Fonction inverse – Exercices

Fonction inverse

1 Vrai ou faux ? Justifier.

a. Un nombre réel non nul et son inverse sont de même signe.

b. Si a et b sont deux réels non nuls tel que $a > b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

c. Il n'existe aucun couple de réels non nuls (a, b) vérifiant $a < b$ et $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

d. Si $x \leq y < 0$ alors $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$.

2 Dans chacun des cas suivants, comparer, si c'est possible $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$.

a. $a > b > 2$ **b.** $b \leq a$ **c.** $a < 2 < b$

d. $a < 0 < b$ **e.** $a > 3$ et $b \geq 2$

3 Donner dans chacun des cas le meilleur encadrement possible de $\frac{1}{x}$

a. $1 \leq x \leq 3$ **b.** $-6 \leq x \leq -3$ **c.** $x \leq -5$

d. $0 < x \leq 1$ **e.** $\frac{1}{8} \leq x$ **f.** $x \leq 3$

4 Indiquer le minimum et le maximum de la fonction inverse sur les intervalles suivants.

a. $[1; 2]$ **b.** $[-3; -2]$ **c.** $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$ **d.** $]0; 1]$

Équations et inéquations

5 Pour chacune des équations, entourer parmi les propositions les solutions.

Équation	Solutions proposées		
1. $\frac{2x-2}{x+1} = 0$	**a.** 1	**b.** -1	**c.** 2
2. $\frac{x^2-4}{2-x} = 0$	**a.** 2	**b.** -2	**c.** 1
3. $\frac{x+1}{x-1} = \frac{6}{x}$	**a.** 1	**b.** 2	**c.** 3

6 Donner les valeurs interdites de ces expressions.

a. $\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x}$ **b.** $\frac{x-1}{x+2} + 5$

c. $\frac{x-3}{(x-2)(4x+5)} + \frac{1}{x-2}$ **d.** $\frac{4}{x^2-x} + \frac{1}{x+1}$

7 À l'aide la calculatrice ou de GeoGebra, conjecturer le nombre de solutions des équations suivantes.

a. $\frac{1}{x} = \frac{4x+5}{x+2}$ **b.** $\frac{1}{x} = \frac{4x+5}{x-2}$

c. $\frac{x-5}{x-2} = 2x + 4 - x^2$ **d.** $\frac{x-5}{x-2} = 6x^2 - x^4$

8 Conjecturer à l'aide de la calculatrice les solutions de l'équation $\frac{2}{x+1} = \frac{x+1}{x^2+1}$ puis de l'inéquation $\frac{2}{x+1} \leq \frac{x+1}{x^2+1}$.

9 Résoudre les équations suivantes après avoir indiqué les valeurs interdites.

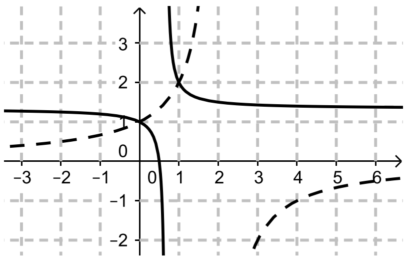
a. $\frac{x+1}{2x-4} = 0$ **b.** $\frac{x+1}{2x-4} = 2$

c. $\frac{3x-7}{x-1} = 0$ **d.** $\frac{3x-7}{x-1} = -1$

10 Soit l'équation $\frac{x}{3x-2} + 1 = \frac{2}{2-x}$ (E)

1. Déterminer les valeurs interdites de (E).

2. Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = \frac{x}{3x-2} + 1$ et $g(x) = \frac{2}{2-x}$.
On a tracé sur GeoGebra les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g.
Associer les fonctions à leur courbe représentative.



3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) ainsi que leur valeur.

4. Résoudre graphiquement $f(x) \geq g(x)$.

11 Soit l'équation $1 + \frac{2}{x} = \frac{2}{3-x}$ (E)

1. Déterminer les valeurs interdites de (E).

2. Montrer que pour x différent des valeurs interdites, on a (E) $\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$.

3. Vérifier que $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ et en déduire les solutions de (E).

12 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x+3}{4-2x}$.

1. Pour quelle valeur de x le dénominateur de $f(x)$ s'annule-t-il ?
Donner l'ensemble de définition de f.

2. Construire le tableau de signe de f.

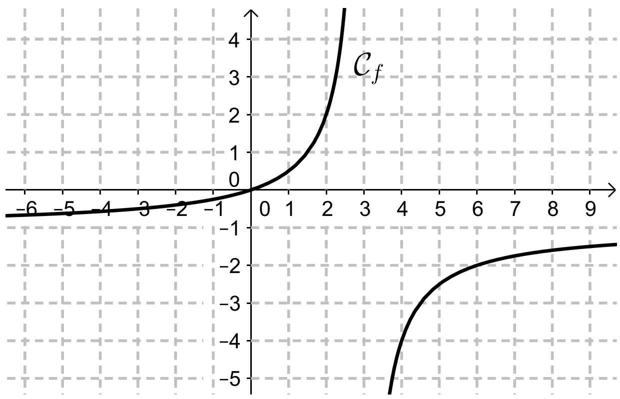
3. Résoudre les inéquations $f(x) < 0$ et $f(x) \geq 0$.

13 Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$ par $f(x) = \frac{-x}{x-3}$.
On a représenté ci-dessous sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

1. En utilisant le graphique, résoudre
  a. $f(x) \leq 1$ **b.** $f(x) > -x$

2. **a.** Montrer que $f(x) \leq 1$ équivaut à $\frac{-2x+3}{x-3} \leq 0$.
  b. Construire le tableau de signe de $\frac{-2x+3}{x-3}$.
  c. Retrouver le résultat de la question **1.a.**

3. Résoudre par le calcul l'inéquation de la question **1.b.**



14 Résoudre par le calcul les inéquations suivantes.

a. $\frac{2}{x-3} < 1$ **b.** $\frac{1}{x} \geq 2 - x$ **c.** $\frac{2}{x-1} \geq x - 2$

a'. $\frac{2}{x-3} \geq 1$ **b'.** $\frac{1}{x} < 2 - x$ **c'.** $\frac{2}{x-1} \leq x - 2$

15 On considère l'expression $\frac{2x}{x^2+1}$.

1. Calculer cette expression pour différentes valeurs de x. Quelle est la plus grande valeur obtenue ? La plus petite ?
2. Résoudre l'inéquation $\frac{2x}{x^2+1} \leq 1$.
   Que peut en déduire sur $\frac{2x}{x^2+1}$ pour tout réel x ?

16 Parmi les nombres

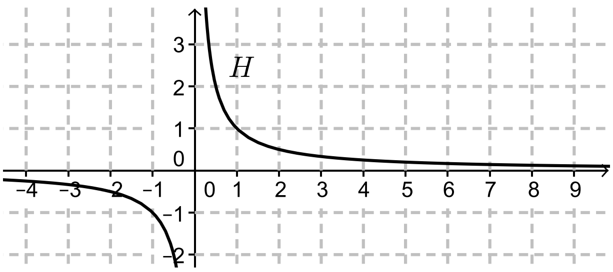
$$A = \frac{2\times10^{40}}{1+2\times10^{40}} \text{ et } B = \frac{10^{40}}{1+10^{40}},$$

lequel des deux est le plus grand ?

Problèmes

17 Un nombre est-il toujours plus petit que son carré ? Émettre une conjecture graphique et la démontrer.
Un nombre non nul est-il toujours plus grand que son inverse ?

18 Soit l'hyperbole $H: y = \frac{1}{x}$ et la droite $D: y = \frac{4}{9}x - 1$.



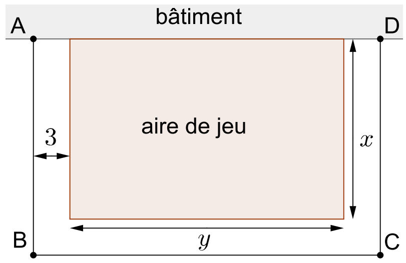
1. Tracer la droite et conjecturer la position relative de H et D.
2. Prouver que $\frac{4}{9}x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{(x-3)(4x+3)}{9x}$ puis démontrer la conjecture.

