Puissance de matrice – Exercices

Puissance de matrices

1 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 puis montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^{2k} = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$ et $A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{k+1} \\ 2^k & 0 \end{pmatrix}$.

2 Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $A^n = \begin{pmatrix} 4 - 3^{n+1} & 2 \cdot 3^n - 2 \\ 6 - 2 \cdot 3^{n+1} & 4 \cdot 3^n - 3 \end{pmatrix}$.

3 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
1. Montrer que P est inversible, calculer P^{-1} ainsi que $D = P^{-1}AP$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $D^n = P^{-1}A^nP$.
3. En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

4 On considère la suite (u_n) définie par
$$u_0 = 0,\ u_1 = 3 \text{ et } u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n.$$
On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.
1. Donner la matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout entier naturel n.
2. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire que
$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 + (-2)^n & 1 - (-2)^n \\ 2 - 2(-2)^n & 1 + 2(-2)^n \end{pmatrix}.$$
3. Exprimer alors u_n en fonction de n.

5 On considère la suite (u_n) définie par
$$u_0 = 5,\ u_1 = 6 \text{ et } u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n.$$
On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.
1. Donner la matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout entier naturel n.
2. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $T = P^{-1}AP$.
3. Montrer par récurrence que $T^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Matrice vérifiant $U_{n+1} = AU_n$

6 *(2017, Pondichéry).* On définit les suites (u_n) et (v_n) par :
$$u_0 = v_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$
On admettra que les termes de ces suites sont des entiers naturels non nuls.

Partie A – Conjectures

Flore a calculé les premiers termes des suites à l'aide d'un tableur. Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	1	1	1
3	1	5	3
4	2	19	13
5	3	77	51
6	4	307	205

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des suites ?
2. Soit n un entier naturel. Conjecturer la valeur de $\text{PGCD}(u_n; v_n)$. Aucune justification n'est demandée.
3. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Flore obtient les résultats suivants :

12	10	1 258 291	838 861
13	11	5 033 165	3 355 443
14	12	20 132 659	13 421 773
15	13	80 530 637	53 687 091

Elle émet la conjecture : « la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge ».

Qu'en penser?

Partie B – Étude arithmétique
1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$.
2. Soit n un entier naturel. Déduire de la question précédente la valeur de $\text{PGCD}(u_n; v_n)$.

Partie C – Étude matricielle

Pour tout entier naturel n, on définit les matrices
$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } Q_n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix}.$$
1. **a.** Montrer que l'inverse de P et $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   b. On admet que, pour tout entier naturel n, on a
   $$X_n = Q_nP^{-1}X_0.$$
   Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a
   $$u_n = \frac{(-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}}{5} \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n + 2^{2n+2}}{5}.$$
2. **a.** Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a
   $$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3}{\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} + 2}.$$
   b. En déduire la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

7 *(2016, Amérique du Nord).* On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.

On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du n-ième tirage.
1. **a.** Traduire par une phrase la probabilité
   $$P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1)$$
   puis déterminer les probabilités conditionnelles :
   $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1)$, $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1)$, et $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1)$
   b. Exprimer $P(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n la matrice ligne définie par
   $$R_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) & P(X_n = 1) & P(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

et on considère M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note R_0 la matrice ligne $(0 \quad 0 \quad 1)$.

On admettra par la suite que, pour tout entier naturel n, $R^{n+1} = R_n \times M$.

Déterminer R_1 et justifier que, pour tout entier naturel n, $R_n = R_0 \times M^n$.

3. On admet que $M = PDP^{-1}$ avec :

$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Établir que, pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP^{-1}$.

4. **a.** Calculer D^nP^{-1} en fonction de n.

b. Sachant que $R_0P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, déterminer les coefficients de R_n en fonction de n.

5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 1)$ ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 2)$.

Interpréter ces résultats.

8 *(2016, Nouvelle-Calédonie).* On observe la taille d'une colonie de fourmis tous les jours.

Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le nombre de fourmis, exprimé en milliers, dans cette population au bout du n-ième jour.

Au début de l'étude la colonie compte 5000 fourmis et au bout d'un jour elle compte 5100 fourmis. Ainsi, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = 5{,}1$.

On suppose que l'accroissement de la taille de la colonie d'un jour sur l'autre diminue de 10 % chaque jour.

