Suites numériques

1. Rappels sur les suites

Définition. *Une* *<u>suite numérique</u>* u*, notée plus souvent* (u_n) *est une fonction dont la variable est un entier naturel. L'image d'un entier* n *n'est pas notée* $u(n)$ *mais* u_n *et se lit «* u *indice* n *». On dit que* u_n *est le* *<u>terme général</u>* *de la suite et que* n *est le* *<u>rang</u>* *de ce terme.*

Les manières les plus courantes de définir une suite sont les suivantes.

- *Par une fonction*

On se donne une fonction f, la suite est définie par $u_n = f(n)$. On peut facilement calculer n'importe quel terme de la suite.

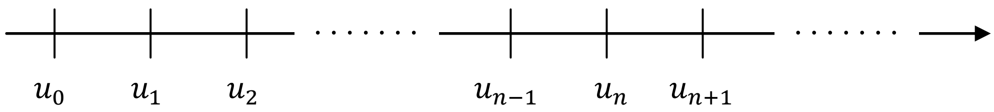
<u>Exemple</u>

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$. On a par exemple $u_{100} = \frac{1}{100}$.
Soit la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = 2n + 1$. C'est la suite des entiers naturels impairs. Ses termes sont 1, 3, 5 etc.

- *Par une relation de récurrence*

Une suite est définie par récurrence quand elle est définie par la donnée :

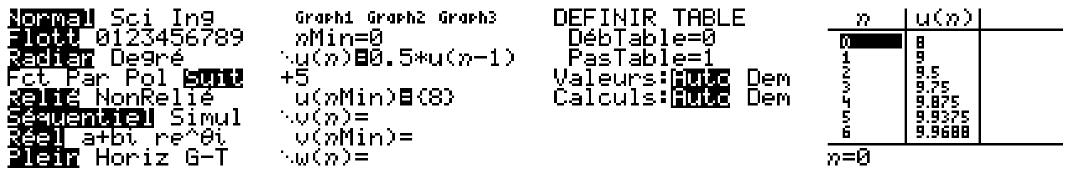
- de son premier terme ;
- d'une relation qui permet de calculer un terme à partir du précédent. Cette relation est appelée relation de récurrence.



<u>Exemple</u>

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 5$ pour $n \geq 0$. La relation de récurrence doit être pensée comme « un terme est égal à 0,5 fois celui d'avant, plus 5 ».
On a $u_1 = 0{,}5u_0 + 5 = 9$, $u_2 = 0{,}5u_1 + 5 = 9{,}5$, $u_3 = 0{,}5u_2 + 5 = 9{,}75$ etc.
Si l'on veut calculer u_{10}, on est obligé de calculer tous les termes précédents. On apprendra à se « débarrasser de la récurrence » plus loin dans le chapitre dans certains cas.
Pour cette suite, on montrera que $u_n = 10 - 2 \times 0{,}5^n$ pour tout n. Ainsi par exemple on a $u_8 = 10 - 2 \times 0{,}5^8 \approx 9{,}992$, sans devoir calculer u_8, u_7 etc.

On va utiliser la calculatrice TI pour calculer les termes de la suite.
Il faut d'abord mettre la calculatrice en mode suite en appuyant sur $\boxed{\text{mode}}$ puis en choisissant `Suit`. La touche $\boxed{\text{f(x)}}$ permet alors d'accéder à l'éditeur de suites.
Le plus petit indice est `nMin` (ici 0), et `u(nMin)` est u_0 (ici 8). La relation de récurrence doit être entrée sous la forme $u_n = f(u_{n-1})$ et non $u_{n+1} = f(u_n)$, c'est-à-dire dans ce cas $u_n = 0{,}5u_{n-1} + 5$. Le `u` s'obtient en faisant $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{7}$ et `n` par $\boxed{\text{x,t,}\theta\text{,n}}$. On écrira `u(n-1)` à la place de u_{n-1}.
Les valeurs de la suite s'obtiennent ensuite dans la table en ayant réglé le début de la table à 0, avec un pas de 1 (il ne faut pas oublier que n est un entier).



❖ **Sens de variation**

Définition. *La suite (u_n) est dite* <u>*décroissante*</u> *si pour tout n, $u_{n+1} \leq u_n$*
La suite (u_n) est dite <u>*croissante*</u> *si pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$*
La suite (u_n) est dite <u>*constante*</u> *si pour tout n, $u_{n+1} = u_n$*
La suite (u_n) est dite <u>*monotone*</u> *si elle est croissante, décroissante ou constante.*

❖ **Suites arithmétiques**

Définition. *Une suite (u_n) est dite* <u>*arithmétique*</u> *si chaque terme se déduit du précédent en ajoutant une constante r appelé* <u>*raison*</u> *de la suite.*
Une suite arithmétique vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$.

Théorème. Soit n un entier naturel. On a $u_n = u_0 + nr$.

Théorème. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \neq 0$.
- Si $r > 0$, la suite (u_n) est croissante ;
- si $r < 0$, la suite (u_n) est décroissante.

2. Suites géométriques

Définition. *Une suite (u_n) est dite* <u>*géométrique*</u> *si chaque terme se déduit du précédent en multipliant par une constante q appelé* <u>*raison*</u> *de la suite.*
Une suite géométrique vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = qu_n$.

<u>**Exemple**</u>

Au 1^{er} janvier 2010, on a placé une somme de $c_0 = 1000$ € à intérêts annuels de 2 %.
En notant c_n le capital acquis au 1^{er} janvier de l'année $2010 + n$, on voit que

$$c_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{100}\right) c_n = 1{,}02 c_n.$$

Par exemple le capital au 1^{er} janvier 2011 était $c_1 = 1{,}02 \times 1000 = 1020$, puis au 1^{er} janvier 2012 il était de $c_2 = 1{,}02 \times 1020 = 1040{,}4$ etc.

