

DIAGONALISATION DES MATRICES 2x2 EN TERMINALE S

Gilles AURIOL

auriolg@free.fr — <http://auriolg.free.fr>

1 Fonctions linéaires

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires (et donc non nuls) du plan. Le couple $(\vec{u}; \vec{v})$ s'appelle une base du plan. On l'appellera $\mathcal{B}$ dans la suite.

Elle possède la propriété suivante : tout vecteur $\vec{t}$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\vec{t} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

où x et y sont deux réels. On note alors $\vec{t} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ s'appellent les coordonnées (ou composantes) de $\vec{t}$. Bien sûr $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout point O du plan, un couple $(O; \mathcal{B})$ s'appelle un repère (affine) du plan d'origine O et de base $\mathcal{B}$. Dire que le point M a pour coordonnées $(x; y)$ dans ce repère signifie que $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Considérons une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et f la fonction qui au vecteur $\vec{t} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le vecteur $f(\vec{t})$ de coordonnées $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$. D'après la linéarité de l'addition des matrices, pour tous réels x, y, x', y' et λ :

$$A \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ et } A \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \lambda A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

ce qui traduit, pour tous vecteurs $\vec{t}$ et $\vec{t'}$ et tout réel λ ,

$$f(\vec{t} + \vec{t'}) = f(\vec{t}) + f(\vec{t'}) \text{ et } f(\lambda \vec{t}) = \lambda f(\vec{t}).$$

On dit que f est une fonction linéaire, comme la dérivation l'est sur l'ensemble des fonctions dérivables $((f + g)' = f' + g'$ et $(\lambda f)' = \lambda f'$).

Remarquons que $f(\vec{u})$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $f(\vec{v})$ celui de coordonnées $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. On a donc

$$f(\vec{t}) = (ax + by)\vec{u} + (cx + dy)\vec{v} = x(a\vec{u} + c\vec{v}) + y(b\vec{u} + d\vec{v}) = xf(\vec{u}) + yf(\vec{v}).$$

Cela prouve que f est entièrement déterminée par l'image des vecteurs de base $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Ce n'est pas pour rien que ce sont eux qui figurent dans les colonnes de A .

En particulier, si l'on est capable de trouver une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de vecteurs tels que

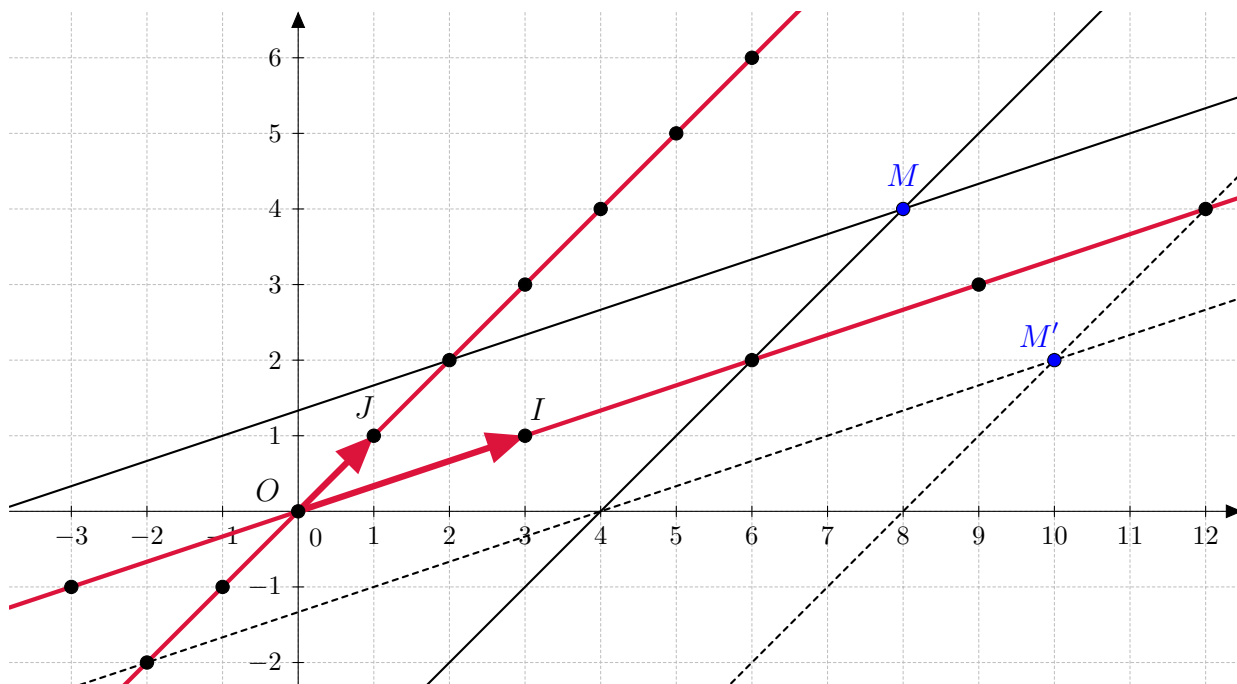
$$f(\vec{e}_1) = \lambda_1 \vec{e}_1 \text{ et } f(\vec{e}_2) = \lambda_2 \vec{e}_2$$

