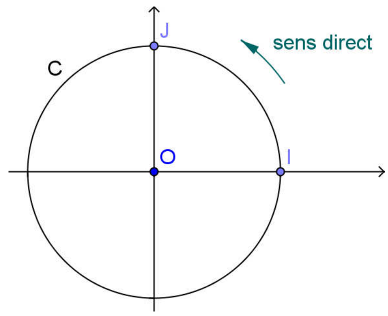
Trigonométrie

1. Enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique

❖ **Le cercle trigonométrique**

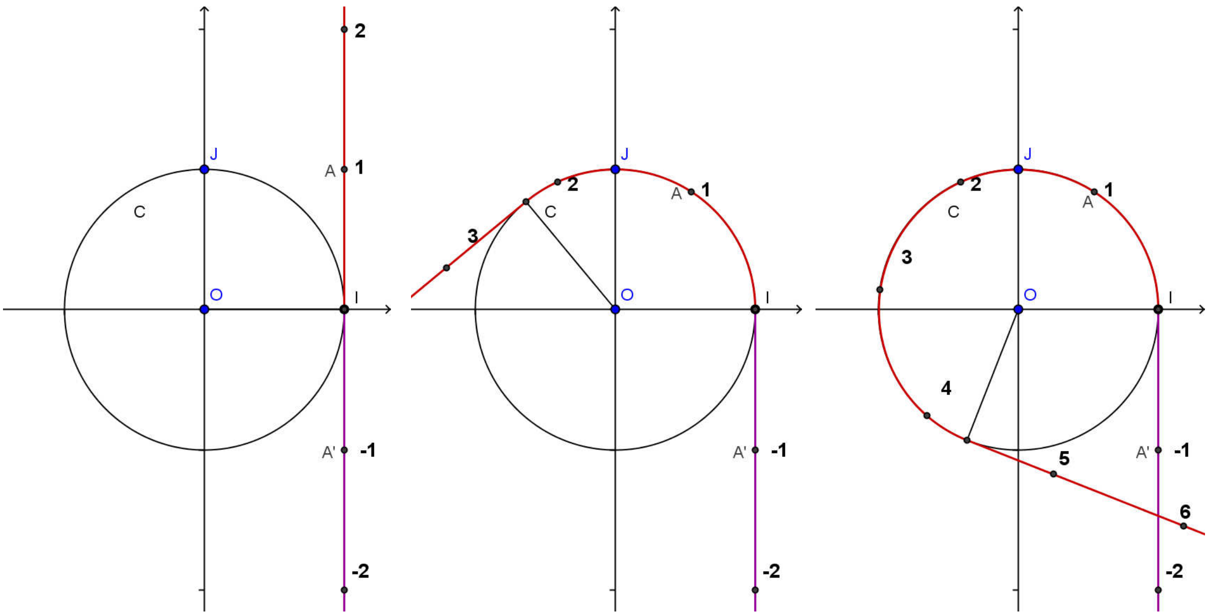


Définition. *Le plan est muni d'un repère orthonormé* $(O; I, J)$. *Le* *<u>cercle trigonométrique</u>* *est le cercle de centre* O, *de rayon* 1, *orienté dans le sens indiqué par la flèche (appelé sens direct), c'est-à-dire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.*

❖ **Principe de l'enroulement**

On trace la tangente en I au cercle trigonométrique C et on munit cette droite du repère (I, A) avec $IA = OI = 1$: elle représente la droite des réels.
On enroule cette droite des réels autour du cercle C : la demi-droite $[IA)$ s'enroule dans le sens direct et la demi-droite $[IA')$ s'enroule dans le sens indirect.

Propriété. *Tout point* N *d'abscisse* x *de la droite des réels vient se superposer à un point* $M(x)$ *du cercle* C, *et on associe ainsi à tout réel* x *un unique point* $M(x)$ *du cercle trigonométrique appelé* *<u>image</u>* *de* x *sur* C.
Réciproquement, tout point M *du cercle* C *est l'image d'un réel* x' ; *il est alors aussi l'image des réels* $x' + 2\pi, x' + 4\pi, \dots, x' - 2\pi, x' - 4\pi, \dots$ *On dit que* x' *est une* *<u>abscisse curviligne</u>* *de* M *ou encore que* x *<u>est associé</u>* *à* M.