En d'autres termes. pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} - u_{n+1} = 0{,}9(u_{n+1} - u_n).$$

1. Démontrer, dans ces conditions, que $u_2 = 5{,}19$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1{,}9 & -0{,}9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = AV_n$.

On admet alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^nV_0$.

b. On pose $P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On admet que la matrice P est inversible. À l'aide de la calculatrice, déterminer la matrice P^{-1}.

En détaillant les calculs, déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.

Pour tout entier naturel n, on admet que

$$A^n = \begin{pmatrix} -10 \times 0{,}9^{n+1} + 10 & 10 \times 0{,}9^{n+1} - 9 \\ -10 \times 0{,}9^n + 10 & 10 \times 0{,}9^n - 9 \end{pmatrix}.$$

d. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6 - 0{,}9^n$.

3. Calculer la taille de la colonie au bout du 10e jour. On arrondira le résultat à une fourmi près.

4. Calculer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat dans le contexte.

9 *(2017, Nouvelle-Calédonie).* Dans un territoire donné, on s'intéresse à l'évolution couplée de deux espèces : les buses (les prédateurs) et les campagnols (les proies).

Des scientifiques modélisent, pour tout entier naturel n, cette évolution par :

$$\begin{cases} b_0 = 1000 \\ c_0 = 1500 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} b_{n+1} = 0{,}3b_n + 0{,}5c_n \\ c_{n+1} = -0{,}5b_n + 1{,}3c_n \end{cases}$$

où b_n représente approximativement le nombre de buses et c_n le nombre approximatif de campagnols le 1er juin de l'année $2000 + n$ (où n désigne un entier naturel).

1. On note A la matrice $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 1{,}3 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 1050 \\ 1450 \end{pmatrix}$ et calculer U_2.

b. Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a $U_{n+1} = AU_n$.

2. On donne les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On admet que P a pour inverse une matrice Q de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

a. Déterminer la valeur de a en justifiant.

b. On admet que $A = PTQ$. Démontrer que, pour tout entier n non nul, on a $A^n = PT^nQ$.

c. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier n non nul,

$$T^n = \begin{pmatrix} 0{,}8^n & 0{,}5n \times 0{,}8^{n-1} \\ 0 & 0{,}8^n \end{pmatrix}.$$

3. Lucie exécute l'algorithme ci-dessous et obtient en sortie $N = 40$.

Quelle conclusion Lucie peut-elle énoncer pour les buses et les campagnols ?

```
N ← 0
B ← 1000
C ← 1500
Tant que B > 2 ou C > 2
    N ← N + 1
    R ← B
    B ← 0,3R + 0,5C
    C ← −0,5R + 1,3C
Fin Tant Que
Renvoyer N
```

4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$U_n = \begin{pmatrix} 1000 \times 0{,}8^n + \dfrac{625}{2} n \times 0{,}8^n \\ 1500 \times 0{,}8^n + \dfrac{625}{2} n \times 0{,}8^n \end{pmatrix}.$$

Et $n \leq 10 \times 1{,}1^n$.

a. En déduire les limites des suites (b_n) et (c_n).

b. Des mesures effectuées dans des territoires comparables montrent que la population de campagnols reste toujours supérieure à au moins 50 individus.

À la lumière de ces informations, le modèle proposé dans l'exercice vous paraît-il cohérent ?

Remarque. *Ici la matrice A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice triangulaire T, de la forme $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$. La difficulté réside alors dans le calcul de T^n. On peut toujours exprimer les coefficients de T^n explicitement en fonction de n dans ce cas.*

10 *(2017, Asie).* Un bit est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.

Partie A – Ligne de transmission

Une ligne de transmission transporte des bits de données selon le modèle suivant :

- elle transmet le bit de façon correcte avec une probabilité p ;
- elle transmet le bit de façon erronée (en changeant le 1 en 0 ou le 0 en 1) avec une probabilité $1-p$.

On assemble bout à bout plusieurs lignes de ce type, et on suppose qu'elles introduisent des erreurs de façon indépendante les unes des autres.

On étudie la transmission d'un seul bit, ayant pour valeur 1 au début de la transmission.

