Continuité et convexité – Exercices

Variation de fonctions, dérivées

1 Soit f la fonction définie sur $[-2;3]$ par
$$f(x)=2x^2-4x-3.$$
1. Tracer la courbe représentative de f sur la calculatrice. Quelles semblent être les variations de f ?
2. Calculer la dérivée de f et étudier son signe. En déduire les variations de f.
3. Calculer l'équation de la tangente T au point d'abscisse -1 à la courbe représentative de f et tracer cette droite sur la calculatrice.

2 Soit f la fonction définie sur $[-3;3]$ par
$$f(x)=x^3-x^2-8x+2.$$
1. Tracer la courbe représentative de f sur la calculatrice. Quelles semblent être les variations de f ?
2. Calculer la dérivée de f et étudier son signe. En déduire les variations de f.
3. Calculer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 1 à la courbe représentative de f et tracer cette droite sur la calculatrice.

3 Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$f_1(x)=x+\frac{1}{x}$ $\qquad$ $f_2(x)=5x-2\sqrt{x}$

$f_3(x)=\frac{1}{x^2+3x}$ $\qquad$ $f_4(x)=0{,}2x^3+\frac{2}{x^2}$

$f_5(x)=2x^4-\frac{1}{2x}$ $\qquad$ $f_6(x)=\frac{4}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-1$

Théorème des valeurs intermédiaires

4 On considère une fonction f dont le tableau de variation est donné ci-contre.
Démontrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution sur $[1;5]$.

x	1		5
f	3	$\searrow$	-1

5 Soit f une fonction continue et strictement croissante définie sur $[-1;4]$ avec $f(-1)=-2$ et $f(4)=5$.
Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[-1;4]$.

6 Soit f une fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-4		-1		3
f	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	5

1. Est-elle strictement monotone sur $[-4;3]$?
2. En appliquant deux fois le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation $f(x)=3$ possède deux solutions sur $[-4;3]$.

7 Le tableau de variation d'une fonction f est donné ci-dessous. On a complété avec quelques valeurs.

x	-5		-3		-1		1		2		4
f	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3

Donner, sans justifier, le nombre de solutions des équations suivantes sur les intervalles indiqués.
a. $f(x)=0$ sur $[-3;4]$ puis sur $[-5;4]$;
b. $f(x)=2$ sur $[-5;4]$;
c. $f(x)=4$ sur $[-5;-1]$;
d. $f(x)=1$ sur $[-5;1]$ puis sur $[-5;4]$.

8 Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle indiqué et trouver à l'aide de la calculatrice un encadrement à 10^{-2} puis une valeur approchée à 10^{-2} de α.
a. $f(x)=x^3+5x-7$ sur $[1;2]$
b. $f(x)=x^5+\sqrt{x}-3$ sur $[1;2]$
c. $f(x)=5-x^3-4x$ sur $[0;2]$

9 Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par
$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^2-4.$$
On cherche à déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x)=0$.
1. Tracer la courbe de f sur la calculatrice. Combien l'équation semble-t-elle avoir de solutions ?
2. Montrer que sur $[0;4]$ l'équation admet une unique solution α. Donner une valeur approchée à 10^{-2}.
3. Montrer que sur $[4;+\infty[$ l'équation n'admet pas de solution.
4. Conclure.

Signe d'une fonction

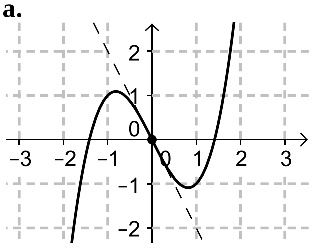
10 Déterminer le signe des fonctions suivantes dont on donne les indications.
a. f est continue, définie sur $[0;10]$, strictement croissante sur $[0;5]$, strictement décroissante sur $[5;10]$ et telle que $f(5)=-1$.
b. f est continue, strictement croissante sur $[-1;1]$ et $f(-1)=0$.
c. f admet le tableau de variation suivant. De plus $f(-2)=0$.

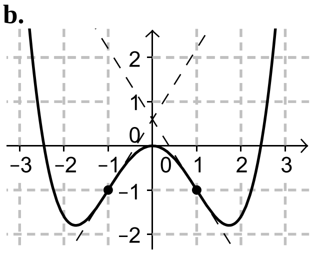
x	-3		1		3
f	6	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1

11 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;3]$ par $f(x)=x^3+2x-4$.
1. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $[0;3]$. Donner une valeur approché de α à 10^{-3}.
2. En déduire le signe de f.

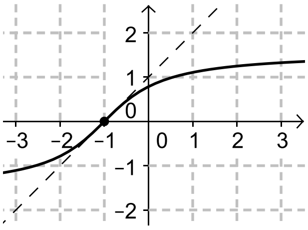
Convexité

12 Pour chacune des fonctions, indiquer les intervalles sur lesquels elle est concave et ceux où elle est convexe ainsi que les éventuels points d'inflexion. On a représenté en pointillé les tangentes aux points d'inflexion.