Le début de l'enroulement de la demi-droite $[IA)$

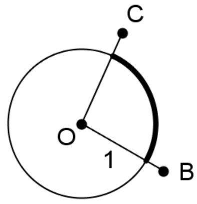
<u>Exemple</u>

Le nombre $\frac{\pi}{2}$ vient se superposer à J. En effet puisque le cercle trigonométrique a pour rayon 1, son périmètre vaut 2π et la longueur de l'arc IJ (un quart de cercle) vaut $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
Les autres nombres venant se superposer à J sont

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} - 4\pi = -\frac{7\pi}{2}, \dots$$

Remarque. Lorsque l'abscisse x du point N appartient à l'intervalle $[0; 2\pi[$, elle est égale à la longueur de l'arc de cercle d'origine I et d'extrémité le point $M(x)$.

Définition. *Le radian est l'unité de mesure des angles telle que la mesure en radian d'un angle est égale à la longueur de l'arc que cet angle intercepte sur un cercle de rayon 1.*



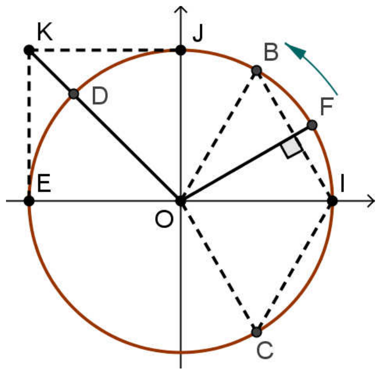
On a ainsi une nouvelle unité de mesure d'angle dans laquelle $180° = \pi$ rad puisque la longueur du demi-cercle trigonométrique est π.

Par proportionnalité, voici les valeurs à connaître.

Degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°
Radians	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad

Exemple

On considère le cercle trigonométrique. Les triangles OIB et OIC sont des triangles équilatéraux et $OJKE$ est un carré. La diagonale de ce carré coupe le cercle en D, la hauteur issue de O dans le rectangle OIB coupe le cercle en F.
Trouver un réel associé à chacun des points B, D, F et C du cercle par l'enroulement de la droite sur le cercle.



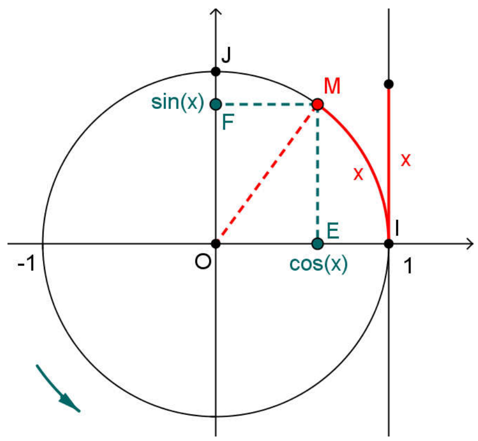
Réponse.

- Le triangle OIB est équilatéral, l'angle $\widehat{IOB}$ a une mesure de 60°. Or $60° = \frac{1}{3} \times 180°$, donc l'arc IB a pour longueur $\frac{1}{3} \times \pi = \frac{\pi}{3}$ ($\widehat{IOB} = \frac{\pi}{3}$ rad). Donc B a pour abscisse curviligne $\frac{\pi}{3}$.
- On a $\widehat{IOD} = \widehat{IOJ} + \widehat{JOD} = 90° + 45° = 135°$. Or $135° = \frac{3}{4} \times 180°$, donc la longueur de l'arc ID est $\frac{3\pi}{4}$. Le point D a pour abscisse curviligne $\frac{3\pi}{4}$.
- L'angle $\widehat{IOF}$ mesure 30°, donc l'arc IF a pour longueur la moitié de l'arc IB. Le point F a donc pour abscisse curviligne $\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.
- La longueur de l'arc IC est également $\frac{\pi}{3}$ mais puisqu'on tourne dans le sens indirect, le point C a pour abscisse curviligne $-\frac{\pi}{3}$, mais aussi $-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$.

2. Cosinus et sinus d'un nombre réel

On considère le cercle trigonométrique associé au repère $(O; I, J)$ et la droite des réels, tangente au cercle en I.

Définition. On considère un réel x et M le point d'abscisse curviligne x.
On appelle <u>cosinus</u> de x l'abscisse de M et <u>sinus</u> de x est l'ordonnée de M.



> **Théorème.**
> 1. Pour tout réel x, on a $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.
> 2. Pour tout réel x, on a $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.

Démonstration.