Après avoir traversé n lignes de transmission, on note :

- p_n la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 1 ;
- q_n la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0.

On a donc $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix},\ X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On admet que, pour tout entier n, on a : $X_{n+1} = AX_n$ et donc $X_n = A^n X_0$.

1. a. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   b. On pose : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$.
   Vérifier que $A = PDP^{-1}$.
   c. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   d. En vous appuyant sur la copie d'écran d'un logiciel de calcul formel donnée ci-dessous, déterminer l'expression de q_n en fonction de n.

1	X0 := [[1], [0]]
	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
2	P := [[1, 1], [1, −1]]
	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
3	D := [[1, 0], [0,2*p-1]]
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{bmatrix}$
4	P * D^n * P^(-1) * X0
	$\begin{bmatrix} \frac{(2p-1)^n+1}{2} \\ \frac{-(2p-1)^n+1}{2} \end{bmatrix}$

2. On suppose dans cette question que p vaut 0,98. On rappelle que le bit avant transmission a pour valeur 1. On souhaite que la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0 soit inférieure ou égale à 0,25. Combien peut-on, au maximum, aligner de telles lignes de transmission ?

Partie B – Étude d'un code correcteur, le code de Hamming (7, 4)

On rappelle qu'un bit est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.

On considère un « mot » formé de 4 bits que l'on note b_1, b_2, b_3 et b_4.

Par exemple, pour le mot « 1101 », on a $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$ et $b_4 = 1$.

On ajoute à cette liste une clé de contrôle $c_1c_2c_3$ formée de trois bits :

- c_1 est le reste de la division euclidienne de $b_2 + b_3 + b_4$ par 2 ;
- c_2 est le reste de la division euclidienne de $b_1 + b_3 + b_4$ par 2 ;
- c_3 est le reste de la division euclidienne de $b_1 + b_2 + b_4$ par 2 ;

On appelle alors « message » la suite de 7 bits formée des 4 bits du mot et des 3 bits de contrôle.

1. Préliminaires
   a. Justifier que c_1, c_2 et c_3 ne peuvent prendre comme valeurs que 0 ou 1.
   b. Calculer la clé de contrôle associée au mot 1001.
2. Soit $b_1b_2b_3b_4$ un mot de 4 bits et $c_1c_2c_3$ la clé associée.
   Démontrer que si on change la valeur de b_1 et que l'on recalcule la clé, alors :
   - la valeur de c_1 est inchangée ;
   - la valeur de c_2 est modifiée ;
   - la valeur de c_3 est modifiée.
3. On suppose que, durant la transmission du message, au plus un des 7 bits a été transmis de façon erronée. À partir des quatre premiers bits du message reçu, on recalcule les 3 bits de contrôle, et on les compare avec les bits de contrôle reçus.
   Sans justification, recopier et compléter le tableau ci-dessous. La lettre F signifie que le bit de contrôle reçu ne correspond pas au bit de contrôle calculé, et J que ces deux bits sont égaux.

bit erroné / bit de contrôle calculé	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	aucun
c_1	J							
c_2	F							
c_3	F							

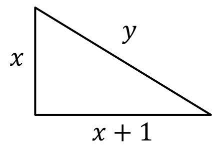
4. Justifier rapidement, en vous appuyant sur le tableau, que si un seul bit reçu est erroné, on peut dans tous les cas déterminer lequel, et corriger l'erreur.
5. Voici deux messages de 7 bits :
   $$A = 0100010 \text{ et } B = 1101001.$$
   On admet que chacun d'eux comporte au plus une erreur de transmission.
   Dire s'ils comportent une erreur, et la corriger le cas échéant.

Matrice vérifiant $U_{n+1} = AU_n + B$

11 *(2017, métropole).* On appelle « triangle rectangle presque isocèle », en abrégé TRPI, un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs x et $x+1$ et dont l'hypoténuse a pour longueur y, où x et y sont des entiers naturels.

Ainsi, un TRPI est un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont deux nombres entiers consécutifs et dont la longueur de l'hypoténuse est un nombre entier.

Si le triangle de côtés x, $x+1$ et y, où y est la longueur de l'hypoténuse, est un TRPI, on dira que le couple $(x; y)$ définit un TRPI.



