Vecteurs - Partie II – Exercices

Produit d'un vecteur par un réel

1 Dans un repère $(O; I, J)$, on considère les vecteurs

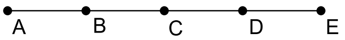
$$\vec{u}\binom{3}{1},\ \vec{v}\binom{-2}{3} \text{ et } \vec{w}\binom{4}{-1}.$$

Calculer les coordonnées des vecteurs suivants.

$\vec{t_1} = 3\vec{u}$; $\vec{t_2} = \vec{u} - 2\vec{v}$; $\vec{t_3} = 2\vec{w} + 4\vec{v}$.

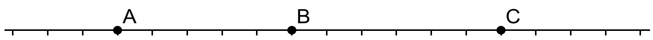
2 Les points A, B, C, D, E sont alignés et régulièrement espacés. Compléter les égalités suivantes par des réels.

a. $\overrightarrow{AD} = \,..\, \overrightarrow{BC} = \,..\, \overrightarrow{CE} = \,..\, \overrightarrow{ED}$
b. $\overrightarrow{BD} = \,..\, \overrightarrow{BC} = \,..\, \overrightarrow{BA} = \,..\, \overrightarrow{EA}$
c. $\overrightarrow{CB} = \,..\, \overrightarrow{DE} = \,..\, \overrightarrow{EB} = \,..\, \overrightarrow{AC}$



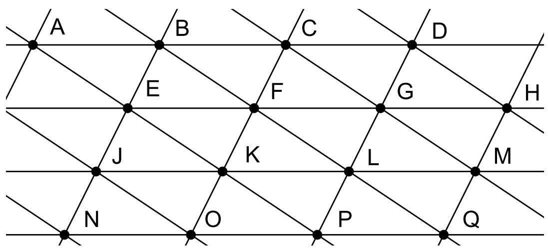
3 Placer les points D, E, F, G, H, J définis par

a. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$
b. $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
c. $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$
d. $\overrightarrow{BG} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
e. $\overrightarrow{BH} = -\frac{7}{6}\overrightarrow{BC}$
f. $\overrightarrow{CJ} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$



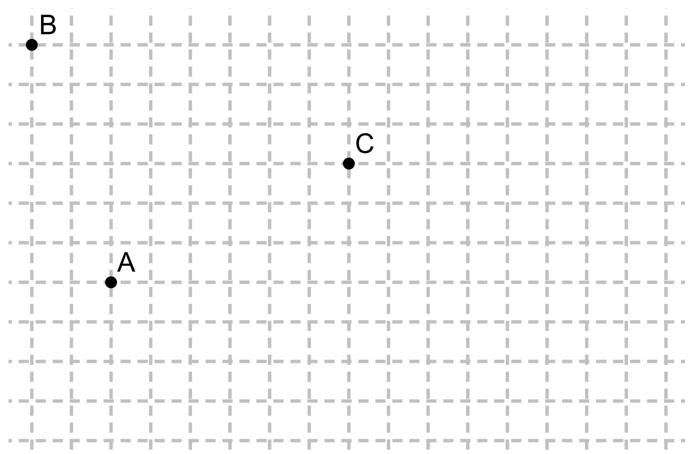
4 Compléter les égalités suivantes par des réels.

a. $\overrightarrow{BL} = \,..\, \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{JL} = \,..\, \overrightarrow{DG} + \,..\, \overrightarrow{HF}$
b. $\overrightarrow{GK} = \,..\, \overrightarrow{EG} + \,..\, \overrightarrow{NB}$
c. $\overrightarrow{FK} = \,..\, \overrightarrow{CM} + \,..\, \overrightarrow{CB} = \,..\, \overrightarrow{EK} + \,..\, \overrightarrow{EF}$
d. $\overrightarrow{CO} = \,..\, \overrightarrow{FL} + \,..\, \overrightarrow{OH}$



5 Placer les points P, Q, R, S, T définis par

a. $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
b. $\overrightarrow{BQ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{BC}$
c. $\overrightarrow{CR} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$
d. $\overrightarrow{CS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$
e. $\overrightarrow{AT} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{3}\overrightarrow{AC}$



6 Soit les points $A(-3; 2)$, $B(-5; 4)$ et $C(x; y)$.

1. Calculer x et y pour que $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}$.
2. Même question pour que $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$.

