Fonction inverse

1. Fonction inverse

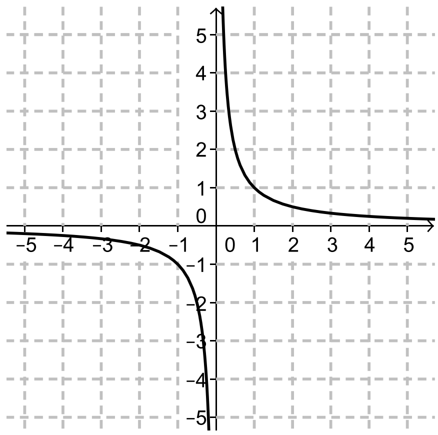
Définition. On appelle <u>fonction inverse</u> la fonction f définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.

Remarque. Puisque 0 n'a pas d'inverse, il n'est pas dans l'ensemble de définition de la fonction inverse. On dit que la fonction inverse n'est pas définie en 0.

❖ **Représentation graphique de la fonction inverse**

Définition. *La courbe représentative de la fonction inverse est une <u>hyperbole</u>.*

Le fait que l'ensemble de définition de la fonction inverse f « saute » 0 entraîne un comportement particulier de cette fonction pour les valeurs proches de 0.
Construisons un tableau de valeurs de f pour des valeurs proches de 0.



x	$-0{,}4$	$-0{,}2$	$-0{,}1$	$-0{,}05$	$-0{,}01$
$f(x)$	$-2{,}5$	-5	-10	-50	-100

x	0,01	0,05	0,1	0,2	0,4
$f(x)$	100	50	10	5	2,5

On constate que plus x est proche de 0, plus son image est grande. L'hyperbole longe indéfiniment l'axe des ordonnées sans jamais le toucher, on dit que l'axe des ordonnées et une asymptote à l'hyperbole.

❖ **Sens de variation de la fonction inverse**

Théorème. La fonction inverse f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0[$ et sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Son tableau de variation est le suivant.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variation de f	$\searrow$		$\searrow$

On retient ce résultat sous la forme « deux nombres non nuls de même signe et leurs inverses sont rangés dans l'ordre contraire ».

Démonstration. Soit f la fonction inverse et deux réels a et b non nuls de même signe avec $a<b$. On a

$$f(a)-f(b)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}.$$

Or $a < b$, donc $b - a > 0$, et comme a et b sont de même signe, ab est positif. D'après la règle des signes $f(a) - f(b) > 0$, c'est-à-dire $f(a) > f(b)$, ce qui démontre que f est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. ■

Exemple

Donner l'encadrement le plus précis possible de $\frac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants :

a. $2 \leq x \leq 5$;
b. $-\frac{5}{3} \leq x \leq -1$;
c. $x \leq -3$;
d. $0 < x \leq 2$.

Réponse. Soit f la fonction inverse.

a. Les nombres $2, x, 5$ appartiennent à l'intervalle $]0; +\infty[$ où f est décroissante, donc l'inégalité $2 \leq x \leq 5$ entraîne $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{5}$, ou encore $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$.
b. Les nombres $-\frac{5}{3}, x, -1$ appartiennent à l'intervalle $]-\infty; 0[$ où f est décroissante, donc $-\frac{3}{5} \geq x \geq -1$, ou encore $-1 \leq x \leq -\frac{3}{5}$.
c. Les nombres x et 3 appartiennent à l'intervalle $]-\infty; 0[$ où f est décroissante, donc $\frac{1}{x} \geq -\frac{1}{3}$, ou encore $-\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x}$. De plus comme $x < 0$, on a $\frac{1}{x} < 0$ par la règle des signes, donc finalement $-\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} < 0$.
d. Les nombres x et 2 appartiennent à l'intervalle $]0; +\infty[$ où f est décroissante, donc $x \leq 2$ implique $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$.

❖ **Signe de la fonction inverse**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de f	$-$	‖	$+$

2. Équations et inéquations quotients

On rappelle que l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ de deux fractions équivaut à $a \times d = b \times c$. Par exemple les fractions $\frac{6}{8}$ et $\frac{9}{12}$ sont égales car $6 \times 12 = 8 \times 9$.
On appelle cela « l'égalité des produits en croix ».
Cette propriété permet de se « débarrasser » des fractions lorsqu'on veut résoudre une équation.

Exemple

Considérons l'équation $\frac{2x}{x-1} = 4$. Si l'on remplace x par 1, on est conduit à une division par 0, le membre de gauche n'existe pas. On dit que 1 est une valeur interdite de l'équation. En dehors de ces valeurs, la résolution de l'équation ne pose pas de problème :

$$\frac{2x}{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2x = 4(x-1) \Leftrightarrow 2x = 4x - 4 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2,$$

donc $S = \{2\}$.

Exemple

Développer $(x-2)(5x+2)$ puis s'en servir pour résoudre l'équation $\frac{4x-5}{x+1} = \frac{4-x}{x}$.

