

Les moyennes en mathématiques

1. Les diverses moyennes

❖ Moyenne arithmétique

1. Un élève a obtenu deux notes : 9 et 13. Quelle est sa moyenne ?

La **moyenne arithmétique** de deux réels a et b est $m = \frac{a+b}{2}$.

2. Un élève a obtenu cinq notes : 7, 12, 9, 7, 11. Une sixième note est prévue.

- a. Quelle doit être cette note pour avoir 10 de moyenne ? 11 de moyenne ?
b. Peut-il espérer avoir 12 de moyenne ?

3. Julien effectue un trajet à vélo de 2 heures. Il roule la première heure à une vitesse moyenne de 15 km/h puis la seconde heure à une vitesse moyenne de 19 km/h.

- a. Quelle distance a-t-il parcourue sur les 2 heures ? En déduire la vitesse moyenne sur le trajet total.
b. Plus généralement, si l'on effectue deux trajets ayant la même durée, l'un à une vitesse moyenne V_1 , l'autre à une vitesse moyenne V_2 , montrer que la vitesse moyenne V sur l'ensemble du trajet est la moyenne arithmétique de V_1 et V_2 .

❖ Moyenne harmonique

1. Julien, qui habite Carcassonne, décide l'aller à Bram à pied ; 20 km séparent les deux villes. Il couvre la distance à une vitesse de 4 km/h. Pour revenir à Carcassonne, il s'est fait prêter un vélo. Il effectue le trajet à une vitesse de 16 km/h.

- a. Quelle est la longueur totale du trajet ?
b. Calculer le temps de l'aller, puis le temps du retour.

- c. En déduire la vitesse moyenne sur l'aller-retour.

- d. La vitesse moyenne est-elle la moyenne arithmétique des deux vitesses ?

- e. Vérifier l'égalité : $\frac{1}{6,4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right)$.

La **moyenne harmonique** de deux réels a et b strictement positifs est le réel h défini par $\frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ ou $\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

La moyenne harmonique de deux réels est donc l'inverse de la moyenne arithmétique de leur inverse.

2. Plus généralement, soit un trajet de D km, effectué à l'aller à une vitesse V_1 et au retour à une vitesse V_2 .

Montrer que la vitesse sur l'aller-retour est donnée par la moyenne harmonique des deux vitesses V_1 et V_2 , et ne dépend pas de D .

3. Montrer que $h = \frac{2ab}{a+b}$.

❖ Moyenne géométrique

On considère un rectangle de côté 5 cm et 9,8 cm.

On veut construire un carré ayant la même aire que ce rectangle. Calculer la dimension d'un côté de ce carré.

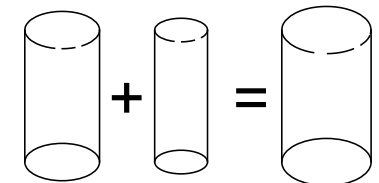
La **moyenne géométrique** de deux réels a et b positifs est le réel $g = \sqrt{ab}$.

Plus généralement, montrer que le côté d'un carré ayant la même aire qu'un rectangle de côté a et b est la moyenne géométrique de a et b .

❖ Moyenne quadratique

1. (Problème des cordes). On possède deux cordes, l'une de rayon 1,2 cm, l'autre de rayon 2 cm.

On se demande quel devrait être le rayon d'une corde qui offrirait la même



résistance que ces deux cordes, c'est-à-dire quel est le « rayon moyen » de ces cordes.

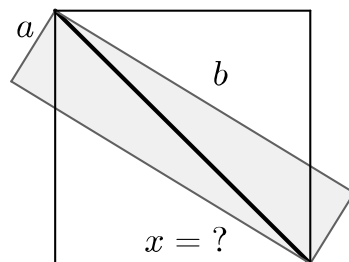
On conçoit que la résistance est proportionnelle à la section de la corde.

- a. Calculer la section de chacune des cordes et en déduire que le rayon R de la corde cherché est $\sqrt{2,72}$.

La **moyenne quadratique** de deux réels a et b est le réel

$$q = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

- b. Montrer plus généralement que le rayon moyen de deux cordes de rayon R_1 et R_2 est la moyenne quadratique de ces rayons.
2. On considère un rectangle de côté a et b et un carré de côté x .
- a. Quelle est la longueur des diagonales du rectangle et du carré ?
- b. En déduire x pour que le rectangle et le carré ait les diagonales de même longueur.
- c. Conclure en une phrase utilisant « moyenne quadratique ».



2. Comparaison des moyennes

Dans la suite on considère des réels a et b positifs avec $a \leq b$. Compléter le tableau suivant en arrondissant à 10^{-2} si nécessaire.

	a	1	2	6	40	0,001
	b	2	8	12	120	1000
Moyennes	géométrique g					
	harmonique h					
	arithmétique m					
	quadratique q					

Émettre une conjecture sur le classement des réels a, b, g, h, m, q .

❖ Encadrement des moyennes

Méthodes de comparaison de deux nombres

On se donne deux nombres x et y et on veut savoir lequel des deux est le plus grand. On calcule la différence $x - y$,

- si $x - y \geq 0$ alors . . .
- si $x - y \leq 0$ alors . . .

