Fonctions de référence

Nous allons étudier des fonctions qui généralisent les fonctions carré et inverse.

Partie I – Fonctions du second degré

1. Définition

Définition. *On appelle fonction du second degré toute fonction de la forme*

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

où a, b, c sont trois réels avec $a \neq 0$. Ceci est la forme développée de la fonction du second degré considérée.

Exemple

$x \mapsto x^2$, $x \mapsto -5x + x^2 - 1$ sont des fonctions du second degré, mais pas $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Définition. *La courbe représentative d'une fonction du second degré (c'est-à-dire toute courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$) s'appelle une parabole.*

2. Forme canonique

Il est bien clair qu'étant donné trois réels a, α, β la fonction $x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$ est une fonction du second degré, il suffit de développer pour s'en rendre compte : on obtient des x^2, des x et une constante.

Définition. *On appelle forme canonique une expression du second degré du type*

$$a(x-\alpha)^2 + \beta$$

où a, α et β sont des réels avec $a \neq 0$.

Exemple

Forme canonique	Forme développée	a	b	c	α	β
$(x-2)^2 - 1$	$x^2 - 4x + 3$	1	-4	3	2	-1
$2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{2}$	$2x^2 + 2x - 12$	2	2	-12	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{25}{2}$
x^2	x^2	1	0	0	0	0
$-x^2 - 1$	$-x^2 - 1$	-1	0	-1	0	-1

Une fonction du second degré écrite sous forme canonique est assez simple à étudier comme on le verra par la suite. Il serait donc intéressant de pouvoir mettre sous forme canonique toutes les fonctions du second degré. Le théorème suivant affirme que c'est possible.

Théorème (mise sous forme canonique). Toute fonction du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme

$$x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$$

où α et β sont deux réels. Plus précisément, on a $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Exemple

Soit $f: x \mapsto x^2 - 6x + 5$ et $g: x \mapsto 2x^2 + 4x + 3$.
Vérifier que les formes canoniques de ces fonctions sont

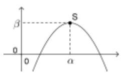
$$f(x) = (x-3)^2 - 4 \text{ et } g(x) = 2(x+1)^2 + 1.$$

Démonstration du théorème. On a en effet $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$ ce qui montre que $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{4ac-b^2}{4a}$ conviennent (on ne retiendra pas la valeur de β !). ■

Définition. *On appelle* <u>*sommet*</u> *de la parabole d'équation*

$$y = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

le point de coordonnées $(\alpha; \beta)$.



3. Factorisation et étude du sens de variation d'une fonction du second degré

Commençons par étudier un exemple.

Exemple

Soit $f: x \mapsto 2x^2 + 4x + 3$. La forme canonique est $2(x+1)^2 + 1$ d'après l'exemple précédent.
On se donne deux réels x et x' avec $x < x' \leq -1$. On a donc

$$x + 1 < x' + 1 \leq 0$$

et comme $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$ il vient

$$(x+1)^2 > (x'+1)^2$$

d'où en multipliant par 2, $2(x+1)^2 > 2(x'+1)^2$ puis enfin en ajoutant 1,

$$2(x+1)^2 + 1 > 2(x'+1)^2 + 1,$$

c'est-à-dire

$$f(x) > f(x').$$

Cela prouve que f est décroissante sur $]-\infty; -1]$. On montre de même que f est croissante sur $[-1; +\infty[$ en utilisant la croissance de $x \mapsto x^2$ sur $[0; +\infty[$.

Dans le cas général on a le résultat suivant, qu'en pratique on appliquera directement.

Théorème (sens de variation d'une fonction du second degré). Le sens de variation de la fonction $f: x \longmapsto ax^2 + bx + c$ dépend du signe de a. Soit $f: x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$ sa forme canonique.

Si $a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
variation de f		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Si $a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
variation de f		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Démonstration. On sait que toute fonction du second degré $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ s'écrit sous sa forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
Supposons $a > 0$.

Soit $x < x' \leq \alpha$. Il vient donc $x - \alpha < x' - \alpha \leq 0$ et comme $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$ on a

$$(x-\alpha)^2 > (x'-\alpha)^2.$$

On a donc $a(x-\alpha)^2 > a(x'-\alpha)^2$ puis $f(x) > f(x')$ en ajoutant β. Cela montre que f est décroissante sur $]-\infty; \alpha]$.
Pour $\alpha \leq x < x'$, on a $0 \leq x - \alpha < x' - \alpha$ et donc $(x-\alpha)^2 < (x'-\alpha)^2$. En multipliant par $a > 0$ puis en ajoutant β on conclut donc que $f(x) < f(x')$, ce qui traduit que f est croissante sur $[\alpha; +\infty[$.
Pour $a < 0$, les inégalités sont inversées puisque la multiplication par un nombre négatif d'une inégalité change son sens. ■

