Matrices

1 En Python, on considère la liste

`L=[[4,-2,3],[0,1],[1,7,9,8],[5],[]]`

1. Quelle est la longueur de `L` ? De `L[0]` ? De `L[4]` ?
2. Que vaut `L[1][0]` ? Et `L[2][1]` ?

1. Généralités

Définition. *Une matrice A, à n lignes et p colonnes, est un tableau rectangulaire de nombres. On note a_{ij} le nombre situé à l'intersection de la ligne i et la colonne j. On dit que la taille de matrice est $n \times p$. Notation « LICO ».*

<u>Exemple</u>

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. C'est une matrice à 3 lignes et 2 colonnes (de taille 3×2). On a par exemple $a_{11} = 2$, $a_{32} = 0$.
Cette matrice peut aussi se noter $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 2}}$.

Les matrices se rentrent aisément sur tous les modèles de calculatrices scientifiques.
Par exemple sur Texas Instruments (copie d'écran ci-contre), il faut utiliser la touche $\boxed{\text{matrice}}$.

Définitions (cas particuliers).
*Si $n = p$, on dit que la matrice est **carrée d'ordre** n ;*
*Si $n = 1$, on parle de **matrice ligne** ;*
*Si $p = 1$, on parle de **matrice colonne**.*

<u>Exemple</u>

Soit B la matrice définie par $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 4}}$ par $b_{ij} = i + 2j$. C'est une matrice à 2 lignes et 4 colonnes.
On a $b_{11} = 1 + 2 \times 1$, $b_{12} = 1 + 2 \times 2 = 5$, $b_{21} = 2 + 2 \times 1 = 4$, etc. Ainsi

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Définition. *Deux matrices sont <u>égales</u> s'ils elles sont la même taille et les mêmes éléments aux mêmes places.*

Définition. *On appelle <u>matrice nulle</u> toute matrice dont les éléments sont tous 0. Par exemple* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition. *On appelle* <u>*matrice identité*</u> *d'ordre* n *la matrice carrée d'ordre* n *dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale, égaux à 1. On la note* Id_n.
Ainsi $\mathrm{Id}_1 = (1)$, $\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Id}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *etc.*

2 Soit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3{,}3 & 7 \\ 8 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & x & 4 & 4 \\ 1 & -2 & y & z \\ a & 1{,}25 & t & 4-z \end{pmatrix}$$

1. Donner les dimensions des matrices A et B.
2. On pose $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. Donner

$$a_{11},\ a_{31},\ b_{33},\ b_{23},\ b_{32},\ b_{24} \text{ et } b_{42}.$$

3 On considère les deux matrices carrées d'ordre 4, $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ définies par $a_{ij} = i$ et $b_{ij} = i - j$.
Écrire entièrement ces matrices.

4 On considère les matrices de taille 3×4 : $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ définie par $a_{ij} = \max(i, j)$ et $b_{ij} = i \times j^2$.
Écrire entièrement ces matrices.

❖ Matrices en Python

Une matrice peut être vue comme la liste de ses lignes. Par exemple la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

s'écrira en Python

`A=[[2,-1],[-2,2],[3,0]]`.

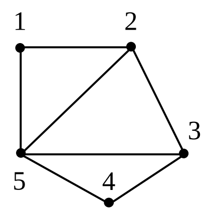
La difficulté est la numérotation des éléments d'une liste commence à 0, il y a un donc un décalage par rapport à l'usage en mathématiques. L'élément $a_{32} = 0$ s'obtiendra donc par `L[2][1]` (ligne numéro 2, colonne numéro 1).

5 La liste Python

`A=[[-2,1,3],[4,1,1],[5,0,-3],[7,2,-3]]`

représente-t-elle une matrice ?
Si oui, préciser sa taille.

6 Chaque matin, parmi cinq élèves d'une même classe, certains se serrent la main, et d'autres non, selon le schéma ci-contre. On définit la matrice A des poignées de mains comme suit : l'élément a_{ij} de A vaut 1 si l'élève i a serré la main de l'élève j et 0 sinon.



