Systèmes et intersection de droites – Exercices

Droites parallèles, droites sécantes

1 Dans chacun des cas suivants, les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?

1. $d_1 : 2x - 3y + 1 = 0$ et $d_2 : -4x + 6y - 11 = 0$
2. $d_1 : 4x - 3 = 0$ et $d_2 : y = 4$
3. $d_1 : 4x - 5y = 0$ et $d_2 : y = x + 1$
4. $d_1 : y = 4x - 1$ et $d_2 : y = -3x + 8$
5. $d_1 : 3x + 9y - 3 = 0$ et $d_2 : y = 1 - 3x$
6. $d_1 : x = 5$ et $d_2 : 2x - 4 = 0$

2 Dans chacun des cas suivants, justifier que les droites d_1 et d_2 sont parallèles et préciser si elles sont confondues ou pas.

1. $d_1 : 4x - 2y + 3 = 0$ et $d_2 : 2x - y - 1 = 0$
2. $d_1 : y = 7$ et $d_2 : 5y - 1 = 0$
3. $d_1 : -x + y + 2 = 0$ et $d_2 : 2x - 2y - 4 = 0$

3 Vrai ou faux ? On considère les droites :

$d_1 : x = -3$ $\quad d_2 : x = -0{,}6$ $\quad d_3 : y = -3x + 4$
$d_4 : y = 3x + 4$ $\quad d_5 : y = -3x + 6$ $\quad d_6 : y = \frac{6x+8}{2}$

a. La droite d_1 est parallèle à l'axe des abscisses.
b. Les droites d_1 et d_3 sont parallèles.
c. La droite parallèle à la droite d_3 est d_5.
d. La droite d_1 est sécante aux cinq autres droites.
e. Les droites d_4 et d_6 n'ont pas de point commun.

4 Les points $A(-5; 2)$, $B(1; 1)$ et $C(8; 0)$ sont-ils alignés ? Et les points $D(-6; -6)$, $E(2; -3)$ et $F(50; 15)$?

5 Soit d la droite d'équation $y = ax + b$.

1. Calculer les coordonnées du point d'intersection de d avec l'axe des abscisses si $a \neq 0$.
2. Quel est le rôle de l'algorithme ci-contre ?

Variables :	a, b sont des réels
Entrée :	Saisir a, b
Traitement :	Si $a = 0$ alors
	Si $b = 0$ alors
	Afficher « droites confondues »
	Sinon Afficher « droites parallèles »
	Fin Si
	Sinon
	Afficher $-\frac{b}{a}$

Systèmes d'équations

6 On considère le système $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 8x + 5y = 3 \end{cases}$

Les couples $(7; 1)$ et $(6; -9)$ sont-ils des solutions ?

7 Le couple $(4; -2)$ est-il solution du système $\begin{cases} y = 6 - 2x \\ y = x - 6 \end{cases}$? Interpréter graphiquement.

8 Donner un système linéaire de deux équations à deux inconnues dont le couple $(-2; 3)$ est solution.

9 On considère le système $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

1. Interpréter graphiquement et résoudre graphiquement ce système.
2. Résoudre ce système par substitution.

10 On considère le système $\begin{cases} -4x + 3y = 10 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}$

1. Interpréter graphiquement et résoudre graphiquement ce système.
2. Résoudre ce système par combinaison.

11 Résoudre les systèmes d'équations suivants par la méthode la plus adaptée.

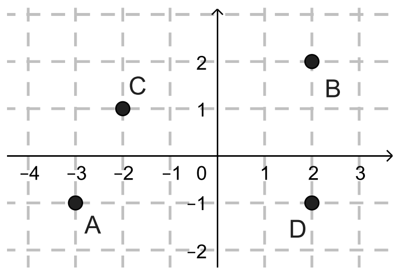
1. $\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ -3x + y = 5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ x - 4y = -6 \end{cases}$
4. $\begin{cases} -3x + 2y - 2 = 0 \\ 2x - 3y = -3 \end{cases}$

12 On considère les droites d_1 et d_2 d'équations respectives

$$2x - 3y - 2 = 0 \text{ et } x + 3y - 10 = 0.$$

1. Démontrer que ces droites sont sécantes.
2. Les représenter dans un repère.
3. Calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

13 On considère les points A, B, C, D dans le repère ci-dessous.



1. Donner les équations des droites (AB) et (CD) et tracer ces droites dans le repère.
2. Justifier que ces droites sont sécantes.
3. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection J des droites (AC) et (BD).

14 Soit $A(-6; 2)$, $B(6; 1)$, $C(6; -2)$ et $D(-5; -1)$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (AB) et (CD).

15 À la boulangerie, Tom achète deux croissants et quatre pains au chocolat pour 6,90 €. Dans la même boulangerie, Rose paie 4,10 € pour un pain au chocolat et trois croissants. Gaëlle veut acheter neuf croissants et sept pains au chocolat, combien va-t-elle payer ?

16 On considère les droites

- $d_1 : x - 4y + 15 = 0$
- $d_2 : 5x + 4y - 61 = 0$
- $d_3 : x + 2y - 19 = 0.$

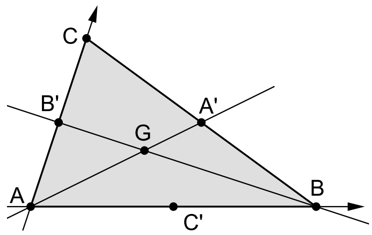
1. Tracer ces droites dans un même repère. Que conjecture-t-on ?
2. Calculer les coordonnées du point d'intersection I de d_1 et d_2.
3. Vérifier que I appartient à d_3. Conclure.

Application en géométrie

17 Soit $ABCD$ un parallélogramme, I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$ et $E = (DI) \cap (BJ)$. On se place dans le repère $(D; C, A)$.

1. Déterminer l'équation des droites (DI) et (BJ).
2. En déduire les coordonnées de E.
3. Montrer que A, E, C sont alignés.

18 Soit ABC un triangle et A', B', C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
Les trois (AA'), (BB') et (CC') s'appellent les médianes du triangle.



1. Calculer dans le repère $(A; B, C)$ les coordonnées des points A', B' et C'.
2. Déterminer les équations des droites (AA') et (BB').
3. Soit $G = (AA') \cap (BB')$.
   a. Déterminer les coordonnées de G.
   b. Montrer que $G \in (CC')$.
   c. Que peut-on en conclure sur les médianes de ABC ?

19 On se place dans un repère orthonormé et on considère les points $A(-6; -1)$, $B(14; 3)$ et $C(2; 7)$.

1. Construire une figure, que l'on complètera au fur et à mesure, en graduant l'axe des ordonnées de -5 à 18.

Partie A – Médiatrice du triangle
On note m_A, m_B et m_C les médiatrices respectives des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
Soit M un point de coordonnées $(x; y)$.

2. Montrer que $BM^2 = x^2 + y^2 - 28x - 6y + 205$ et calculer CM^2.
3. Montrer que M appartient à m_A si et seulement si
$$3x - y = 19.$$
4. Montrer de même que M appartient à m_B si et seulement si $x + y = 1$.
5. En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit O du triangle ABC, point d'intersection de m_A et m_B.
6. Tracer le cercle circonscrit au triangle ABC.
7. Démontrer que O appartient à m_C. Que peut-on dire des médiatrices de ce triangle ?

Partie B – Hauteur du triangle
On note h_A, h_B et h_C les hauteurs issues respectivement des sommets A, B et C

8. Rappeler la définition d'une hauteur.
9. Justifier que h_A et m_A sont parallèles, et en déduire que l'équation de la droite h_A est $3x - y + 17 = 0$.
10. Déterminer l'équation de la droite h_B.
11. Calculer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle, c'est-à-dire du point d'intersection de h_A et h_B.
12. Montrer que H appartient à h_C. Que peut-on dire des hauteurs de ce triangle ?

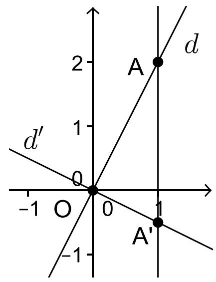
Partie C – Médiane d'un triangle
On note k_A, k_B et k_C les médianes issues des sommets A, B, et C du triangle ABC.

13. Rappeler la définition d'une médiane.
14. Démontrer que m_A a pour équation $3x - 7y + 11 = 0$.
15. Calculer les équations des droites m_B et m_C.
16. Montrer que les médianes sont concourantes un point G, appelé centre de gravité du triangle, dont on donnera les coordonnées.

Partie D – Relation d'Euler

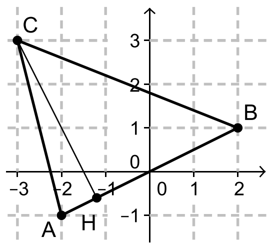
17. Montrer que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

20 **(Droites perpendiculaires).** On se place dans un repère orthonormé $(O; I, J)$. On considère deux droites d et d' d'équations respectives $y = mx$ et $y = m'x$. Soit A et A' les points de d et d' d'abscisse 1.



1. Quelles sont les coordonnées de A et A' ?
2. Montrer que OAA' est rectangle en O si et seulement si $mm' = -1$.
3. En déduire le théorème : « deux droites de coefficient directeur m et m' sont perpendiculaires si et seulement si $mm' = -1$ ».

21 Dans un repère orthonormé, on considère le triangle ABC ci-contre, on appelle H le pied de la hauteur issue de C.



1. Déterminer l'équation de la droite (AB).
2. À l'aide de l'exercice précédent, déterminer l'équation de la droite (CH).
3. Calculer les coordonnées de H.
4. En déduire l'aire de ABC.