pour deux réels λ_1 et λ_2 , la matrice de f dans cette base sera $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Exemple. — Considérons la fonction f associée à matrice $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

On la visualise mieux avec les points en fixant une origine O : au vecteur $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, f associe $\overrightarrow{OM'}$ de coordonnées $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Par exemple, comme illustré sur la figure, au vecteur de coordonnées $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ correspond le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ de coordonnées $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 - 18 \\ 12 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$.



2 Recherche de vecteurs propres

Cherchons si f possède des « vecteurs propres », c'est-à-dire des vecteurs $\vec{t}$ non nuls colinéaires à leur image. S'ils existent, cela permettra de donner une forme plus simple à la fonction f .

Analyse. — Soit $\vec{t}$ un tel vecteur et λ tel que $f(\vec{t}) = \lambda \vec{t}$. Alors, en désignant par I la matrice identité,

$$f(\vec{t}) = \lambda \vec{t} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A - \lambda I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si la matrice $A - \lambda I$ est inversible, on en déduit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (A - \lambda I)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui est contraire à l'hypothèse $\vec{t} \neq \vec{0}$. Par conséquent $A - \lambda I$ est non inversible, ce qui implique que son déterminant est nul. Or

$$A - \lambda I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 - 2\lambda & -9 \\ 3 & -5 - 2\lambda \end{pmatrix}$$

donc son déterminant est

$$\frac{1}{2^2} ((7 - 2\lambda)(-5 - 2\lambda) + 18) = \frac{1}{4} (-35 - 14\lambda + 10\lambda + 4\lambda^2 + 27) = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

C'est un trinôme du second degré dont les racines sont 2 et -1 . Il s'appelle *polynôme caractéristique* de f (ou de A).

Synthèse. — S'il existe des vecteurs propres, les valeurs propres correspondantes ne peuvent être que 2 et -1 .

Cherchons s'il existe un vecteur non nul $\vec{t} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $f(\vec{t}) = 2\vec{t}$. On a

$$f(\vec{t}) = 2\vec{t} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -9y = -3x \\ 3x = 9y \end{cases} \Leftrightarrow x = 3y.$$

Ainsi $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de f (on pourrait prendre n'importe quel autre vecteur non nul colinéaire à $\vec{e}_1$).

De même

$$f(\vec{t}) = -\vec{t} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -9y = -9x \\ 3x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow x = y.$$

Ainsi $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de f .

Les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont visiblement non colinéaires, on peut donc considérer la base $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$. Dans cette base, puisque $f(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1$ et $f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2$, la fonction f est représentée par la matrice diagonale

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple (suite). — Le vecteur $\vec{OM}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$ est transformé en le vecteur $\vec{OM'}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3 Changement de base

Il reste à voir le lien qu'il existe entre les matrices A et A' .