1. Donner la matrice A.
2. Justifier l'égalité $a_{ij} = a_{ji}$ valables pour tous i et j entre 1 et 5.

7 Donner la matrice A représentée par les instructions Python suivantes.

```
A=[[k]*5 for k in range(3)]
for k in range(3):
   A[k][k]=7
```

8 Créer les matrices suivantes par des programmes.

a. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

b. La matrice ligne $B = (1 \quad \dots \quad 1)$ avec 15 « 1 ».

c. La matrice colonne $C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ avec 15 « 1 ».

d. La matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ de taille 5×7.

e. La matrice identité de taille n, avec $n \geq 1$.

f. La matrice carrée de taille n, $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \cdots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & \cdots & 2n \end{pmatrix}$.

9 **(Carrés magiques)**

Un carré magique d'ordre n est composé de n^2 entiers strictement positifs, écrits sous la forme d'un tableau carré. Ces nombres sont disposés de sorte que leurs sommes sur chaque rangée, sur chaque colonne et sur chaque diagonale principale soient égales. On nomme alors constante magique la valeur de ces sommes.

Un carré magique normal est un cas particulier de carré magique, constitué de tous les nombres entiers de 0 à n^2, où n est l'ordre du carré.

1. Vérifier que les carrés suivants sont magiques et normaux.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

2. Soit M une matrice carré d'ordre n.

a. Écrire une fonction **sommes_lignes(M)** qui retourne une matrice contenant la somme de chaque ligne de M.

```
>>>
M=[[1,2,3],[4,5,6],[7,7,7]]
>>> sommes_lignes(M)
[6,15,21]
```

b. Écrire des fonctions **sommes_colonnes(M)**, **sommes_diag(M)** qui calculent la somme des colonnes, et des deux diagonales de M

```
>>>
M=[[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]
>>> sommes_diag(M)
[13,15]
```

3. Écrire une fonction **est_magique(M)** qui renvoie True si M est un carré magique, False sinon.

4. Écrire une fonction **est_magique_normal(M)** qui renvoie True si M est un carré magique normal, False sinon.

5. Soit n un entier impair. Voici un algorithme pour générer un carré magique d'ordre n.

- Mettre 1 au milieu de la première ligne.
- Pour k de 2 à n^2, mettre k dans le carré au-dessus à droite de $k-1$, en « défilant au-delà des bordures ». Si la case est déjà rempli, mettre k au-dessous de $k-1$ (on peut démontrer que cette case est forcément vide, nous l'admettons).

a. Vérifier que pour $n = 3$, on obtient le carré donné dans la question **1.**
b. Construire à la main le carré pour $n = 5$. Vérifier qu'il est magique.
c. Écrire une fonction **magique1(n)** qui prend en argument un entier n impair et qui renvoie le carré magique construit par ce procédé.

6. Soit n un entier impair et non multiple de 3. Voici un algorithme pour générer un carré magique d'ordre n (méthode du cavalier).

- On positionne 1 où l'on veut dans le carré.
- Pour k de 2 à $n-1$, avancer de 2 cases et descendre d'une case (en « débordant »).
- Reculer d'une case et placer n.
- Refaire le même processus de $n+1$ jusqu'à $2n-1$.
- Reculer de 1 pour placer $2n$.
- …

a. Donner le carré obtenu pour $n = 5$ en partant de la case en haut à gauche.
Vérifier que ce carré est magique et pandiagonal, c'est-à-dire que la somme est également constante sur toutes les diagonales en « débordant ».
b. Justifier que si l'on ajoute un même réel à tous les nombres d'un carré magique, le carré obtenu est encore magique.
c. Se convaincre que l'algorithme suivant génère un carré magique par la méthode du cavalier (avec les nombres 0 à n^2-1) en démarrant de la position (i, j).
Le programmer en Python.

```
T ← matrice carrée d'ordre n
Pour q de 0 à n
    Pour r de 0 à n − 1
        T[i][j] ← nq + r
        i ← (i + 1) mod n
        j ← (j + 2) mod n
    T[i][j] ← n + q(n − 1)
    j ← (j − 1) mod n
```

2. Opérations sur les matrices

❖ Addition de matrices

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de taille $n \times p$. On appelle somme des matrices A et B la matrice $C = (c_{ij})$ de taille $n \times p$ définie par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -3 \\ 2 & 1{,}2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. On a

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+0 & -1+1 \\ -2+7 & 2-3 \\ 3+2 & 0+1{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \\ 5 & 1{,}2 \end{pmatrix}.$$

En revanche $A + C$ n'existe pas.