1. Cela provient simplement du fait que le cercle trigonométrique est de rayon 1 et que par conséquent l'abscisse et l'ordonnées de tout point situé sur ce cercle est comprise entre -1 et 1.
2. La distance OM vaut 1 puisque c'est le rayon du cercle trigonométrique. D'autre part les coordonnées de O sont (0 ;0) et celle de M sont $(\cos x\,;\sin x)$. Donc d'après la formule qui donne la distance entre deux points dans un repère orthonormé, on a $OM^2 = (\cos x - 0)^2 + (\sin x - 0)^2$, d'où le résultat. ■

Exemple

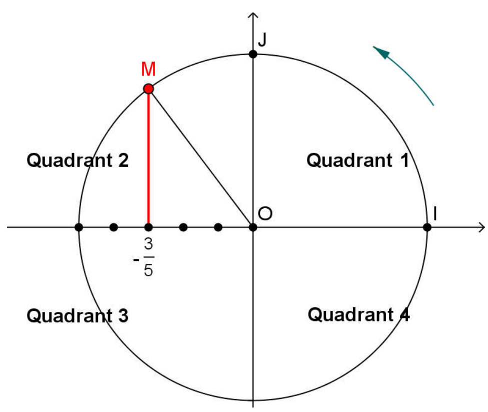
On considère un réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ tel que $\cos x = -\frac{3}{5}$.

1. Placer le point M d'abscisse curviligne x sur le cercle trigonométrique.
2. Calculer la valeur exacte de $\sin x$.

Réponse.

1. Puisque $x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, le point M appartient au deuxième quadrant.

   On place le point de coordonnées $\left(-\frac{3}{5}\,;0\right)$ puis on construit la perpendiculaire à (OI) passant par ce point. L'intersection de cette droite avec deuxième quadrant est M.
2. D'après le théorème, on a
$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1,$$
donc $(\sin x)^2 = 1 - (\cos x)^2$ puis
$$(\sin x)^2 = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)^2,$$
d'où l'on déduit que
$$\sin x = \frac{4}{5} \text{ ou } \sin x = -\frac{4}{5}.$$



Or comme M est situé dans le deuxième quadrant, on a $\sin x > 0$, donc $\sin x = \frac{4}{5}$.

❖ **Lien avec la trigonométrie du triangle rectangle**

Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, alors $\cos x > 0$ et $\sin x > 0$, donc $OE = \cos x$ et $OF = \sin x$ (avec les notations de la figure précédente).
Or dans le triangle rectangle OEM, on a

$$\cos \widehat{EOM} = \frac{OE}{OM} = \frac{OE}{1} = OE = \cos x$$

et

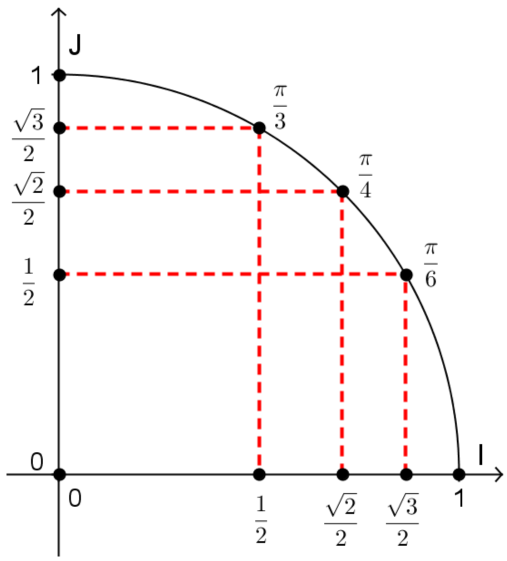
$$\sin \widehat{EOM} = \frac{EM}{OM} = \frac{OF}{OM} = \frac{OF}{1} = OF = \sin x.$$

Donc $\cos \widehat{IOM} = \cos x$ et $\sin \widehat{IOM} = \sin x$.

Les définitions du cosinus et du sinus d'un réel quelconque données dans ce chapitre sont cohérentes avec les définitions vues au collège du cosinus et du sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

❖ V**aleurs remarquables du sinus et cosinus**

À partir des valeurs remarquables inscrites sur le premier quadrant ci-dessous, on peut facilement calculer les valeurs cosinus et sinus des multiples de $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{6}$ par des considérations géométriques.



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Remarque. Les seules valeurs à retenir véritablement par cœur sont $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tout le reste se retrouve.