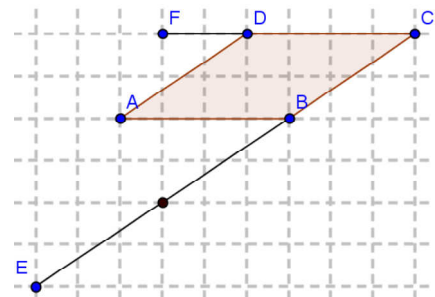
#### Réponse.

- 1) On a  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ . On remarque  $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$  donc les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires qui prouve que les points  $A, B$  et  $C$  sont alignés.
- 2) Comme  $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix}$ , on constate que  $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{AB}$ , ce qui prouve que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{DE}$  sont colinéaires et que les droites  $(AB)$  et  $(DE)$  sont parallèles.

### Exemple

$ABCD$  est un parallélogramme. Les points  $E$  et  $F$  sont définis par  $\overrightarrow{BE} = -2\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$ .

Donner l'expression des vecteurs  $\overrightarrow{AE}$  et  $\overrightarrow{AF}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  et en déduire que les points  $A, E$  et  $F$  sont alignés.



**Réponse.** On utilise la relation de Chasles pour faire apparaître les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$$

et en remarquant que  $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$  on a

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Ainsi  $\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AF}$ , les vecteurs  $\overrightarrow{AE}$  et  $\overrightarrow{AF}$  sont colinéaires, donc les points  $A, E$  et  $F$  sont alignés.