Cette opération s'effectue simplement avec la touche + de la calculatrice.

Théorème. L'addition de matrices est associative, c'est-à-dire que l'on a

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

On peut donc noter $A + B + C$ sans risque de confusion sur l'ordre des additions.

❖ Produit d'une matrice par un réel

Soit k un réel et $A = (a_{ij})$ une de taille $n \times p$. On appelle produit de A par k, la matrice notée kA définie par $kA = (b_{ij})$ où $b_{ij} = k \times a_{ij}$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $-2A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -4 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$.

On définit la différence des matrices A et B, notée $A - B$, par $A - B = A + (-1) \times B$.

10 Soit $A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $3A$ et $-10A$.
2. Calculer $A + B$ et $B - 2A$
3. Existe-t-il un réel x tel que $xA = \mathrm{Id}_2$? Et un réel y tel que $xB = \mathrm{Id}_2$?

11 Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -6 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $2A - B$ et $4B - 3A$.
2. Déterminer deux matrices C et D telles que

$$C + D = A \text{ et } C - D = B.$$

❖ Produit de deux matrices

Soit
- $A = (a_{ij})$ une matrice de taille $n \times \boldsymbol{m}$;
- $B = (b_{ij})$ une matrice de taille $\boldsymbol{m} \times p$.

On appelle produit des matrices A par B la matrice $C = (c_{ij})$, noté AB, de taille $n \times p$ définie par

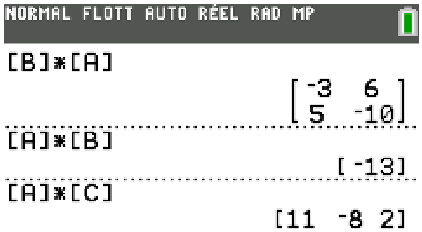
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Les tailles de ces matrices sont respectivement 1×2, 2×1 et 2×3.

- Puisque A a pour taille $1 \times \mathbf{2}$ et B a pour taille $\mathbf{2} \times 1$, la matrice produit AB a pour taille 1×1. Le calcul est facilité en adoptant la présentation suivante.

	$B = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$
$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$	$(3 \times (-1) + (-5) \times 2)$



  Ainsi $AB = (-13)$.
- Le produit de B (taille $2 \times \mathbf{1}$) par A (taille $\mathbf{1} \times 2$) est une matrice de taille 2×2.

	$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$
$B = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$	$BA = \begin{pmatrix} 3 \times (-1) & 3 \times 2 \\ -5 \times (-1) & -5 \times 2 \end{pmatrix}$

  Ainsi $BA = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}$.
  On notera que lorsque ces produits existent, on a en général $\boldsymbol{AB \neq BA}$.
- De même, on a $AC = \begin{pmatrix} -1 \times 3 + 2 \times 7 & -1 \times 4 + 2 \times (-2) & -1 \times 0 + 2 \times 1 \end{pmatrix}$, soit $AC = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 2 \end{pmatrix}$.
  En revanche le produit de C (taille $2 \times \mathbf{3}$) par A (taille $\mathbf{1} \times 2$) n'existe pas.
- Le produit de B par C ne peut pas être réalisé, ni C par B.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$. La matrice A a pour taille $4 \times \mathbf{2}$ et B a pour taille $\mathbf{2} \times 3$, donc AB a pour taille 4×3. En revanche on ne peut pas calculer BA.