Vecteurs colinéaires

7 Vrai ou faux ? Justifier.

a. Soit $\vec{u}\binom{2}{3}$. Tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$ a des coordonnées positives.
b. Soit $\vec{u}\binom{2}{3}$. Tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$ a des coordonnées de même signe.
c. Si $AB = 2AC$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
d. Soit $\vec{u}\binom{0}{3}$. Tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$ admet 0 comme première coordonnée.
e. Tout vecteur ayant 0 pour première coordonnée est colinéaire au vecteur $\vec{u}\binom{0}{3}$.

8 Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ? Si oui donner les réels k_1 et k_2 tels que $\vec{u} = k_1\vec{v}$ et $\vec{v} = k_2\vec{u}$.

a. $\vec{u}\binom{2}{3}$ et $\vec{v}\binom{0}{9}$
b. $\vec{u}\binom{3}{2}$ et $\vec{v}\binom{6}{4}$
c. $\vec{u}\binom{2}{3}$ et $\vec{v}\binom{-5}{6}$
d. $\vec{u}\binom{2}{3}$ et $\vec{v}\binom{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
e. $\vec{u}\binom{-3}{4}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$
f. $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{3}{7}\\ 2\end{pmatrix}$
g. $\vec{u}\binom{-\sqrt{5}}{3}$ et $\vec{v}\binom{-5}{3\sqrt{5}}$
h. $\vec{u}\binom{1-\sqrt{2}}{1}$ et $\vec{v}\binom{-1}{1+\sqrt{2}}$

9 Déterminer x pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires. Donner le nombre k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

a. $\vec{u}\binom{2}{3}$ et $\vec{v}\binom{6}{9x}$
b. $\vec{u}\binom{2-x}{3}$ et $\vec{v}\binom{6}{9}$
c. $\vec{u}\binom{2}{3}$ et $\vec{v}\binom{4x}{6x}$
d. $\vec{u}\binom{2-x}{3}$ et $\vec{v}\binom{-4}{2+x}$

10 Soit $\vec{u}(m-1; 4-m)$ et $\vec{v}(3-m; 3m-7)$ deux vecteurs où m est un nombre.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $2m^2 - 3m - 5 = 0$.
2. Développer $(m+1)(2m-5)$.
3. En déduire la ou les valeur(s) de m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires. Pour chaque valeur de m trouvée, donner le réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Application à la géométrie

11 Soit les points $A(2; -1)$ et $B(-1; 2)$.

1. Calculer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Expliquer pourquoi A, B, C sont alignés.
2. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AC}$.

12 Déterminer dans chaque cas si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

a. $A(0; 1)$, $B(2; 5)$, $C(-1; 4)$ et $D(5; 15)$.
b. $A(0; 1)$, $B(-1; 4)$, $C(4; 6)$ et $D(7; 5)$.
c. $A(12; 27)$, $B(60; 37)$, $D(-21; -33)$ et $C(99; -8)$.

13 Déterminer si les points A, B, C sont alignés.

a. $A(1; 1)$, $B(4; 1)$, $C(4; 5)$.
b. $A(6; 3)$, $B(-6; 1)$ et $C(12; 4)$.
c. $A(4; 0)$, $B(0; 4)$, $C(4; 4)$.

14 On considère un parallélogramme $ABCD$. Les points E et F sont définis par $\overrightarrow{BE} = -2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$.

Donner l'expression des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ et en déduire que les points A, E et F sont alignés.

15 Traduire chacune des situations géométriques suivantes à l'aide de vecteurs colinéaires.

a. Le point A est le milieu du segment $[EF]$.

b. $ABCD$ est un trapèze de bases $AB = 2$ et $CD = 7$.

c. Le point M est sur le segment $[AB]$ et $AM = \frac{3}{4}AB$.

d. Le point F est le symétrique de E par rapport à A.

e. Le point M appartient au segment $[AB]$.

16 Dans un repère $(O; I, J)$, on considère les points $A(2; -2)$, $B(6; 1)$, $C(1; 4)$ et $D(-3; 1)$.

1. Placer ces points dans un repère (l'axe des abscisses sera gradué de -6 à 14).
2. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
3. Placer les points M et N définis par
$$\overrightarrow{BM} = -2\overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}.$$
4. Calculer les coordonnées des points M et N.