<u>**Exemple**</u>

Considérons la suite définie par $u_n = -3 \times 7^n$ pour $n \geq 0$.
Cette suite est géométrique de raison 7. En effet on peut écrire

$$u_{n+1} = -3 \times 7^{n+1} = -3 \times 7^n \times 7 = u_n \times 7.$$

Son premier terme est $u_0 = -3 \times 7^0 = -3$.

Une suite géométrique (u_n) vérifie une relation de récurrence, donc pour calculer un terme il faut connaître les précédents. En fait dans ce cas, on peut se « débarrasser de la récurrence », on dit « exprimer u_n en fonction de n », grâce au résultat suivant.

Théorème. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. On a
$$u_n = u_0 \times q^n \text{ et } u_n = u_1 \times q^{n-1}.$$

Exemple

Pour la suite des capitaux, on a $c_n = 1000 \times 1{,}02^n$.
Ainsi au 1er janvier 2025, on disposera d'un capital de $c_{15} = 1000 \times 1{,}02^{15} \approx 1346$ €.

❖ Somme de termes consécutifs

Théorème. Soit q un réel avec $q \neq 1$. Alors
$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Exemple

$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{10} = \frac{1-2^{11}}{1-2} = 2^{11} - 1 = 2047$.

Exemple

Soit (u_n) la suite géométrique de raison $0{,}58$ et de premier terme $u_0 = 3$. Calculons $u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$. On sait que pour tout n, $u_n = 3 \times 0{,}58^n$ si bien que
$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_{10} &= 3 \times 0{,}58^0 + 3 \times 0{,}58^1 + \cdots 3 \times 0{,}58^{10} \\ &= 3(0{,}58^0 + 0{,}58^1 + \cdots + 0{,}58^{10}) \\ &= 3 \times \frac{1-0{,}58^{11}}{1-0{,}58} \\ &\approx 7{,}16 \end{aligned}$$

3. Limite d'une suite géométrique

❖ Notion de limite

Étudier la limite d'une suite c'est se demander ce que deviennent les nombres u_n lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes, on dit « lorsque n tend vers $+\infty$ ».
Plus précisément, on cherche à savoir si l'un des deux comportements suivants a lieu :

- Les nombres u_n finissent-ils par s'accumuler autour d'un nombre fixe ?
- Les nombres u_n finissent-ils par dépasser n'importe quel nombre fixé à l'avance, aussi grand que l'on veut ? Autrement dit, u_n prend-il des valeurs de plus en plus grandes ?

Exemple

Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$. On constate que lorsque n tend vers $+\infty$, les termes de la suite sont de plus en plus proches de 0. On dit que la limite de la suite est 0, on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exemple

Considérons la suite (v_n) définie par $v_n = n^2$. On constate que lorsque n tend vers $+\infty$, les termes de la suite sont de plus en plus grand. On dit que la limite de la suite est $+\infty$, on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

❖ **Limite de la suite (q^n)**

Théorème.
- Si $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$;
- si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Exemple

Considérons la suite définie par $u_n = 3 - 11 \times 0{,}73^n$. Comme $0 < 0{,}73 < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}73^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3 - 11 \times 0 = 3$.

4. Suites arithmético-géométriques

Définition. *Une suite (u_n) est dite arithmético-géométrique si elle satisfait une relation de récurrence du type $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont deux réels.*

Remarque. Si $b = 0$, la suite est géométrique de raison a et si $a = 1$ la suite est arithmétique de raison b.

L'étude d'une suite arithmético-géométrique peut être ramenée à celle d'une suite géométrique par l'intermédiaire d'une suite auxiliaire.
Les exercices seront toujours guidés.

Exemple

La suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 5$ est arithmético-géométrique.

1. On pose $v_n = u_n - 10$.
   - **a.** Montrer que la suite (v_n) est géométrique, donner sa raison et son premier terme.
   - **b.** En déduire v_n puis u_n en fonction de n.
2. Montrer que pour tout n, on a $u_n \leq 10$. Calculer la limite de (u_n).

Réponse.

1. Remarquons déjà que la définition de v_n donne $u_n = v_n + 10$.
   - **a.** On a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 10 && \text{(par définition de } v_{n+1}\text{)}\\
&= 0{,}5u_n + 5 - 10 && \text{(par définition de } u_{n+1}\text{)}\\
&= 0{,}5u_n - 5 &&\\
&= 0{,}5\left(u_n - \frac{5}{0{,}5}\right) && \text{(en factorisant par 0,5)}\\
&= 0{,}5(u_n - 10) &&\\
&= 0{,}5v_n && \text{(par définition de } v_n\text{)}
\end{aligned}$$

Cela prouve que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}5$. Son premier terme est $v_0 = u_0 - 10 = 8 - 10 = -2$.

b. Comme (v_n) est géométrique avec $q = 0{,}5$ et $v_0 = -2$ on en déduit

$$v_n = v_0 \times q^n = -2 \times 0{,}5^n.$$

On a remarqué au début de la question que $u_n = v_n + 10$, ainsi

$$u_n = -2 \times 0{,}5^n + 10 = 10 - 2 \times 0{,}5^n.$$

2. Comme pour tout n, on a $2 \times 0{,}5^n \geq 0$, on en déduit

$$u_n = 10 - 2 \times 0{,}5^n \leq 10.$$

Étant donné que $0 < 0{,}5 < 1$, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$ et par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 10 - 2 \times 0 = 10.$$