	$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$	$AB = \begin{pmatrix} 1a + 2d & b + 2e & c + 2f \\ 4d & 4e & 4f \\ -2a + 3d & -2b + 3e & -2c + 3f \\ -a + 7d & -b + 7e & -c + 7f \end{pmatrix}$

Remarque. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$ et Id_n la matrice identité. Alors

$$A \times \mathrm{Id}_n = A \text{ et } \mathrm{Id}_n \times A = A.$$

Vérifions-le sur un exemple.

$$\mathrm{Id}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad A \times \mathrm{Id}_3 = \begin{pmatrix} 1 \times a + 0 \times b + 0 \times c & \ldots & \ldots \\ 1 \times d + 0 \times e + 0 \times f & \ldots & \ldots \\ 1 \times g + 0 \times h + 0 \times g & \ldots & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = A$$

La matrice identité est le « neutre » de la multiplication des matrices carrées. Elle joue le même rôle que 1 dans la multiplication des réels : pour tout réel a on a $1 \times a = a \times 1 = a$.

Théorème. La multiplication de matrice est associative, c'est-à-dire que l'on a

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

On peut donc noter ABC sans risque de confusion sur l'ordre des multiplications.

Théorème. Soit A, B, C trois matrices permettant de faire les opérations indiquées. Alors

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

Théorème. Soit A, B deux matrices permettant de faire les opérations indiquées et k un réel. Alors

$$A \times (kB) = (kA) \times B = k \times AB$$

12 Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Calculer AM.

13 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -7 & 9 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Calculer AM.

14 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Donner les dimensions de A et B.

2. Peut-on calculer AB ? BA ? Lorsque c'est le cas, effectuer le produit

15 On considère quatre matrices dont les tailles sont indiquées ci-dessous. Relier par une flèche de M **vers** N quand on peut faire le produit $M \times N$ (il y a donc 12 cas à analyser).

1×2 $\qquad\qquad$ 2×2

3×2 $\qquad\qquad$ 3×1

16 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB et AC.

2. Justifier que l'on ne peut pas calculer BA.

17 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Effectuer tous les produits possibles de deux matrices.

❖ **Puissances de matrices carrées**

Rappelons la définition des puissances des réels. Pour tout réel a et tout entier $n \geq 0$, on définit :

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}} \text{ si } n \geq 1 \\ a^0 = 1 \end{cases}$$

Par exemple $3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 3 \times 3 = 9$, $3^3 = 3^2 \times 3 = 9 \times 3 = 27$...

Comme le neutre de la multiplication des matrices carrée de taille n est la matrice identité Id_n, on définit de même pour tout matrice carrée de taille n et tout entier $n \geq 0$:

$$A^n = \begin{cases} \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ fois}} \text{ si } n \geq 1 \\ A^0 = \mathrm{Id}_n \end{cases}$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ puis

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

18 Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3.

19 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer A^2, A^3, A^4 et émettre une conjecture sur A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

20 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, A^3, A^4. Que penser de A^n pour $n \geq 4$?

21 Soit $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
1. Calculer D^2, D^3.
2. Conjecturer une formule pour D^n où n est un entier naturel.

22 Soit $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels.
1. Calculer (à la main) D^2 et D^3.
2. Conjecturer une formule pour D^n où n est un entier naturel.

3. Inverse d'une matrice carrée

Rappelons ce qu'il se passe pour les réels : étant un réel a, existe-t-il un réel b tel que $a \times b = 1$ et $b \times a = 1$? La réponse est oui, à condition que $a \neq 0$. Ce réel s'appelle inverse de a.
Par exemple, l'inverse de 5 est 0,2 car $5 \times 0{,}2 = 0{,}2 \times 5 = 1$. En revenant au produit de matrices carrées, cela revient à poser la définition suivante :

Définition. *Soit A une matrice carrée d'ordre n.*
S'il existe une matrice B carrée d'ordre n telle que $AB = BA = \mathrm{Id}_n$, on dit que A est ***inversible*** *et que B est un inverse de A.*

Exemple

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 13 & 17 & -11 \\ 6 & 8 & -5 \\ -8 & -11 & 7 \end{pmatrix}$.

