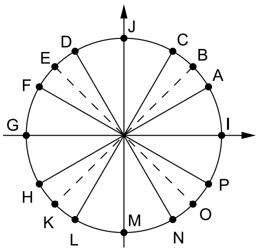
Trigonométrie – Exercices

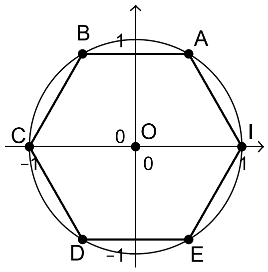
Enroulement de la droite numérique

1 On considère le cercle trigonométrique ci-contre.
Les segments en pointillé partagent le cercle en huit angles de 45° et les autres en douze angles de 120°.
Dans le tableau suivant, associer chacun des nombres à un point du cercle.



0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	-3π	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{6}$
I										

2 $IABCDE$ est un hexagone régulier. Donner les abscisses curvilignes des points I, A, B, C, D, E appartenant
a. à $[0;2\pi[$;
b. à $]-\pi;\pi]$.



3 On considère le cercle trigonométrique dans un repère de centre O.
1. Placer le point A associé au réel $\frac{\pi}{6}$.
2. Placer ses symétriques :
   a. A_1 par rapport à l'axe des ordonnées ;
   b. A_2 par rapport à l'axe des abscisses ;
   c. A_3 par rapport au point O.
3. Donner les abscisses curvilignes des points A_1, A_2, A_3 :
   a. appartenant à l'intervalle $[0;2\pi[$;
   b. appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

4 Montrer que les réels

$$\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \text{ et } -\frac{39\pi}{4}$$

sont trois abscisses curviligne d'un même point du cercle trigonométrique.

5 Pour chacun des réels suivants, déterminer l'unique réel de $]-\pi;\pi]$ associé au même point du cercle trigonométrique : $a=\frac{100\pi}{3}$; $b=2015\pi$; $c=\frac{41\pi}{4}$.

Cosinus et sinus d'un réel

6 Vrai ou faux ? Justifier.
a. Pour tout réel $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x\geq 0$.
b. Pour tout réel $x\in[0;\pi]$, $\sin x\geq 0$.
c. Pour tout réel $x\in[0;\pi]$, $\cos x\geq 0$.
d. Pour tout réel x, on a $0\leq\cos^2 x\leq 1$.
e. Il existe un réel tel que $\sin x=\frac{45}{\sqrt{2015}}$..
f. Il existe un réel x tel que $\sin 3x=3\sin x$.
g. Il n'existe pas de réel x tel que $\cos x=\sin x$.

7 Soit $x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ tel que $\cos x=\frac{1}{3}$. Calculer $\sin x$.

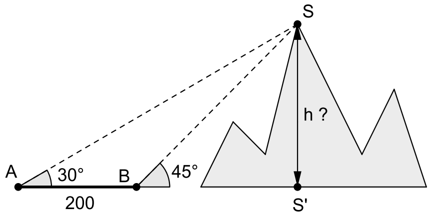
8 Résoudre l'équation $\cos x=\frac{1}{2}$ avec $x\in[0;2\pi]$.

9 Résoudre $\cos x=1$ avec $x\in\mathbb{R}$.

10 Montrer que chacune des affirmations suivantes est fausse à l'aide d'un contre-exemple.
a. Pour tout réel x,y tels que $x\leq y$ on a $\sin x\leq\sin y$.
b. Si $\cos x=\cos y$ alors $x=y$.
c. Pour tout réel x, $\cos 2x=2\cos x$.

11 On pose $A(x)=(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2$.
1. Calculer (sans calculatrice) $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $A\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
2. Quelle conjecture peut-on faire ? La démontrer.

12 On cherche à mesurer la hauteur d'une montagne. Pour cela on a fait un relevé du sommet S en des points A et B sous des angles respectifs de 30° et 45°. De plus A et B sont distants de 200 m.

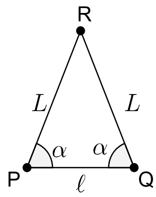


1. Démontrer que $SS'=BS'$ et $SS'=AS'\sqrt{3}$.
2. En déduire que $SS'=100\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Problème

Partie A – Calcul de cos 72°

1. Soit PQR un triangle isocèle en R. On note L la longueur commune des côtés PR et RQ, ℓ la longueur de PQ et α l'angle $\widehat{RPQ}=\widehat{PQR}$. Montrer que $\cos\alpha=\frac{\ell}{2L}$.



Soit ABC un triangle isocèle en A avec $\hat{B}=\hat{C}=72°$ et soit D l'intersection de la bissectrice de l'angle $\hat{B}$ avec le segment $[AC]$.

2. Démontrer que les triangles ABD et BCD sont isocèles et calculer leurs angles.
3. On pose $u=AD$ et $v=DC$. Démontrer
$$\cos(36°)=\frac{u+v}{2u},\ \cos(72°)=\frac{v}{2u},\ \cos(72°)=\frac{u}{2(u+v)}.$$
4. On pose $x=\cos(72°)$ et $y=\cos(36°)$. Montrer que
$$xy=\frac{1}{4} \text{ et } y-x=\frac{1}{2}.$$
5. Démontrer l'égalité $(x+y)^2=(y-x)^2+4xy$ pour tout réel x et y et en déduire que
$$x+y=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$
6. En résolvant un système, montrer finalement que
$$\cos(36°)=\frac{\sqrt{5}+1}{4} \text{ et } \cos(72°)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Partie B – Construction du pentagone régulier

C_1 est un cercle de centre O et de rayon 1 (une unité).
On trace deux diamètres perpendiculaires $[AK]$ et $[IJ]$. On appelle L le milieu de $[OK]$ et on trace le cercle C_2 de centre L passant par I, il coupe $[OA]$ en G.

7. Calculer le rayon de C_2 et en déduire OG.
8. La médiatrice de $[OG]$ coupe le cercle C_1 en B et E.
   Montrer que $\cos\left(\widehat{AOB}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et en déduire la valeur de $\widehat{AOB}$.
9. En déduire que AB est le côté d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle C_1.
   Finir la construction du pentagone en expliquant brièvement la méthode et en laissant apparent les traits de construction.