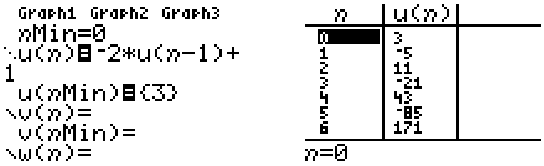
Suites numériques – Exercices

Rappels sur les suites

1 Calculer les 4 premiers termes des suites suivantes.
a. $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = 2 + n$ pour $n \geq 0$.
b. $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = n^2 - n$ pour $n \geq 1$.
c. $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2 + u_n$ pour $n \geq 0$.
d. $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n$ pour $n \geq 0$.
e. $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$ pour $n \geq 0$.

2 On a rentré une suite dans la calculatrice et on a affiché la table des valeurs.



1. Quelle est cette suite ?
2. Vérifier les calculs apparaissant dans la table.

3 À l'aide de la calculatrice, conjecturer les variations des suites suivantes.
a. $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = n + 3$ pour $n \geq 0$.
b. $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n$ pour $n \geq 0$.
c. $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = 3^n$ pour $n \geq 0$.
d. $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ pour $n \geq 0$.

Suites géométriques

4 Donner les 4 premiers termes et la raison des suites géométriques suivantes.
a. $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n$ pour $n \geq 0$.
b. $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n$ pour $n \geq 1$.

5 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite géométrique de premier terme -5 et de raison 2. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_{10}.

6 Montrer que chacune des suites suivantes est géométrique et préciser le premier terme.
a. $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour $n \geq 0$.
b. $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = -2 \times 3^n$ pour $n \geq 1$.
c. $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \frac{5}{2^n}$ pour $n \geq 0$.

7 Pour chacune des suites géométriques suivantes, exprimer u_n en fonction de n.
a. $(u_n)_{n\geq 0}$ avec $u_0 = 3$ et $q = 10$.
b. $(u_n)_{n\geq 1}$ avec $u_1 = 1$ et $q = 4$.
c. $(u_n)_{n\geq 0}$ avec $u_0 = 2$ et $q = \frac{5}{3}$.

8 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie pour $n \geq 0$ par $u_n = n^2 + 1$.
1. Calculer u_0, u_1, u_2.
2. La suite (u_n) est-elle géométrique ?

9 On place 100 € à intérêts composés au taux annuel de 3,5 %.
Pour tout entier naturel, on note c_n le capital dont on dispose au bout de n années de placement.
1. Justifier que la suite (c_n) est géométrique, donner son premier terme et sa raison.
2. Exprimer c_n en fonction de n.
3. De quelle somme disposera-t-on au bout de 10 ans ?

10 Montrer que la suite définie pour $n \geq 0$ par $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$ géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

11 On considère l'algorithme ci-contre.

Saisir A
Saisir N
Pour I de 1 à N
A prend la valeur $0{,}2 \times A$
Fin Pour
Afficher A

1. Que retourne-t-il si on entre $A = 5$ et $N = 7$?
2. Le modifier pour qu'il calcule u_9 où (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = -2$.

12 Vrai ou faux ? Justifier.
Si le prix du litre d'essence augmente régulièrement de 5 % par an, il faut au minimum 15 ans pour que le prix de l'essence double.
Retrouver le résultat par un algorithme.

13 Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$. On pose
$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}.$$
1. Vérifier que $S = 3 + 6 + \cdots + 3072$.
2. Calculer S.

14 Alain a obtenu un prêt de 10 ans progressif pour l'achat d'un terrain. La première année, il paye des *mensualités* de 900 €, ensuite ses mensualités augmentent de 1,5 % par an.
On note u_n la somme en euros déboursée par Alain au cours de la n-ième année de son prêt. On a donc
$$u_1 = 12 \times 900 = 10800.$$
1. Préciser la nature de la suite (u_n), donner sa raison.
2. Quelle est la somme totale remboursée par Alain à la fin de son prêt ?

15 *(Bac 2013).* Un industriel étudie l'évolution de la production des jouets sur la machine VP1000 de son entreprise. En 2000, lorsqu'il l'a achetée, elle pouvait produire 120 000 jouets par an.
Du fait de l'usure de la machine, la production diminue de 2 % par an.
On modélise le nombre total de jouets fabriqués au cours de l'année $(2000 + n)$ par une suite (u_n). On a donc $u_0 = 120\,000$.
1. Montrer que, pour tout entier naturel n,
$$u_n = 120\,000 \times 0{,}98^n$$
2. **a.** Quel a été le nombre de jouets fabriqués en 2005 ?
b. Déterminer à partir de quelle année le nombre de jouets fabriqués sera strictement inférieur à 100 000.
c. Cet industriel décide qu'il changera la machine lorsqu'elle produira moins de 90 000 jouets par an.

Recopier et compléter les lignes 6 et 7 de l'algorithme ci-dessous afin qu'il permette de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 90\,000$.

```
1  Variables :        A est un réel
2                     n est un entier naturel
3  Initialisation :   Affecter à A la valeur 120 000
4                     Affecter à n la valeur 0
5  Traitement :       Tant que A ≥ 90 000
6                       n prend la valeur . . . .
7                       . . . . . . . . . . . .
8                     Fin Tant que
9  Sortie :           Afficher n
```

3. a. Exprimer $1 + 0{,}98 + 0{,}98^2 + \cdots + 0{,}98^n$ en fonction de n.

b. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
Montrer que $S_n = 6\,000\,000 \times (1 - 0{,}98^{n+1})$.

c. En déduire le nombre total de jouets fabriqués pendant les 15 premières années de production.

Limite d'une suite géométrique

16 Déterminer les limites des suites suivantes.

a. $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour $n \geq 0$.
b. $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_n = 54 \times 0{,}37^n$ pour $n \geq 0$.
c. $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_n = 0{,}132^n + 2$ pour $n \geq 0$.
d. $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_n = 5 - 28 \times 0{,}7^n$ pour $n \geq 0$.
e. $(u_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $q = 0{,}3$ et de premier terme -5.
f. $(u_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $q = \frac{13}{11}$ et de premier terme 3.

17 Soit (u_n) la suite géométrique de raison 0,32 et de premier terme $u_0 = 1$.

1. Quelle est la limite de (u_n) ?
2. Que fait l'algorithme ci-contre ?

```
PROGRAM:SEUIL
:1→U
:0→N
:While U>0.0001
:U*0.32→U
:N+1→N
:End
:Disp N
```

18 Soit n un entier naturel et
$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

1. Montrer que $S_n = 2 \times (1 - 0{,}5^{n+1})$.
2. Montrer que $S_n < 2$ pour tout n.
3. Quelle est la limite de S_n ?
4. Déterminer le plus petit entier n tel que
$$1{,}9999 < S_n < 2.$$

19 Un globe-trotter a décidé de parcourir 5000 km à pied. Il peut, le premier jour, parcourir 50 km en une journée, mais la fatigue s'accumule et sa performance diminue de 1% chaque jour.
On note d_n la distance parcourue (en km) durant le $n^{\text{ième}}$ jour.

1. Calculer d_1, d_2,d_3.
2. a. Quelle est la nature de la suite (d_n) ? Préciser le premier terme et la raison.
b. En déduire que $d_n = 50 \times 0{,}99^{n-1}$.
3. a. Montrer que le nombre total S_n de kilomètres parcourus au bout de n jours est
$$S_n = 5000 \times (1 - 0{,}99^n).$$
b. Le globe-trotter peut-il atteindre son objectif ?
c. Donner la limite de (S_n).

4. On considère l'algorithme ci-dessous :

> **Entrée**
> Saisir $A > 0$
> **Initialisation**
> N prend la valeur 1
> S prend la valeur 50
> **Traitement**
> Tant que $S < A$
> S prend la valeur $S + 50 \times 0{,}99^N$
> N prend la valeur $N + 1$
> Fin tant que
> **Sortie**
> Afficher N

a. Un utilisateur lance l'algorithme avec $A = 140$. Quelle valeur de N affiche-t-il ?
b. Quel est le rôle de cet algorithme ?
c. À l'aide de la calculatrice déterminer le nombre minimal de jours qui lui seraient nécessaires pour parcourir 2500 km. Justifier.

Suites arithmético-géométriques

20 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et
$$u_{n+1} = 2u_n - 3.$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.
2. On pose $v_n = u_n - 3$.
a. Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3.
b. Montrer que (v_n) est géométrique de raison 2.
c. Exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

21 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4.$$

1. On pose $v_n = u_n - 8$.
a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
b. Exprimer v_n en fonction de n.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de (u_n).

22 Une association caritative a constaté que, chaque année, 20 % des donateurs de l'année précédente ne renouvelaient pas leur don mais que, chaque année, 300 nouveaux donateurs effectuaient un don.
On étudie l'évolution du nombre de donateurs au fil des années. On note u_n le nombre de donateurs lors de la $n^{\text{ième}}$ année.

1. Sachant que $u_1 = 1000$, calculer u_2 et u_3.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a
$$u_{n+1} = 0{,}8u_n + 300.$$
3. On introduit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $v_n = 1500 - u_n$.
a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Précisez sa raison et son premier terme.
b. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
c. Si la tendance se poursuit, combien y aura-t-il de donateurs dans 10 ans ?
d. L'association peut-elle espérer passer la barre des 1500 donateurs ? Justifier.
e. Quelle est la limite de (u_n) ? Interpréter.

23 *(2013, Amérique du Nord).* La bibliothèque municipale étant devenue trop petite, une commune a décidé d'ouvrir une médiathèque qui pourra contenir $100\,000$ ouvrages au total.
Pour l'ouverture prévue le 1er janvier 2013, la médiathèque dispose du stock de $35\,000$ ouvrages de l'ancienne bibliothèque augmenté de 7000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par la commune.

Partie A – Chaque année, la bibliothécaire est chargée de supprimer $5\,\%$ des ouvrages, trop vieux ou abîmés, et d'acheter 6000 ouvrages neufs.
On appelle u_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013+n)$.
On donne $u_0 = 42$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a
$$u_{n+1} = u_n \times 0{,}95 + 6.$$
2. On propose, ci-dessous, un algorithme, en langage naturel. Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

Variables
U, N
Initialisation
Mettre 42 dans U
Mettre 0 dans N
Traitement
Tant que $U < 100$
U prend la valeur $U \times 0{,}95 + 6$
N prend la valeur $N + 1$
Fin du Tant que
Sortie
Afficher N.

3. À l'aide de votre calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme.

Partie B – La commune doit finalement revoir ses dépenses à la baisse, elle ne pourra financer que 4000 nouveaux ouvrages par an au lieu des 6000 prévus.
On appelle (v_n) le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013+n)$.

1. Identifier et écrire la ligne qu'il faut modifier dans l'algorithme pour prendre en compte ce changement.
2. On admet que $v_{n+1} = v_n \times 0{,}95 + 4$ avec $v_0 = 42$.
On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier n, par $w_n = v_n - 80$.
   a. Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}95$ et préciser son premier terme w_0.
   b. Montrer que pour tout entier naturel n on a
$$w_n = -38 \times 0{,}95^n.$$
   c. Déterminer la limite de (w_n).
   d. En déduire la limite de (v_n).
   e. Interpréter ce résultat.

24 Dans un pays imaginaire, deux sociétés A et B se partagent le marché des fournisseurs d'accès à internet.
Les clients souscrivent le 1er janvier, soit auprès de A, soit auprès de B, un contrat d'un an au terme duquel ils sont libres de choisir à nouveau A ou B.
Cette année 2014 la société A détient 90 % du marché et la société B, qui vient de se lancer, 10 %. On estime que chaque année 20 % de la clientèle de A change pour B et, de même, 20 % de la clientèle change de B à A.
On considère une population représentative de 1000 clients de l'année 2014. Ainsi 900 sont clients de la société A et 100 sont clients de la société B. On veut étudier l'évolution de cette population les années suivantes.

1. Donner le nombre de clients en 2015 des entreprises A et B.
2. On note u_n le nombre l'année $(2014+n)$ de l'entreprise A.
   a. Établir que $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 0{,}2(1000 - u_n)$.
   b. En déduire que $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 200$.
3. On pose $v_n = u_n - 500$.
   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   b. En déduire que $u_n = 400 \times 0{,}6^n + 500$.
   c. Que peut-on prévoir pour l'évolution du marché des fournisseurs d'accès ?

25 *(2014, centres étrangers).* Dans une ville, un nouveau lycée vient d'ouvrir ses portes et accueille pour sa première rentrée 500 élèves. D'une année sur l'autre, le proviseur du lycée prévoit une perte de 30 % de l'effectif et l'arrivée de 300 nouveaux élèves.
On modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre d'élèves inscrits au lycée pour l'année $2013+n$, avec n entier naturel. On a donc $u_0 = 500$.

1. a. Calculer le nombre d'élèves qui seront inscrits au lycée en 2014.
   b. Calculer le nombre d'élèves qui seront inscrits au lycée en 2015.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a :
$$u_{n+1} = 0{,}7u_n + 300.$$
3. On souhaite, pour un entier n donné, afficher tous les termes de la suite (u_n) du rang 0 au rang n.
Lequel des trois algorithmes suivants permet d'obtenir le résultat souhaité ? Justifier.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
Variables : n, i entiers naturels u nombre réel **Début algorithme** Lire n u prend la valeur 500 Pour i allant de 1 à n Afficher u u prend la valeur $0{,}7u + 300$ Fin Pour **Fin algorithme**	**Variables :** n, i entiers naturels u nombre réel **Début algorithme** Lire n u prend la valeur 500 Pour i allant de 1 à n Afficher u u prend la valeur $0{,}7u + 300$ Fin Pour Afficher u **Fin algorithme**	**Variables :** n, i entiers naturels u nombre réel **Début algorithme** Lire n u prend la valeur 500 Pour i allant de 1 à n u prend la valeur $0{,}7u + 300$ Fin Pour Afficher u **Fin algorithme**

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par
$$v_n = u_n - 1000.$$
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}7$.
   b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = 1000 - 500 \times 0{,}7^n.$$
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
   d. Interpréter le résultat précédent.