Fonctions affines et tableaux de signes – Exercices

Fonctions affines

1 Les fonctions suivantes sont-elles affines ? Si oui préciser les coefficients a et b.

a. $f(x) = 4x + 5$ **b.** $f(x) = x^2 + 1$
c. $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ **d.** $f(x) = 3 - x$
e. $f(x) = x\left(\frac{1}{3} - x\right) + x^2$ **f.** $f(x) = \frac{-5+3x}{7}$
g. $f(x) = 2(x - 1)$ **h.** $f(x) = \frac{(2x+1)^2}{4} - x^2$

2 Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont croissantes sur $\mathbb{R}$? Lesquelles sont décroissantes sur $\mathbb{R}$?

$f_1(x) = 3x - 2$ $f_2(x) = -2x + 3$
$f_3(x) = -\frac{x}{2} + 3$ $f_4(x) = \frac{-x+3}{4}$

3 Pour chacune des fonctions de l'exercice précédent, construire le tableau de signe.

4 Dresser le tableau de signes de chacune des fonctions suivantes.

a. $f_1(x) = 3x - 6$ **b.** $f_2(x) = -2x - 1$
c. $f_3(x) = -5x + 7$ **d.** $f_4(x) = 2x$

5 Le tableau ci-dessous donne le tableau de signe d'une fonction affine f.

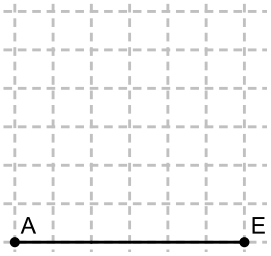
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
signe de $f(x)$	$-$	0	$+$

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles peuvent convenir pour f ?

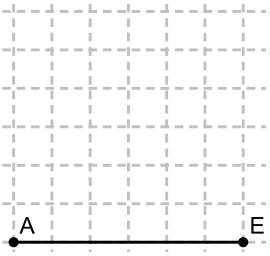
$f_1(x) = -x - 2$ $f_2(x) = 2x + 4$
$f_3(x) = 5 + \frac{5}{2}x$ $f_4(x) = x - 2$

6 Soit $[AE]$ un segment de longueur 6 et M un point de ce segment. On construit les carrés $ABCD$ et $BEFG$ comme indiqué sur la figure. On appelle x la longueur AB et $f(x)$ la longueur de la ligne polygonale $AEFGCDA$ en gras.

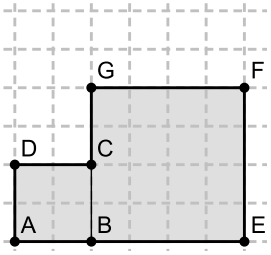
1. Calculer $f(x)$ pour les valeurs de x indiquées et construire la figure dans chaque cas.



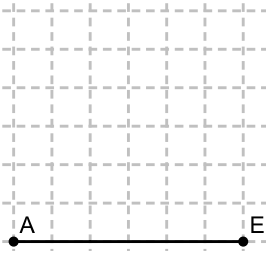
$f(0) = \ldots$



$f(1) = \ldots$



$f(2) = \ldots$



$f(6) = \ldots$

2. Démontrer que

$$f(x) = \begin{cases} 24 - 2x, \text{si } x \in [0;3] \\ 12 + 2x, \text{si } x \in [3;6]. \end{cases}$$

3. Dans un repère orthogonal d'unité 1 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées, tracer la courbe représentative de la fonction f.

4. Déterminer graphiquement l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la longueur de la ligne polygonale est comprise entre 20 et 22. Retrouver ceci par le calcul.

Équations-produit

7 Résoudre les équations suivantes.

a. $(2x - 4)(5 - x) = 0$
b. $21(x - 1)(x - 3) = 0$
c. $(x - 1)^2 = 0$
d. $4(7x - 3)(4x + 1)^2 = 0$
e. $-3(x - 2)(3x - 3)(5 - 4x) = 0$

8 Résoudre les équations suivantes.

a. $3x^2 - 3x = 0$
b. $3x(2x + 1) - (4 - x)(2x + 1) = 0$
c. $(x - 1)(x + 2) = (x - 1)(2x + 1)$
d. $(2x + 1)^2 = 4x^2$
e. $x^2 - 1 = x + 1$

9 On souhaite résoudre $2x^2 = 3 - x$.

1. Représenter graphiquement chacun des membres et conjecturer les solutions de l'équation.
2. Développer $(2x + 3)(x - 1)$.
3. En déduire les solutions de l'équation.

10 Mêmes questions que l'exercice précédent avec l'équation $3x - x^2 = 2$ après avoir vérifié que

$$3x - x^2 - 2 = (1 - x)(x - 2).$$

11 On considère l'équation $2x^2 = x + 6$.

1. Résoudre graphiquement cette équation.
2. Vérifier que

$$2x^2 - x - 6 = (2x + 3)(x - 2)$$

et en déduire les solutions.

Tableaux de signes

12 **(Règle des signes)**

1. Rappeler la règle des signes d'un produit.
2. f et g sont des fonctions dont les tableaux de signes sont les suivants.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Signe de $f(x)$	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
Signe de $g(x)$	$+$	0	$-$

3. Donner le signe de $f(1)$, $g(1)$, $f(1) \times g(1)$.
4. Compléter le tableau de signe de $f(x) \times g(x)$.

x	
Signe de $f(x) \times g(x)$	

5. Donner des fonctions f et g ayant ces tableaux de signes.
6. Résoudre les inéquations

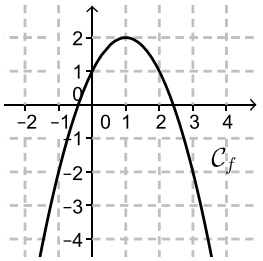
$$f(x) \times g(x) > 0 \text{ et } f(x) \times g(x) \leq 0.$$

13 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = 2x^2 + 3x - 2.$$
1. Représenter graphiquement f et conjecturer son signe.
2. Vérifier que $f(x) = (x+2)(2x-1)$
3. Dans un même tableau, faire apparaître le signe de $x+2$ et celui de $2x-1$. En déduire le tableau de signe de f.
4. Résoudre les inéquations $f(x) < 0$ et $f(x) \geq 0$.

14 Dresser le tableau de signes de chacune des fonctions suivantes.
a. $f(x) = (x-3)(2x+1)$
b. $g(x) = (1-x)(4x-3)$
c. $h(x) = 5x - 2x^2$

Résolution d'inéquations

15 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = -x^2 + 2x + 1.$$



1. a. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq -2$.
b. Montrer que cette inéquation équivaut à
$$(x+1)(3-x) \geq 0$$
et retrouver les solutions grâce à une étude de signe.
2. a. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 1$.
b. Transformer l'inéquation et la résoudre à l'aide d'un tableau de signes.

16 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$.
1. Résoudre graphiquement $f(x) > 0$.
2. Montrer que $f(x) = (x^2+1)(x+2)$.
3. Justifier que pour tout x, on a $x^2 + 1 > 0$.
4. Résoudre par le calcul $f(x) > 0$.

17 On considère l'équation $x^3 = 2x - 4$.
1. Conjecturer les solutions de l'équation à l'aide de la calculatrice.
2. Montrer que $x^3 - 2x + 4 = (x+2)(x^2 - 2x + 2)$.
3. Montrer que $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$.
4. Résoudre l'équation.

18 On considère l'algorithme ci-dessous.

```
Pour i de −10 à 10 faire
    Si i² − 2i ≤ 1 alors
        Afficher « i est solution »
    Sinon Afficher « i n'est pas solution »
    Fin Si
Fin Pour
```

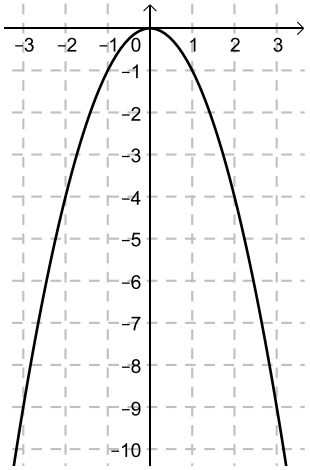
1. Quel est le rôle de cet algorithme ? Quelles valeurs s'affichent à l'écran ?
2. Montrer que $x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$ et en déduire la factorisation de $x^2 - 2x - 1$.
Résoudre alors l'inéquation $x^2 - 2x - 1 \leq 0$.

Position relative de deux courbes

19 Soit les droites $D_1 : y = x - 2$ et $D_2 : y = -2x + 1$.
1. Les tracer dans un repère, conjecturer leur position relative.
2. Démontrer la conjecture.

20 Même exercice avec les droites $D_1 : y = x + 1$ et $D_2 : y = -\frac{1}{3}x + 2$.

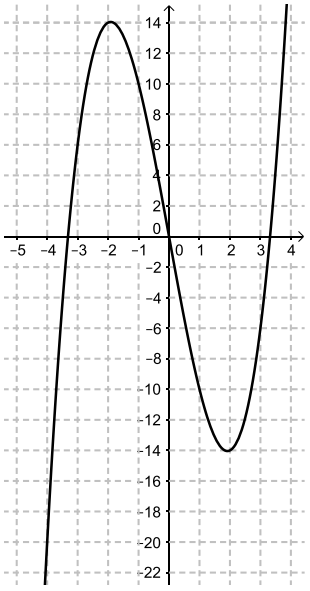
21 On a tracé dans le repère ci-contre la courbe C d'équation $y = -x^2$. Soit D la droite d'équation
$$y = -2x - 3.$$



1. Tracer la droite D et conjecturer la position relative de C et D.
2. Montrer que
$$-x^2 + 2x + 3 = (3-x)(x+1)$$
3. Construire le tableau de signe de $-x^2 + 2x + 3$ et prouver la conjecture.

22 Soit C la courbe d'équation $y = 3x^2 - 5x$. Soit D la droite d'équation $y = 3x + 3$.
1. À l'aide de la calculatrice ou de GeoGebra, conjecturer la position relative de C et D.
2. Montrer que
$$3x^2 - 5x - (3x+3) = (3x+1)(x-3).$$
3. Construire le tableau de signe de $3x^2 - 5x - (3x+3)$ et prouver la conjecture.

23 On a représenté ci-dessous la courbe C d'équation $y = x^3 - 11x$. Soit D la droite d'équation $y = 2x - 12$.



1. Tracer la droite D et conjecturer la position relative de C et D.
2. Montrer que
$$x^3 - 11x - (2x - 12) = (x-3)(x-1)(x+4).$$
3. Construire le tableau de signe de
$$(x-3)(x-1)(x+4)$$
et prouver la conjecture.

24 On souhaite résoudre l'équation $\sqrt{x-3} = 5 - x$ (E).
1. Montrer que si x est solution de (E), alors x vérifie
$$x - 3 = (5-x)^2.$$
Le contraire est-il vrai ?
2. Montrer que
$$x - 3 = (5-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 28 = 0.$$
3. Développer $(x-4)(x-7)$.
4. Résoudre alors l'équation (E).