Calculons AB et BA :

$$B = \begin{pmatrix} 13 & 17 & -11 \\ 6 & 8 & -5 \\ -8 & -11 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}; \quad AB = \begin{pmatrix} 1 \times 13 + 2 \times 6 + 3 \times (-8) & \dots & \dots \\ -2 \times 13 + 3 \times 6 - 1 \times (-8) & \dots & \dots \\ -2 \times 13 + 7 \times 6 + 2 \times (-8) & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 13 & 17 & -11 \\ 6 & 8 & -5 \\ -8 & -11 & 7 \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} 13 \times 1 + 17 \times (-2) - 11 \times (-2) & \dots & \dots \\ 6 \times 1 + 8 \times (-2) - 5 \times (-2) & \dots & \dots \\ -8 \times 1 - 11 \times (-2) + 7 \times (-2) & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate que $AB = \mathrm{Id}_3$ et $BA = \mathrm{Id}_3$. Donc A est inversible et B est un inverse de A.

Il existe des matrices qui n'ont pas d'inverse (tout comme 0 n'a pas d'inverse dans les réels), mais elles sont difficiles à détecter. On en verra une en exercice.

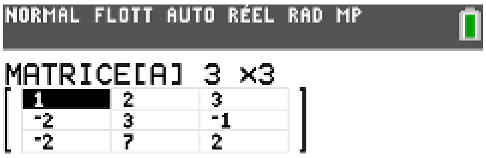
Théorème. Soit A une matrice carrée d'ordre n. Si elle est inversible, elle n'admet qu'un seul inverse.

Comme l'inverse d'une matrice A, quand il existe, est unique, on peut lui donner une notation sans craindre d'ambiguïté. On le notera A^{-1}.

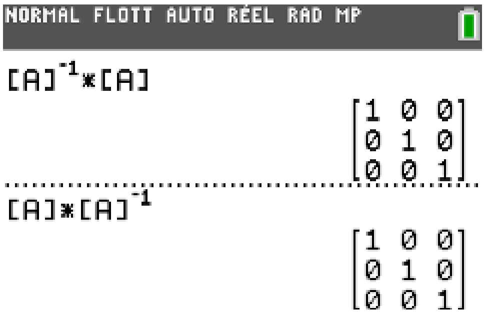
L'inverse d'une matrice carrée s'obtient sur la calculatrice, s'il existe, en tapant `^-1`.
Sur Texas Instruments, il faut **utiliser la touche** $\boxed{x^{-1}}$, située sous la touche $\boxed{\text{math}}$.

Exemple

Calculons l'inverse de la matrice A ci-dessus.



Vérifions :



Théorème. Soit A une matrice carrée d'ordre n.
S'il existe une matrice B telle que $AB = \mathrm{Id}_n$, alors $BA = \mathrm{Id}_n$.
S'il existe une matrice B telle que $BA = \mathrm{Id}_n$, alors $AB = \mathrm{Id}_n$.

En pratique, d'après ce théorème, pour démontrer que la matrice B est l'inverse de A, il suffit de donc d'effectuer **un seul calcul** : AB ou BA.

23 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

24 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer AB et en déduire A^{-1}.

25 Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$ à l'aide de la calculatrice.
Donner les valeurs exactes des coefficients.
Indication. Multiplier par 17 la réponse de la calculatrice.

26 Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ à l'aide de la calculatrice.

27 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -8 & 8 & -3 \\ 10 & -13 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.
Calculer AB et en déduire A^{-1}.

28 Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ à l'aide de la calculatrice.
Donner les valeurs exactes des coefficients.
Indication. Multiplier par 7 la réponse de la calculatrice.

29 Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ à l'aide de la calculatrice.

30 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On suppose que $ad - bc \neq 0$.

1. Montrer que $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

2. Application. Sans calculatrice, donner l'inverse de $B = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

31 Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

Supposons A inversible et notons $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ son inverse.

1. En calculant AB, montrer que $-3a + 2c = 1$ et $6a - 4c = 0$.

2. En déduire que A n'est pas inversible.

32 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice 3×3.

On appelle déterminant de A le réel

$$\Delta = aei + dhc + gbf - gec - ahf - dbi.$$

Pour le calculer facilement, il suffit de réécrire les deux premières lignes de A sous la matrice A, de remarquer que les 3 premiers termes de Δ sont les produits des diagonales « descendantes » et les 3 autres les produits des diagonales « montantes ».

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Vérifier que le déterminant de A est 13.

Calculer $13A^{-1}$ à la calculatrice. En déduire l'inverse de A avec les coefficients exprimés sous forme de fractions.