Soit $\vec{t}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ et de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$. Alors

$$\vec{t} = x\vec{u} + y\vec{v} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2.$$

Mais $\vec{e}_1 = 3\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{e}_2 = \vec{u} + \vec{v}$, donc

$$\vec{t} = x'(3\vec{u} + \vec{v}) + y'(\vec{u} + \vec{v}) = (3x' + y')\vec{u} + (x' + y')\vec{v}.$$

Puisque $\mathcal{B}$ est une base, l'unicité des coordonnées donne $\begin{cases} x = 3x' + y' \\ y = x' + y' \end{cases}$. On peut écrire

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice P s'appelle *matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$* . Ses colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ exprimée dans la base $\mathcal{B}$. Elle est inversible puisque ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

Exemple (suite). — Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$ et ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $P \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

En multipliant par P^{-1} l'égalité précédente à gauche, on voit que réciproquement si $\vec{t}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$, ses coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$ sont données par

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}.$$

Ainsi P^{-1} est la *matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$* .

Utilisons ce qui précède pour déterminer une autre expression de la matrice A' qui représente f dans la base $\mathcal{B}'$. Soit $\vec{t}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$. Alors

- $\vec{t}$ a pour coordonnées $P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$,
- $f(\vec{t})$ a pour coordonnées $AP \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$,
- $f(\vec{t})$ a pour coordonnées $P^{-1}AP \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Mais par ailleurs $f(\vec{t})$ a aussi pour coordonnées $A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$. Ainsi, pour tous réels x' et y' on a $P^{-1}AP \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. En faisant $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on voit que les premières colonnes

des matrices $P^{-1}AP$ et A' sont égales, puis en prenant $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, les secondes colonnes. Ceci montre finalement que

$$\boxed{A' = P^{-1}AP}.$$

Cette égalité s'appelle la *formule du changement de base*.

La démonstration a été faite dans le cas particulier de la matrice $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, mais elle est vraie pour toute matrice A .

4 Application au calcul de puissance de matrices

Soit A une matrice carrée d'ordre n et soit P une matrice inversible d'ordre n . Posons $D = P^{-1}AP$. Il est immédiat par récurrence que l'on a $D^k = P^{-1}A^kP$ pour tout entier naturel k . En effet :

- la propriété est vraie pour $k = 0$ puisque $P^{-1}A^0P = P^{-1}I_nP = P^{-1}P = I = D^0$;
- Si la propriété est vraie pour un entier k alors

$$D^{k+1} = D^k D = (P^{-1}A^kP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^kP^{-1}PAP = P^{-1}A^kAP = P^{-1}A^{k+1}P.$$

Il en résulte immédiatement que

$$\boxed{A^k = PD^kP^{-1}}.$$

Cette propriété sera intéressante si les puissances de D sont facilement calculables, notamment si D est diagonale.

4.1 Cas des matrices diagonales

Soit $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ une matrice diagonale d'ordre n . Montrons par récurrence sur

$k \geq 0$ que

$$D^k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^k \end{pmatrix}$$

- Pour $k = 0$, c'est clair puisque $a_{kk}^0 = 1$ pour tout $0 \leq k \leq n$ et $D^0 = I_n$.
- Supposons la propriété vraie pour un entier k et notons $d_{ij}^{(k)}$ le terme de place (i, j) de la matrice D^k . La propriété à démontrer peut s'écrire $d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} a_{ij}^k & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Vu que $D^{k+1} = D \times D^k$, on a

$$d_{ij}^{(k+1)} = \sum_{p=1}^n a_{ip}d_{pj}^{(k)} = a_{ii}d_{ij}^{(k)},$$

la seconde égalité résultant du fait que $a_{ip} = 0$ si $p \neq i$. Maintenant il reste deux cas :

- ✓ soit $i \neq j$ et alors $d_{ij}^{(k)} = 0$ par hypothèse de récurrence, d'où $d_{ij}^{(k+1)} = 0$;
- ✓ soit $i = j$ et alors $d_{ij}^{(k+1)} = a_{ij} \times a_{ij}^k = a_{ij}^{(k+1)}$.

4.2 Cas des matrices diagonalisables

Exemple (suite). — On a vu que $D = P^{-1}AP$ où

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$, on obtient

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - (-1)^n & 3(-1)^n - 3 \cdot 2^n \\ 2^n - (-1)^n & 3(-1)^n - 2^n \end{pmatrix}.$$

5 Suites numériques « imbriquées »

5.1 Cas linéaire

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par u_0 et v_0 et liées par des relations de récurrence linéaires :

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases}$$

En posant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, ces relations peuvent s'écrire $X_{n+1} = AX_n$. On en déduit alors $X_n = A^n X_0$ et l'expression de u_n et v_n en fonction de n .

Exemple (suite). — Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ v_0 = 2 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{7u_n - 9v_n}{2} \\ v_{n+1} = \frac{3u_n - 5v_n}{2} \end{cases}$$

En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, on a $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = AX_n$, d'où

$$X_n = A^n X_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - (-1)^n & 3(-1)^n - 3 \cdot 2^n \\ 2^n - (-1)^n & 3(-1)^n - 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n + (-1)^n \\ 2^n + (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Il en résulte

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = 3 \cdot 2^n + (-1)^n \\ v_n = 2^n + (-1)^n \end{cases}$$

5.2 Cas affine

Considérons maintenant deux suites (u_n) et (v_n) définies par u_0 et v_0 et liées par des relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n + p \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n + q \end{cases}$$

En posant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, ces relations peuvent s'écrire

$$X_{n+1} = AX_n + B.$$

Supposons qu'il existe une matrice colonne C telle que $C = AC + B$. En soustrayant cette égalité à $X_{n+1} = AX_n + B$, on en déduit

$$X_{n+1} - C = A(X_n - C),$$

ce qui montre que la suite $(X_n - C)$ est géométrique de raison A . On en déduit que $X_n - C = A^n(X_0 - C)$, d'où

$$X_n = A^n(X_0 - C) + C.$$

Exemple (suite). — Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = -2 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{7u_n - 9v_n + 5}{2} \\ v_{n+1} = \frac{3u_n - 5v_n + 3}{2} \end{cases}$$

En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ on a $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = AX_n + B$.

Cherchons $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ telle que $C = AC + B$. Cela revient à résoudre

$$\begin{cases} 2x = 7x - 9y + 5 \\ 2y = 3x - 5y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 9y - 5 \\ 3x = 7y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x = 3(9y - 5) - 5(7y - 3) \\ 3x = 7y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

d'où $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis

$$\begin{aligned} X_n &= A^n(X_0 - C) + C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - (-1)^n & 3(-1)^n - 3 \cdot 2^n \\ 2^n - (-1)^n & 3(-1)^n - 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - (-1)^n - (3(-1)^n - 3 \cdot 2^n) - 1 \\ 2^n - (-1)^n - (3(-1)^n - 2^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{n+1} - 4(-1)^n - 1 \\ 2^{n+1} - 4(-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = 3 \cdot 2^{n+1} - 4(-1)^n - 1 \\ v_n = 2^{n+1} - 4(-1)^n \end{cases}$$

6 Suites numériques récurrentes à deux pas

Soit (u_n) une suite définie par u_0, u_1 et une relation de récurrence du type

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, on a

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ au_{n+1} + bu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = AX_n.$$

Par conséquent $X_n = A^n X_0$.

Exemple. — Sur une droite D munie d'un repère $(O; \vec{i})$, on considère la suite de point (A_n) ainsi définie :

- A_0 est le point O ;
- A_1 est le point d'abscisse 1 ;
- A_{n+2} est le milieu du segment $[A_n A_{n+1}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note u_n l'abscisse de A_n . Il est clair que $u_0 = 0, u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}$.