- a. On souhaite par exemple montrer que $a \leq m$. Compléter :

$$m - a = \frac{(\quad) - a}{2} = \frac{\quad}{2}.$$

Or $b - a \geq 0$ car . . . Finalement $m - a$. . . et donc . . .
Faire le même raisonnement pour prouver que $m \leq b$.

- b. Montrer que $h - a = \frac{a(b-a)}{a+b}$. Donner le signe de chacun des trois termes intervenants : a , $b - a$ et $a + b$. En déduire le signe de $h - a$ et enfin que $a \leq h$.
Démontrer de même que $h \leq b$.
- c. Calculer $g - a$. Quel problème rencontre-t-on pour étudier le signe ?

Méthodes de comparaison de deux nombres par leur carré

Il faut connaître la propriété suivante : deux réels positifs x et y sont classés dans le même ordre que leur carré.

Par exemple $\sqrt{7} < 3$ car $(\sqrt{7})^2 = 7$, $3^2 = 9$ et $7 < 9$.

Ainsi au lieu de comparer g et a , qui sont deux nombres positifs, on va comparer g^2 et a^2 .

Montrer que $g^2 - a^2 = a(b - a)$. En déduire le classement de g^2 et a^2 puis de g et a .

Déterminer par la même méthode le classement de g et b .

- d. Montrer que $q^2 - a^2 = \frac{(b-a)(b+a)}{2}$ et conclure sur le classement de q et a . Recommencer avec q et b .

Conclusion partielle : la moyenne de deux réels est toujours comprise entre ces deux réels.

❖ Comparaison des moyennes

- Montrer que $m - h = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$. En déduire que $m \geq h$.
- Montrer que $g^2 = mh$.
Ainsi la moyenne géométrique de deux réels est la moyenne géométrique de leur moyenne arithmétique et harmonique. Il en résulte donc d'après la partie précédente que $\dots \leq g \leq \dots$
- Montrer que $q^2 - m^2 = \frac{(a-b)^2}{4}$. En déduire que $q \geq m$.

Conclusion. On a le classement $a \leq \dots \leq \dots \leq \dots \leq \dots \leq b$.

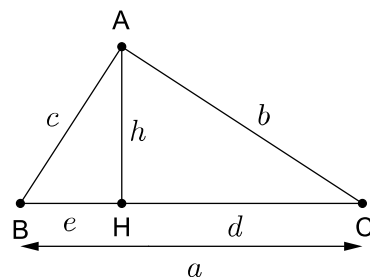
3. Interprétation géométrique des moyennes

❖ Un résultat de géométrie

Nous allons d'abord montrer deux formules dans un triangle rectangle.

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A .

Soit $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $d = CH$, $e = BH$ et $h = AH$.



Théorème. On a $h^2 = d \times e$ et $c^2 = a \times e$.

Les questions suivantes permettent de démontrer ce théorème.

- À l'aide du théorème de Pythagore dans les triangles ABH et ACH , justifier que l'on a $2h^2 = b^2 + c^2 - d^2 - e^2$.
- En déduire que $2h^2 = a^2 - d^2 - e^2$.
- En remarquant que $a = d + e$, conclure que $h^2 = de$.
- En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABH , montrer alors que $c^2 = a \times e$.

❖ Les quatre moyennes sur un seul dessin

Considérons un segment $[RS]$ de milieu A et G un point du segment $[AS]$.

On pose $a = GS$ et $b = GR$.

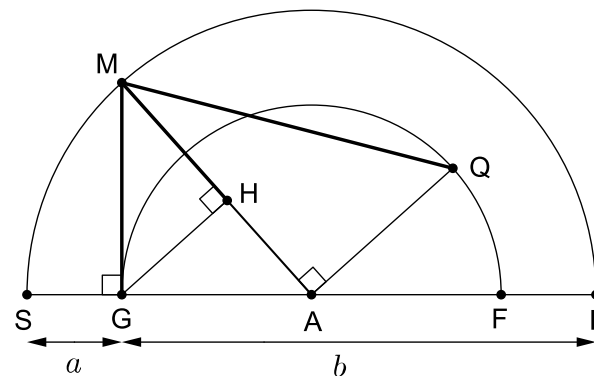
On trace

- le demi-cercle Γ de centre A passant par S ;
- le demi-cercle Γ' de centre A passant par G .

On construit les points suivants :

- M le point d'intersection de Γ avec la perpendiculaire à (RS) passant par G ;
- Q le point d'intersection de Γ' avec la perpendiculaire à (AM) passant par A ;
- H le point d'intersection de (AM) avec la perpendiculaire à (AM) passant par G .

À l'aide du théorème précédent, nous allons montrer que les longueurs MA , MG , MQ et MH sont respectivement les moyennes arithmétique, géométrique, quadratiques et harmoniques des longueurs a et b .



- Calculer MA en fonction de a et b .
- À l'aide du théorème, calculer MG en fonction de a et b .
- Montrer que le rayon de Γ' est $\frac{b-a}{2}$ et en déduire la longueur MQ .
- À l'aide du théorème, calculer MH en fonction de a et b .
- Justifier que $MH < MG < MA < MQ$ (indication : quel est le plus long côté d'un triangle rectangle ?).