Partie A –

1. Démontrer que le couple d'entiers naturels $(x; y)$ définit un TRPI si, et seulement si, on a $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$.
2. Montrer que le TRPI ayant les plus petits côtés non nuls est défini par le couple $(3; 5)$.
3. a. Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est impair alors n est impair.

b. Montrer que dans un couple d'entiers $(x; y)$ définissant un TRPI, le nombre y est nécessairement impair.

4. Montrer que si le couple d'entiers naturels $(x; y)$ définit un TRPI, alors x et y sont premiers entre eux.

Partie B – Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Soient x et y deux entiers naturels; on définit les entiers naturels x' et y'par la relation : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$.

1. **a.** Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

b. Montrer que $y'^2 - 2x'(x' + 1) = y^2 - 2x(x + 1)$.

c. En déduire que si le couple $(x; y)$ définit un TRPI, alors le couple $(x'; y')$ définit également un TRPI.

2. On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels, définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 5$ et pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + B$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $(x_n; y_n)$ définit un TRPI.

3. Déterminer, par la méthode de votre choix que vous préciserez, un TRPI dont les longueurs des côtés sont supérieures à 2017.

12 *(2016, Antilles-Guyane).* Parmi les ordinateurs d'un parc informatique, 60 % présentent des failles de sécurité. Afin de pallier ce problème, on demande à un technicien d'intervenir chaque jour pour traiter les défaillances.

On estime que chaque jour, il remet en état 7 % des ordinateurs défaillants, tandis que de nouvelles failles apparaissent chez 3 % des ordinateurs sains. On suppose de plus que le nombre d'ordinateurs est constant sur la période étudiée.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'ordinateurs sains de ce parc informatique au bout de n jours d'intervention, et b_n la proportion d'ordinateurs défaillants au bout de n jours.

Ainsi $a_0 = 0{,}4$ et $b_0 = 0{,}6$.

Partie A –

1. Décrire la situation précédente à l'aide d'un graphe ou d'un arbre pondéré.

2. Déterminer a_1 et b_1.

3. Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}07 \\ 0{,}03 & 0{,}93 \end{pmatrix}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

a. Justifier que pour tout entier naturel n,

$$X_{n+1} = AX_n.$$

b. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

c. Calculer, à l'aide de la calculatrice, X_{30}. En donner une interprétation concrète (les coefficients seront arrondis au millième).

Partie B –

1. On pose $D = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0{,}07 \\ 0{,}03 \end{pmatrix}$

a. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} + b_{n+1} = 1$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = DX_n + B$.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = X_n - 10B$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = DY_n$.

b. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = D^n Y_0$.

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = D^n(X_0 - 10B) + 10B.$$

c. Donner l'expression de D_n puis en déduire a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de n.

d. Selon cette étude, que peut-on dire de la proportion d'ordinateurs défaillants sur le long terme ?

13 *(2014, métropole).* Un pisciculteur dispose de deux bassins A et B pour l'élevage de ses poissons. Tous les ans à la même période :

- il vide le bassin B et vend tous les poissons qu'il contenait et transfère tous les poissons du bassin A dans le bassin B ;
- la vente de chaque poisson permet l'achat de deux petits poissons destinés au bassin A.

  Par ailleurs, le pisciculteur achète en plus 200 poissons pour le bassin A et 100 poissons pour le bassin B.

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, on note respectivement a_n et b_n les effectifs de poissons des bassins A et B au bout de n années.

En début de première année, le nombre de poissons du bassin A est $a_0 = 200$ et celui du bassin B est $b_0 = 100$.

1. Justifier que $a_1 = 400$ et $b_1 = 300$ puis calculer a_2 et b_2.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$, et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

a. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n,

$$X_{n+1} = AX_n + B.$$

b. Déterminer les réels x et y tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B.$$

c. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$Y_n = \begin{pmatrix} a_n + 400 \\ b_n + 300 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = AY_n$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = Y_{2n}$.

a. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = A^2 Z_n$.

En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = 2Z_n$.

b. On admet que cette relation de récurrence permet de conclure que pour tout entier naturel n, $Y_{2n} = 2^n Y_0$.