On a donc

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \frac{u_{n+1} + u_n}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2u_{n+1} \\ u_{n+1} + u_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix},$$

ce qui s'écrit $X_{n+1} = \frac{1}{2}AX_n$ en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit $X_n = \frac{1}{2^n}A^n X_0$.

Nous devons donc calculer A^n . Pour cela, cherchons les éventuelles valeurs propres λ de A . Elles sont telles que le déterminant de la matrice

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

soit nul. Celui-ci vaut

$$-\lambda(1 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1),$$

les valeurs propres sont 2 et -1 . Cherchons un vecteur propre pour 2 :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2y \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 2x \\ x + y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow x = y.$$

Ainsi $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour 2. Pour la valeur propre -1 , il vient

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2y \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -x \\ x + y = -y \end{cases} \Leftrightarrow x = -2y$$

et $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour -1 .

La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et son inverse vaut $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit, en posant $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, l'égalité $D = P^{-1}AP$, d'où $A = PDP^{-1}$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en effectuant les produits de droite à gauche,

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{2^n} P D^n P^{-1} X_0 = \frac{1}{3 \cdot 2^n} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3 \cdot 2^n} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \cdot 2^n} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \cdot 2^n} \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 2(-1)^n \\ 2^{n+1} + (-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 - 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

Cela montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$. Ici seule la première ligne sert, la seconde peut servir à confirmer le calcul. Puisque $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}$. La suite de points (A_n) « converge » vers le point d'abscisse $\frac{2}{3}$.

7 Trigonalisation

On a vu que la diagonalisation passait par la recherche des racines d'un trinôme du second degré (le polynôme caractéristique). Il se peut que ce trinôme n'ait qu'une seule racine et que l'ensemble des vecteurs propres ne permette pas de construire une base du plan. Dans ce cas la matrice ne peut pas être diagonalisée, mais seulement « trigonalisée ».

Exemple. — Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a muni le plan d'une base $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice A décrit une fonction f . La matrice $A - \lambda I$ vaut $\begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$ et son déterminant est

$$(3 - \lambda)(1 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

La seule valeur propre est 2. Cherchons les vecteurs propres :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x - y \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 2x \\ x + y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow x = y.$$

Ainsi $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour A . En prenant $\vec{e}_1$ pour premier vecteur de la nouvelle $\mathcal{B}'$,

comme $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$, la matrice A' de f dans $\mathcal{B}'$ s'écrira $A' = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, où a et b sont deux réels.

Adjoignons à $\vec{e}_1$ un vecteur arbitraire quelconque $\vec{e}_2$ qui ne lui est pas colinéaire de façon à ce que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ constitue une base $\mathcal{B}'$. Prenons un vecteur simple, par exemple : $\vec{e}_2 = \vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il reste à trouver a et b . Par définition de $\vec{e}_1$, on a $\vec{e}_1 = \vec{u} + \vec{v}$. Grâce à la matrice A , on a

$$f(\vec{e}_2) = f(\vec{v}) = -\vec{u} + \vec{v}.$$

et grâce à la matrice A' ,

$$f(\vec{e}_2) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = a(\vec{u} + \vec{v}) + b\vec{v} = a\vec{u} + (a+b)\vec{v}.$$

Comme $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan, ces deux expressions de $f(\vec{e}_2)$ conduisent aux égalités $a = -1$ et $a + b = 1$, d'où $b = 2$. Finalement, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

avec comme matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (on la nomme T plutôt que A' pour la suite).

Les puissances d'une telle matrice T se calculent bien. Vous pourrez montrer par récurrence que $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & -n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & -n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Il vient alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = PT^nP^{-1} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -n \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} n+2 & -n \\ n & 2-n \end{pmatrix}.$$

Pour terminer, appliquons cela aux suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = -2 \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

La formule $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = 2^{n-1}(3n+2) \\ v_n = 2^{n-1}(3n-4) \end{cases}$$

8 Cas du polynôme caractéristique à discriminant négatif

Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -u_n - v_n \\ v_{n+1} = 5u_n + 3v_n \end{cases}$$

En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, on a $X_n = A^n X_0$.