Réponse. On a

$$(x-2)(5x+2) = 5x^2 + 2x - 10 - 4 = 5x^2 - 8x - 4.$$

Les valeurs interdites de l'équation sont clairement -1 et 0. Donc pour x différent de ces deux valeurs, on a

$$\frac{4x-5}{x+1} = \frac{4-x}{x} \Leftrightarrow (4x-5)x = (4-x)(x+1) \Leftrightarrow 5x^2 - 8x - 4 = 0.$$

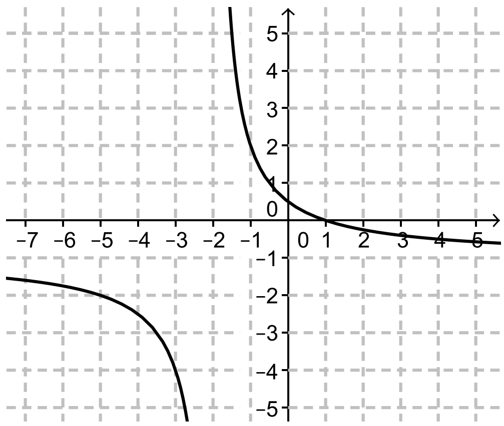
En utilisant le fait que $5x^2 - 8x - 4 = (x-2)(5x+2)$ on conclut que $S = \left\{-\frac{5}{2}; 2\right\}$.

Les tableaux de signes peuvent s'utiliser pour des fonctions comportant des quotients. Il faut prendre soin d'identifier les valeurs interdites.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{-x+1}{x+2}$ sur $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$.

1. Déterminer le signe de f.
2. Résoudre $f(x) \geq 0$ et $f(x) < 0$.
3. Résoudre $f(x) \geq -4$.



Réponse.

1. On construit les tableaux de signes de $-x+1$ et $x+2$. Dans la ligne concernant le signe de $f(x)$, on indique les valeurs interdites par une double barre.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de $-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

2. En lisant le tableau de signe, on constate que l'ensemble des solutions de $f(x) \geq 0$ est $]-2; 1]$ et celui de l'inéquation $f(x) \leq 0$ est $]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$.

3. Il ne faut surtout pas faire de produit en croix pour les inéquations, car on ne connaît pas le signe des expressions que l'on déplace.
   On ramène l'inéquation à 0, puis on la transforme en une fraction.
   $f(x) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{-x+1}{x+2} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{-x+1}{x+2} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x+1}{x+2} - \frac{2(x+2)}{x+2} \leq 0$
   $\Leftrightarrow \frac{-x+1-2(x+2)}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x+1-2x-4}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3x-3}{x+2} \leq 0.$
   On construit alors le tableau de signe de cette fraction.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
Signe de $-3x-3$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Ainsi $S =]-\infty; -2[\cup [-1; +\infty[$.

3. Fonctions homographiques

❖ Définition, exemples

Définition. *Étant donné quatre réels a, b, c, d avec $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$, on appelle fonction homographique la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ par*

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Remarque.

- Si $c = 0$, on a une fonction affine que l'on sait déjà étudier.
- Le calcul de $\frac{ax+b}{cx+d}$ est impossible lorsque $cx + d = 0$, ce qui équivaut à $cx = -d$ ou encore $x = -\frac{d}{c}$, d'où l'ensemble de définition.
- Si $ad - bc = 0$, le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité, il existe donc un réel k tel que $a = kc$ et $b = kd$ et on a alors

a	b
c	d

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}, \qquad \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{kcx+kd}{cx+d} = \frac{k(cx+d)}{cx+d} = k,$$

et la fonction n'a pas d'intérêt puisqu'elle est constante sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Exemple

- La fonction $f : x \mapsto \frac{2-x}{3+4x}$ est homographique et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{3}{4}\right\}$.
- La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est homographique et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^*$. C'est en cela que les fonctions homographiques généralisent la fonction inverse.
- La fonction $h : x \mapsto \frac{3x+2}{6x+4}$ n'est pas homographique car $h(x) = \frac{3x+2}{2(3x+2)} = \frac{1}{2}$.

❖ Variations

Théorème. Le sens de variation de la fonction homographique $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ dépend du signe de $ad - bc$.

- Si $ad - bc > 0$, alors h est croissante sur $\left]-\infty; -\frac{d}{c}\right[$ et sur $\left]-\frac{d}{c}; +\infty\right[$;
- Si $ad - bc < 0$, alors h est décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{d}{c}\right[$ et sur $\left]-\frac{d}{c}; +\infty\right[$.

Si $ad - bc > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
variation de f	↗		↗

Si $ad - bc < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
variation de f	↘		↘

Démonstration. La démonstration de ce théorème est assez calculatoire. Il faut montrer l'identité

$$f(x') - f(x) = (ad - bc)\,\frac{x' - x}{(cx+d)(cx'+d)}$$

qui permet de conclure puisque $(cx+d)(cx'+d)>0$ pour x et x' appartenant simultanément à $\left]-\infty;-\frac{d}{c}\right[$ ou à $\left]-\frac{d}{c};+\infty\right[$. ■

Remarque. On voit apparaître naturellement dans ce théorème la quantité $ad-bc$ qui est supposée non nulle dans la définition d'une fonction homographique.

Exemple

Dresser le tableau de variation de la fonction $f: x \mapsto \frac{2x-5}{4+2x}$.

Réponse. La fonction est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ et $ad-bc=2\times(-4)-(-5)\times 4=12>0$, donc f est croissante sur $]-\infty;-2[$ et sur $]-2;+\infty[$.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
variation de f	$\nearrow$	‖	$\nearrow$