2. Déterminer de même les inverses des matrices

$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

33 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible, donner P^{-1} ainsi que $D = P^{-1}AP$.

2. En utilisant la définition de D, montrer que l'on a $D^2 = P^{-1}A^2P$.

3. Soit n un entier naturel. Conjecturer l'expression de D^n en fonction de P^{-1}, A, P et n.

4. Que vaut D^n en fonction de n ?

5. En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

4. Systèmes d'équations

Rappelons le principe de la résolution d'une équation comme $3x = 36$, où x une inconnue réelle. On multiplie de chaque côté l'inverse de 3, on obtient

$$\frac{1}{3} \times 3x = \frac{1}{3} \times 36, \text{ d'où } \left(\frac{1}{3} \times 3\right) x = 12 \text{ et enfin } 1x = 12$$

ce qui donne $x = 12$.

C'est cette idée qui nous guider dans la résolution des systèmes que l'on va écrire sous forme matricielle.

<u>Exemple</u>

Considérons le système suivant à trois inconnues :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -2x + 3y - z = 1 \\ -2x + 7y + 2z = 0 \end{cases}$$

Si l'on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x + 2y + 3z \\ -2x + 3y - 1z \\ -2x + 7y + 2z \end{pmatrix}$$

donc ce système s'écrit $AX = Y$.

Comme la matrice A est inversible (exemple précédent), en multipliant à gauche chaque membre de cette égalité par A^{-1}, on obtient : $A^{-1}AX = A^{-1}Y$. Comme $A^{-1}A = \mathrm{Id}_3$, cela donne $\mathrm{Id}_3\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{Y}$, ou encore $X = A^{-1}Y$ car $\mathrm{Id}_3 X = X$.

Ainsi :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 & -11 \\ 6 & 8 & -5 \\ -8 & -11 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 14 \\ -19 \end{pmatrix}.$$

Cela montre que la solution du système est $(x, y, z) = (30, 14, -19)$.

Vérification (facultative mais recommandée !).

- $30 + 2 \times 14 + 3 \times (-19) = 30 + 28 - 57 = 1$
- $-2 \times 30 + 3 \times 14 - (-19) = -60 + 42 + 19 = 1$
- $-2 \times 30 + 7 \times 14 + 2 \times (-19) = -60 + 98 - 38 = 0$

34 On considère le système $\begin{cases} 5x + 4y = 7 \\ 10x + 7y = 15 \end{cases}$.

1. Écrire ce système sous la forme $AX = Y$.
2. Résoudre le système.

35 Résoudre le système $\begin{cases} 2x + 4y - z = 1 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ x - 3y + z = 4 \end{cases}$ après l'avoir écrit sous forme $AX = Y$.

36 Résoudre le système $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - 3z = -8 \\ 4y + 5z = 23 \end{cases}$ après l'avoir écrit sous forme $AX = Y$.

37 Résoudre les systèmes suivants. On donnera les résultats sous forme de fractions.

a. $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 4x + 8y = 7 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} -3x + 7y = 2 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x + z = 1 \\ -2x + y + 3z = 1 \\ 4x + 5y - 21z = 0 \end{cases}$

38 Le responsable d'un club informatique souhaite acheter des souris, clés USB et tapis de souris.
— S'il achète 3 souris, 5 clés et 3 tapis, il paiera 132,10 €.
— S'il achète 6 souris, 4 clés et 5 tapis, il paiera 172,90 €.
— S'il achète 4 souris, 6 clés et 1 tapis, il paiera 118,90 €.
1. Traduire cet énoncé par un système.
2. Déterminer le prix de chaque article.

39 On a demandé aux 215 étudiants de BTS SIO d'une académie leur langage préféré parmi Java, Python, C et Delphi. Chaque étudiant devait fournir une seule réponse.
On sait que 163 étudiants ont déclaré préférer Java ou Python, 65 ont déclaré préférer Java ou C et 158 ont déclaré préférer Python ou C.
1. Traduire cet énoncé par un système de 4 équations à 4 inconnues.
2. Déterminer la répartition des préférences de langage.

40 Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(1;0)$, $B(-2;15)$ et $C(2;3)$. Déterminer l'équation d'une parabole passant par ces points.