En déduire que $Y_{2n+1} = 2^n Y_1$ puis démontrer que pour tout entier naturel n,

$$a_{2n} = 600 \cdot 2^n - 400 \text{ et } a_{2n+1} = 800 \cdot 2^n - 400.$$

4. Le bassin A a une capacité limitée à 10000 poissons.

a. On donne l'algorithme suivant.

```
Si p est pair
    n ← p/2
    a ← 600 · 2^n − 400
Sinon
    n ← (p−1)/2
    a ← 800 · 2^n − 400
Fin Si
Renvoyer a
```

Que fait cet algorithme pour une valeur de p donnée ? Justifier la réponse.

b. Écrire un algorithme qui affiche le nombre d'années pendant lesquelles le pisciculteur pourra utiliser le bassin A.

Problèmes

14 (d'après EDHEC 2003 voie éco). Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{2}{3}$;
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$;
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$;
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

On suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.
Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement « le joueur gagne la n-ième partie ».
De plus, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :
$E_n = A_{n-1} \cap A_n$, $\quad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n$, $\quad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n}$ et $H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$.

1. Simulation sur Python.
  a. Créer une fonction `partie_suivante(p)` qui renvoie 1 (victoire) avec une probabilité p, et 0 sinon.
  b. On veut créer une fonction `partie(n)` qui simule une session de n parties. L'instruction `L[-2:]` permet de récupérer les deux derniers termes de `L`. Recopier et terminer le programme ci-dessous.

```
def partie(n):
   L=[1,1]
   for k in range(3,n+1):
      if L[-2:]==[1,1]:
         L+=[partie_suivante(2/3)]
      elif
```

Exemple d'appel :

```
>>> partie(10)
[1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1]
```

  c. Estimer le nombre moyen de parties gagnées au cours d'une session.
  d. Estimer les limites des probabilités de E_n, F_n, G_n et H_n.

2. On admet que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.
  a. Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que pour tout entier $n \geq 2$
$$P(E_{n+1}) = \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n).$$
  b. Exprimer sans détailler les probabilités $P(F_{n+1})$, $P(G_{n+1})$ et $P(H_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.
  c. Soit $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$ pour tout $n \geq 2$. Vérifier que $U_{n+1} = MU_n$.

3. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.
  a. Calculer $D = P^{-1}MP$.
  b. Prouver que pour tout $n \geq 2$, $U_n = M^{n-2}U_2$.
  c. En déduire $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$. On calculera le produit matriciel de droite à gauche.
  d. Calculer les limites de $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.

4. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la k-ième partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).
  a. Montrer que $A_k = E_k \cup F_k$ et en déduire que X_k suit la loi binomiale de paramètre
$$\frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 5\right).$$
  b. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Que représente S_n ?
  c. Montrer que
$$E(S_n) = \frac{n}{2} + \frac{11}{8} + \frac{9}{40}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{8}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

15 (d'après HEC 2008). Dans une population de 3 individus, on s'intéresse à la propagation d'un certain virus.
Chaque jour, on distingue dans cette population trois catégories d'individus : en premier lieu, les individus sains, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas porteurs du virus, ensuite les individus qui viennent d'être contaminés et qui sont inoffensifs pour les autres, et enfin, les individus contaminés par le virus et qui sont contagieux.
Ces trois catégories évoluent jour après jour selon le modèle suivant :

- chaque jour n, chaque individu sain peut être contaminé par n'importe lequel des individus contagieux ce jour avec la même probabilité $\frac{1}{3}$, ces contaminations éventuelles étant indépendantes les unes des autres;
- un individu contaminé le jour n devient contagieux le jour $n+1$;
- chaque individu contagieux le jour n redevient sain le jour $n+1$.

On note alors X_n le nombre aléatoire d'individus contaminés (donc contagieux) le jour n.
On remarquera que si, pour un certain entier naturel i, on a $X_i = 0$, alors on a aussi $X_{i+1} = 0$.

1. Calculer les 16 probabilités $p_{ji} = P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$ pour tout $i, j \in \{0,1,2,3\}$.

2. On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice M telle que $U_{n+1} = \frac{1}{9}MU_n$.

3. On pose $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice $D = P^{-1}MP$ est diagonale, en déduire l'expression de M^n pour tout entier $n \geq 1$.

4. En déduire que $u_n = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n (v_0 + w_0)$ pour tout $n \geq 1$. Interpréter la limite de (u_n).