17 On considère un parallélogramme $ABCD$ et les points E et F définis par $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

1. Faire une figure. Que peut-on conjecturer sur les points B, F et E ?
   On se place dans le repère $(A; D, B)$.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ et en déduire les coordonnées du point C.
3. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AF}$ et en déduire les coordonnées du point F.
4. Calculer les coordonnées du point E.
5. Démontrer que $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires. Conclure.

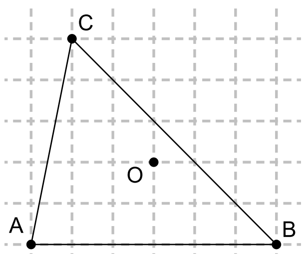
Problèmes

18 (Démonstration du critère de colinéarité).

Soit deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$. On va démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

1. Établir l'équivalence si l'un des vecteurs est nul.
2. On suppose à présent les deux vecteurs non nuls.
   a. Montrer que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on a l'égalité $xy' - x'y = 0$.
   b. Réciproquement soit deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $xy' - x'y = 0$.
      i. Si $x = 0$ que peut-on dire de y ? En déduire qu'il existe k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.
      ii. Si $x \neq 0$, conclure aussi qu'il existe k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

19 Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit, A' le milieu de $[BC]$ et X le point défini par
$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

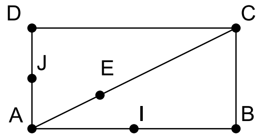


1. On considère le triangle ci-contre.
   a. Vérifier par un calcul de longueur que O est le centre du cercle circonscrit.
   b. Placer le point X et tracer les droites (AX), (BX) et (CX). Quelle conjecture peut-on faire ?

On revient à présent au cas général.

2. Justifier que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$, en déduire $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{OA'}$.
3. Montrer que X appartient à la hauteur issue de A.
4. En déduire que les hauteurs d'un triangle sont concourantes et que leur point d'intersection H vérifie
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \text{ et } \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}.$$

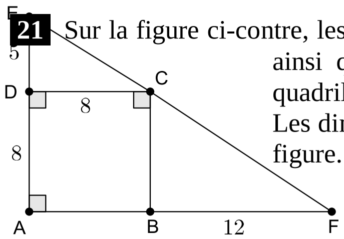
20 Soit $ABCD$ un rectangle, I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$. On considère le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.



On se place dans le repère $(A; I, J)$.

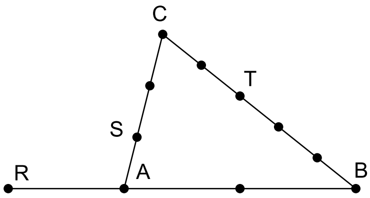
1. Déterminer les coordonnées des points de la figure.
2. Montrer que $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont colinéaires. Qu'en déduit-on pour les points D, E, I ?
3. Que peut-on dire des points B, E, J ?
4. Qu'en conclut-on sur les droites (AC), (DI) et (BJ) ?

21 Sur la figure ci-contre, les points A, D, E sont alignés, ainsi que les points A, B, F. Le quadrilatère $ABCD$ est un carré. Les dimensions sont inscrites sur la figure.



Les points E, C, F sont-ils alignés ?

22 On considère le triangle ABC et les points R, S et T appartenant aux droites (AB), (AC) et (BC). Les subdivisions portées sur la figure sont régulières.



1. À partir de la figure, déterminer les réels tels que
$\overrightarrow{AR} = \ldots\ \overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AS} = \ldots\ \overrightarrow{AC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BT} = \ldots\ \overrightarrow{BC}$

Dans la suite, on se propose de démontrer que les points R, S, T sont alignés en utilisant deux méthodes.

Partie A – Dans cette partie, on utilise des égalités vectorielles.

2. Montrer que
   a. $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ $\qquad$ **b.** $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$
3. Exprimer alors le vecteur $\overrightarrow{RT}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4. Vérifier que $\overrightarrow{RS} = \frac{5}{9}\overrightarrow{RT}$. Conclure.

Partie B – On considère le repère $(A; B, C)$.

5. Donner les coordonnées des points A, B, C, S et R.
6. Calculer les coordonnées du point T.
7. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{ST}$ a pour coordonnées $\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{15}\right)$.
8. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{SR}$ sont colinéaires. Conclure.

23 On considère un triangle ABC et a un réel.
Les points M, S, T sont définis par
$$\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AS} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{BC} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}.$$
Déterminer a pour que M, S, T soient alignés.