Le polynôme caractéristique de A est

$$(-1 - \lambda)(3 - \lambda) + 5 = \lambda^2 - 2\lambda + 2,$$

et ses racines sont $1 - i$ et $1 + i$. La matrice A n'admet donc pas de valeurs propres réelles, qu'à cela ne tienne, continuons les calculs dans les complexes ! Un vecteur propre $\vec{t} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pour $1 - i$ vérifie

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 + i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = (1 + i)x \\ 5x + 3y = (1 + i)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2 - i)x = y \\ 5x = (-2 + i)y \end{cases}$$

En multipliant l'équation $(-2 - i)x = y$ par $-2 + i$, on obtient $5x = (-2 + i)y$, c'est-à-dire la seconde équation. Finalement

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 + i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = (-2 - i)x.$$

Cela montre que $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} -2 + i \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la valeur propre $1 + i$.

On laisse le soin au lecteur de montrer que $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} -2 - i \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la valeur propre $1 - i$. Ainsi $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -2 + i & -2 - i \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 + i & 0 \\ 0 & 1 - i \end{pmatrix}.$$

Les nombres complexes $1 + i$ et $1 - i$ sont d'argument $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$, On songe donc à les élever à la puissance 4 :

$$(1 + i)^4 = (2i)^4 = -4 \text{ et } (1 - i)^4 = (-2i)^2 = -4,$$

ce qui montre que $D^4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I$ puis $A^4 = PD^4P^{-1} = PP^{-1} = I$. On aurait pu le constater sur l'expression de A , mais encore fallait-il avoir l'intuition ! Le calcul des vecteurs propres (et donc de P) était inutile puisque $PP^{-1} = I$.

Cela montre que $X_{n+4} = A^{n+4}X_0 = A^n A^4 X_0 = -4A^n X_0 = -4X_n$. Les suites (u_n) et (v_n) vérifient donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+4} = -4u_n, v_{n+4} = -4v_n.$$

On est en mesure d'exprimer X_n en fonction de n . Soit n un entier que l'on écrit $n = 4k + r$ avec $r \in \{0; 1; 2; 3\}$.

$$X_n = X_{4k+r} = A^{4k+r}X_0 = (A^4)^k A^r X_0 = (-4)^k A^r X_0 = (-4)^k X_r = \begin{pmatrix} (-4)^k u_r \\ (-4)^k v_r \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$u_n = \begin{cases} (-4)^k u_0 & \text{si } r = 0 \\ (-4)^k u_1 & \text{si } r = 1 \\ (-4)^k u_2 & \text{si } r = 2 \\ (-4)^k u_3 & \text{si } r = 3 \end{cases} \text{ et } v_n = \begin{cases} (-4)^k v_0 & \text{si } r = 0 \\ (-4)^k v_1 & \text{si } r = 1 \\ (-4)^k v_2 & \text{si } r = 2 \\ (-4)^k v_3 & \text{si } r = 3 \end{cases}$$

Si l'on préfère tout exprimer en fonction de u_0 et v_0 , il suffit de calculer u_1 , u_2 et u_3 en fonction des termes initiaux à l'aide de $A^2 = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$:

$$u_n = \begin{cases} (-4)^k u_0 & \text{si } r = 0 \\ -(-4)^k (u_0 + v_0) & \text{si } r = 1 \\ -2(-4)^k (2u_0 + v_0) & \text{si } r = 2 \\ -2(-4)^k (3u_0 + v_0) & \text{si } r = 3 \end{cases} \quad \text{et } v_n = \begin{cases} (-4)^k v_0 & \text{si } r = 0 \\ (-4)^k (5u_0 + 3v_0) & \text{si } r = 1 \\ 2(-4)^k (5u_0 + 2v_0) & \text{si } r = 2 \\ 2(-4)^k (5u_0 + v_0) & \text{si } r = 3 \end{cases}$$