Exemple

Construire les tableaux de variations des fonctions

$$f: x \mapsto -3(x-2)^2 - 7 \text{ et } g: x \mapsto x^2 + x + 1$$

après avoir montré que $g(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

Réponse. La fonction f est déjà sous forme canonique, avec $a = -3 < 0$, $\alpha = 2$ et $\beta = -7$. La vérification demandé pour g est immédiate, les coefficients de sa forme canonique sont donc $a = 1 > 0$, $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{3}{4}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
variation de f	↗	-7	↘

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
variation de g	↘	$\frac{3}{4}$	↗

4. Étude du signe et factorisation d'une fonction du second degré

Si la forme canonique d'une fonction du second degré se présente comme une différence de deux carrés, on peut la factoriser grâce à l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ puis déterminer son signe par un tableau de signe. Dans l'autre cas, la forme canonique est une somme de deux carrés, le signe est alors constant (et on ne peut pas factoriser).

Exemple A

Construire les tableaux de signe des fonctions

$$f: x \mapsto x^2 - 6x + 5 \text{ et } g: x \mapsto 2x^2 + 4x + 3.$$

Réponse. On a

$$f(x) = (x-3)^2 - 4 = (x-3)^2 - 2^2 = (x-3-2)(x-3+2) = (x-5)(x-1),$$

ceci est la forme factorisée de f. On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
signe de $x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'autre part $g(x) = 2(x+1)^2 + 1$. Mais $2(x+1)^2 \geq 0$ puisque qu'un carré est positif, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 1$ donc g est strictement positive.

Partie II – Fonctions homographiques

1. Définitions

Définition. *Étant donné quatre réels a, b, c, d avec $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$, on appelle fonction homographique la fonction définie sur* $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ *par*

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Remarque.

- Si $c = 0$, on a une fonction affine que l'on sait déjà étudier.
- Le calcul de $\frac{ax+b}{cx+d}$ est impossible lorsque $cx + d = 0$, ce qui équivaut à $cx = -d$ ou encore $x = -\frac{d}{c}$, d'où l'ensemble de définition.
- Si $ad - bc = 0$, le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité, il existe donc un réel k tel que $a = kc$ et $b = kd$ et on a alors

a	b
c	d

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}, \qquad \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{kcx+kd}{cx+d} = \frac{k(cx+d)}{cx+d} = k,$$

et la fonction n'a pas d'intérêt puisqu'elle est constante sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Exemple

- La fonction $f : x \mapsto \frac{2-x}{3+4x}$ est homographique et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{4}\right\}$.
- La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est homographique et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^*$. C'est en cela que les fonctions homographiques généralisent la fonction inverse.
- La fonction $h : x \mapsto \frac{3x+2}{6x+4}$ n'est pas homographique car $h(x) = \frac{3x+2}{2(3x+2)} = \frac{1}{2}$.

2. Sens de variations des fonctions homographiques

Théorème. Le sens de variation de la fonction homographique $f : x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ dépend du signe de $ad - bc$.

- Si $ad - bc > 0$, alors h est croissante sur $\left]-\infty ; -\frac{d}{c}\right[$ et sur $\left]-\frac{d}{c} ; +\infty\right[$;
- Si $ad - bc < 0$, alors h est décroissante sur $\left]-\infty ; -\frac{d}{c}\right[$ et sur $\left]-\frac{d}{c} ; +\infty\right[$.

Si $ad - bc > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
variation de f	$\nearrow$		$\nearrow$

Si $ad - bc < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
variation de f	$\searrow$		$\searrow$

Démonstration. La démonstration de ce théorème est assez calculatoire. Il faut montrer l'identité

$$f(x') - f(x) = (ad - bc)\,\frac{x' - x}{(cx+d)(cx'+d)}$$

qui permet de conclure puisque $(cx+d)(cx'+d)>0$ pour x et x' appartenant simultanément à $\left]-\infty;-\frac{d}{c}\right[$ ou à $\left]-\frac{d}{c};+\infty\right[$. ■

Remarque. On voit apparaître naturellement dans ce théorème la quantité $ad-bc$ qui est supposée non nulle dans la définition d'une fonction homographique.

Exemple

Dresser le tableau de variation de la fonction $f: x \mapsto \frac{2x-5}{4+2x}$.

Réponse. La fonction est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ et $ad-bc=2\times(-4)-(-5)\times 4=12>0$, donc f est croissante sur $]-\infty;-2[$ et sur $]-2;+\infty[$.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
variation de f	$\nearrow$	‖	$\nearrow$