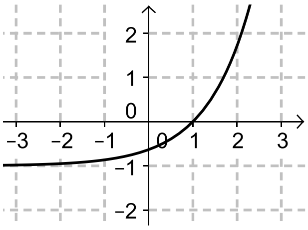
a.


b.


c.



d.



13 Pour chacune des fonctions suivantes, à l'aide de la calculatrice, indiquer les intervalles où la fonction proposée est concave ou convexe et donner les éventuels points d'inflexion.

a. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$.
b. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.
c. $f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - x^2 + 1$
d. $f(x) = \frac{8(x+1)}{4x^2+8x+7}$

14 f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ et sa courbe représentative possède au point d'abscisse 0 une tangente T d'équation $y = x + 1$.

1. Construire T et une courbe vérifiant les hypothèses.
2. Montrer que $f(1) \geq 2$.

15 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$.

1. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 10.
2. En déduire sans calculatrice que $10{,}1^2 > 102$.

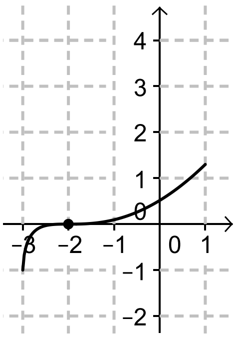
Convexité et dérivée

16 Calculer $f''(x)$ et en déduire les intervalles où f est convexe ou concave et les points d'inflexion éventuels.

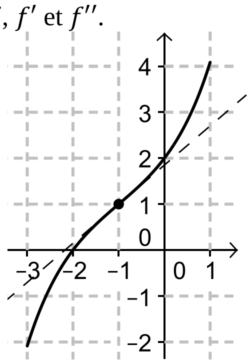
a. $f(x) = 4x^2 - 16x + 15$
b. $f(x) = x^3(x - 2)$
c. $f(x) = -x^3 + 4x - 5$

17 Soit f la fonction définie sur $[-3; 1]$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.
Construire les tableaux de signe de f, f' et f''.

a.

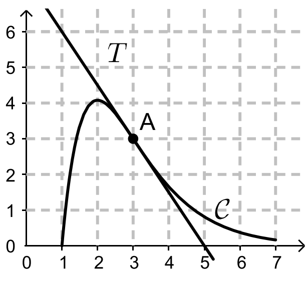


b.



18 *(2015, Centres étrangers).* QCM sans justifications.

La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[1; 7]$.
La droite T est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A(3; 3)$ et passe par le point de coordonnées $(5; 0)$.



Le point A est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.

1. On a
a. $f'(3) = 3$ **b.** $f'(3) = \frac{3}{2}$
c. $f'(3) = -\frac{2}{3}$ **d.** $f'(3) = -\frac{3}{2}$

2. On a
a. $f''(3) = 3$ **b.** $f''(3) = 0$
c. $f''(5) = 0$ **d.** $f''(2) = 0$

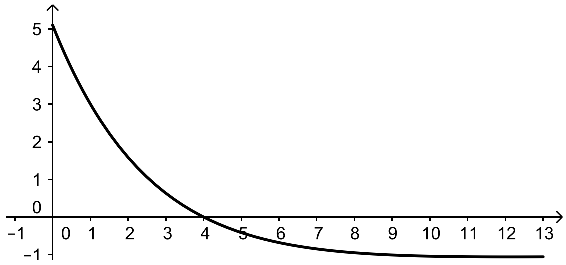
19 *(2015, Liban).* Vrai ou faux ? Justifier.

1. On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3; 1]$.

x	-3	-1	0	1
variations de f	-6 ↗	-1 ↘	-2 ↗	4

Proposition 1 : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-3; 1]$.

2. On considère une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 13]$ et on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction g' sur l'intervalle $[0; 13]$.



Proposition 2 : La fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; 4]$.
Proposition 3 : La fonction g est concave sur $[0; 13]$.

20 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3-1}{(x+1)^2}$.

A – Étude des variations de f

1. Préciser l'ensemble de définition D de f.
2. Vérifier que pour tout $x \in D$,
$f'(x) = \frac{x^3+3x^2+2}{(x+1)^3}$.
3. On pose
$g(x) = x^3 + 3x^2 + 2$.
a. Calculer $g'(x)$.
b. Déterminer les variations de g.
c. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une seule solution α dans l'intervalle $[-4; -3]$ et qu'il n'y a pas d'autres solutions dans $\mathbb{R}$.
Donner un encadrement à 10^{-2} de α.
d. Donner le signe de $g(x)$.
4. Déduire de ce qui précède le signe de $f'(x)$ et les variations de f.

f:=(x^3-1)/(x+1)^2 $\frac{x^3-1}{(x+1)^2}$
df:=factoriser(deriver(f)) $\frac{x^3+3x^2+2}{(x+1)^3}$
factoriser(deriver(df)) $\frac{6(x-1)}{(x+1)^4}$

B – Recherche de points d'inflexion

5. Utiliser l'impression d'écran de Xcas ci-dessus pour déterminer $f''(x)$. En déduire l'existence d'un point d'inflexion I pour la courbe de f.
6. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point I.