19 **(Comparaison de x^2 et $\frac{1}{x}$)**

1. Conjecturer à l'aide de la calculatrice la comparaison de x^2 et $\frac{1}{x}$ pour tout réel x non nul.
2. Justifier que pour $x < 0$, on a $\frac{1}{x} < x^2$.
3. Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.
   a. Compléter le raisonnement suivant.
   La fonction f est . . . . . . sur l'intervalle $]0; 1]$, donc pour $x \in]0; 1]$, $f(x)$ . . $f(1)$, c'est-à-dire . .
   La fonction g est . . . . . . sur l'intervalle $]0; 1]$, donc pour $x \in]0; 1]$, $g(x)$ . . $g(1)$, c'est-à-dire . .
   Finalement pour tout $x \in]0; 1]$, ...
   b. Reprendre cette démonstration pour $x \in [1; +\infty[$.
4. Démonstration algébrique.
   a. Montrer que pour tout x non nul, on a
   $$x^2 - \frac{1}{x} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x}.$$
   b. Montrer que $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ et en déduire le signe de $x^2 + x + 1$ pour tout réel x.
   c. Construire le tableau de signe de $x^2 - \frac{1}{x}$ sur $]-\infty; 0\,[\, \cup\,]0; +\infty[$ et conclure.

D'autres fonctions

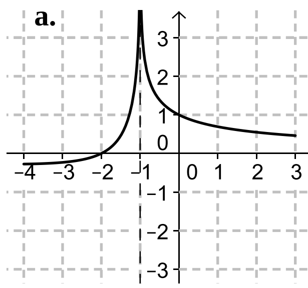
20 On souhaite construire le long d'un bâtiment une aire de jeu rectangulaire de 450 m². Celle-ci est entourée par une clôture sur trois côtés d'une allée de 3 m de large.
On souhaite de plus que les dimensions de l'aire de jeu soient supérieures ou égales à 10 m.
On recherche les dimensions de l'aire de jeu de façon que la longueur de la clôture soit la plus petit possible.

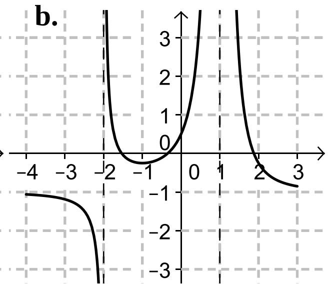


On nomme x et y les dimensions de l'aire de jeu (voir figure ci-dessus).
On note L la longueur de la clôture : $L = AB + BC + CD$.

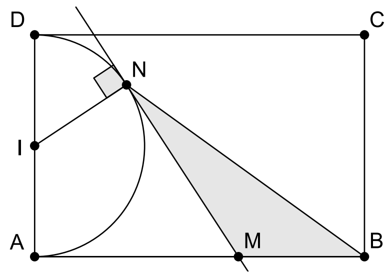
1. Exprimer x en fonction de y et en déduire que $10 \leq x \leq 45$.
2. Montrer que $L = 2x + 12 + \frac{450}{x}$.
3. Soit f la fonction définie sur $[10; 45]$ par
   $$f(x) = 2x + 12 + \frac{450}{x}.$$
   a. À l'aide la calculatrice conjecturer le tableau de variation de f.
   b. Vérifier que $f(x) - 72 = \frac{2(x-15)^2}{x}$.
   c. En déduire les dimensions à donner à l'aide de jeu pour la longueur de la clôture soit minimale. Que vaut alors cette longueur ?
   d. On souhaite prouver que la fonction f est décroissante sur $[10; 15]$ et croissante sur $[15; 45]$. Montrer que pour tous réels a et b non nuls
   $$f(b) - f(a) = \frac{2(b-a)(ab-225)}{ab}$$
   et conclure.

21 Construire le tableau de variation de chacune des fonctions suivantes définies sur $[-4; 3]$ et décrire les variations en une phrase.





22 On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 6$ et $AD = 4$.
À l'intérieur, on construit le demi-cercle de diamètre $[AD]$ sur lequel on place N un point libre.



La tangente en N au cercle (c'est-à-dire la perpendiculaire au rayon $[IN]$ du cercle passant par N) coupe $[AB]$ en un point M.
Étudier les variations de l'aire du triangle BMN en fonction de la distance AM.