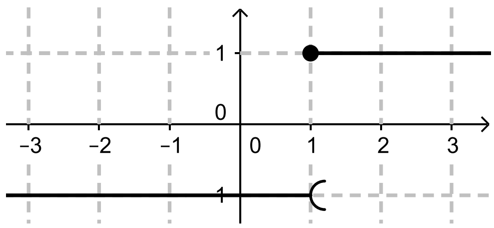
Continuité et convexité

1. Notion intuitive de continuité

Une fonction définie sur un intervalle est continue si sa courbe représentative sur cet intervalle peut se tracer sans lever le crayon de la feuille.

Exemple

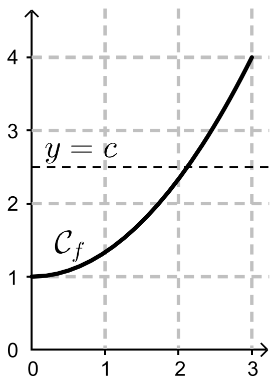
- La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
- La fonction $x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 1 \\ -1 \text{ si } x < 1 \end{cases}$ est continue sur $[1; +\infty[$, sur $]-\infty; 1[$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

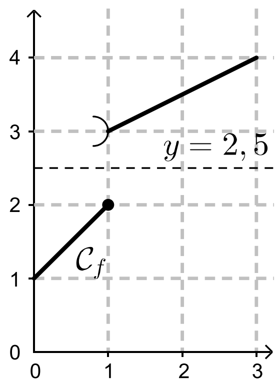


Théorème. Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

2. Propriété des valeurs intermédiaires

Commençons par deux exemples.





La fonction f est strictement croissante et continue sur $[0; 3]$, alors f prend une et une seule fois toute valeur c comprise entre $f(0)$ et $f(3)$, c'est-à-dire entre 1 et 4. En effet, la droite d'équation $y = c$ coupe $\mathcal{C}_f$ en un seul point.

La fonction f est strictement croissante sur $[0; 3]$ mais n'est pas continue. Ici f ne prend pas toutes les valeurs comprises entre $f(0)$ et $f(3)$, c'est-à-dire entre 1 et 4. Par exemple la valeur 2,5 n'est pas prise par f car la droite d'équation $y = 2{,}5$ ne coupe pas $\mathcal{C}_f$.

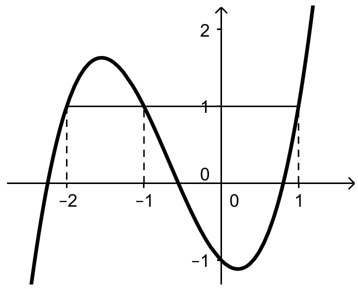
Théorème (des valeurs intermédiaires). Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$. Alors f prend une et une seule fois toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

On peut reformuler ce théorème ainsi.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution sur $[a;b]$.

Remarque.

1. Si la fonction continue f n'est pas strictement monotone sur $[a;b]$, toute valeur c comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est prise par f, mais pas nécessairement une seule fois.
   Par exemple la fonction ci-contre, continue sur $[-2;1]$ prend trois fois la valeur 1.
2. Si la fonction n'est pas continue, il se peut que toutes les valeurs comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ ne soient pas prises par f, même si la fonction est strictement monotone. Voir l'exemple introductif de ce paragraphe.



Convention. On conviendra que dans un tableau de variation, les flèches traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Exemple

Une fonction f définie sur $[-3;3]$ admet le tableau de variation suivant.

x	-3		1		3
variation de f	0	$\searrow$	-5	$\nearrow$	4

1) Montrer qu'il existe un unique réel de $[1;3]$ tel que $f(\alpha)=0$.
2) Construire le tableau de signe de f.
3) Résoudre $f(x)<0$ et $f(x)\geq 0$.

Solution.

1) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1;3]$. Le nombre 0 est compris entre $f(1)=-5$ et $f(3)=4$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α de l'intervalle $[1;3]$ tel que $f(\alpha)=0$.
2) Le tableau de signe de f est le suivant.

x	-3		α		3
Signe de f	0	$-$	0	$+$	

3) Par lecture du tableau de signe, on a que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)<0$ est $]-3;\alpha[$ et celui de $f(x)\geq 0$ est $\{-3\}\cup[\alpha;3]$.

3. Fonctions convexes

❖ Définitions et exemple

Définition. *Une fonction est dite* <u>*convexe*</u> *sur un intervalle* I *si sa courbe représentative est située au-dessus de chacune de ses tangentes. Elle est dite* <u>*concave*</u> *si elle est située au-dessous de chacune de ses tangentes.*

Exemple

La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$. La fonction racine carrée est concave sur $[0;+\infty[$. La fonction inverse est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$.

Définition. *Un* <u>*point d'inflexion*</u> *d'une courbe est un point où la courbe traverse la tangente.*

On conçoit que pour en être ainsi, il faut passer de convexe à concave ou de concave à convexe.

- **Convexité et dérivabilité**

On conçoit que pour être convexe, les coefficients directeurs des tangentes à la courbe représentative de la fonction considérée doivent augmenter. On a le résultat suivant.

Théorème. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I ;
- f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

Exemple

On retrouve par exemple le fait que la fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée $x \mapsto 2x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Définition. Soit f une fonction dérivable sur I est dont la dérivée f' est également dérivable sur I. On appelle dérivée seconde de f la fonction dérivée de f'. On la note f''.

Exemple

Soit $f: x \mapsto x^4$. On a $f'(x) = 4x^3$ puis $f''(x) = 12x^2$.

Le théorème précédent admet alors un corollaire utile en pratique.

Théorème. Soit f une fonction dérivable deux fois sur un intervalle I.
- f est convexe sur I si et seulement si pour tous $x \in I$, $f''(x) \geq 0$.
- f est concave sur I si et seulement si pour tous $x \in I$, $f''(x) \leq 0$.

Exemple

La dérivée seconde de la fonction cube est $x \mapsto 6x$, fonction qui est positive pour $x \geq 0$ est négative sinon. On conclut donc que la fonction cube est concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$.

Théorème. Soit f une fonction deux fois dérivable sur I et $a \in I$. Si f'' s'annule en changeant de signe en a, alors le point de coordonnées de $(a; f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe.