Probabilités conditionnelles – Exercices

Probabilités conditionnelles

1 On choisit un jour de l'année. On considère les événements :

- P : « le jour choisi a été pluvieux » ;
- V : « le jour choisi a été venté »

Pour chacune des informations suivantes, indiquer si elle correspond ou non à une probabilité conditionnelle.

1. Dans l'année, 40 % des jours sont pluvieux.
2. 66 % des jours pluvieux sont ventés.
3. Parmi les jours non ventés, 22 % sont pluvieux.
4. 49 % des jours dans l'année n'ont été ni ventés ni pluvieux.

2 Dans une population, on choisit au hasard une personne et on considère les événements suivants :

- F : « la personne choisie est une femme » ;
- H : « la personne choisie est un homme » ;
- R : « la personne choisie est retraitée ».

Traduire chacune des informations suivantes par une probabilité conditionnelle.

1. Parmi les femmes, 25 % sont retraitées.
2. Un tiers des hommes sont retraités.
3. Chez les personnes retraitées, 45 % sont des femmes.
4. Lorsqu'on interroge un homme, la probabilité pour que ce ne soit pas un retraité est 67 %.
5. Parmi les personnes non retraitées, 55 % sont des femmes.

3 A et B sont des événements tels que $P(A) = 0{,}75$, $P(B) = 0{,}8$ et $P(A \cap B) = 0{,}3$. Déterminer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

4 Pour ses révisions, un élève utilise des annales de mathématiques. Dans ces annales, 10 % des exercices sont des QCM, 22 % des exercices ont des questions sur les probabilités et 4 % sont des QCM qui ont des questions sur les probabilités. On définit les événements suivants :

- Q : « l'exercice choisi est un QCM » ;
- R : « l'exercice choisi a des questions sur les probabilités ».

1. Donner $P(Q)$, $P(R)$ et $P(Q \cap R)$.
2. Calculer $P_Q(R)$ et $P_R(Q)$ et préciser par une phrase à quoi correspond chacune de ces probabilités.

5 Un sac contient 15 boules numérotées de 1 à 15. On tire une boule au hasard et on considère les événements :

- I : « la boule tirée porte un numéro impair » ;
- M : « la boule tirée porte un numéro multiple de 3 ».

1. Déterminer les probabilités $P(I)$ et $P(M)$.
2. Préciser par une phrase à quoi correspondent les probabilités $P(\bar{I})$, $P(I \cap M)$ et $P(\bar{I} \cap M)$.
   Calculer ces probabilités.
3. Mêmes questions avec $P_M(I)$ et $P_{\bar{I}}(M)$.

6 Dans une usine, deux machines produisent le même type de pièces. On choisit une pièce au hasard parmi les pièces produites dans l'usine et on considère les événements

- A : « la pièce choisie provient de la 1ère machine » ;
- B : « la pièce choisie provient de la 2nde machine » ;
- D : « la pièce choisie est défectueuse ».

On sait que $P(A) = 0{,}55$, $P_A(D) = 0{,}01$ et $P_B(D) = 0{,}02$.

1. Exprimer par une phrase la signification de ces probabilités.
2. Préciser la valeur de $P(B)$.
3. Calculer $P(A \cap D)$ et $P(B \cap D)$. Exprimer par une phrase la signification de ces probabilités.

7 A et B désignent deux événements tels que

$$P(A) = 0{,}45,\ P(B) = 0{,}5 \text{ et } P(A \cap B) = 0{,}3.$$

1. Compléter le tableau ci-dessous.

	A	$\bar{A}$	Total
B			
$\bar{B}$			
Total			

2. À l'aide du tableau, déterminer $P(\bar{A})$ et $P(\bar{A} \cap B)$.
3. En déduire $P_B(A)$ et $P_{\bar{A}}(B)$.

8 Trois machines A, B, C produisent respectivement 60 %, 30 % et 10 % du nombre total de boulons fabriqués dans une entreprise. Le pourcentages de boulons défectueux et provenant des machines A, B, C sont respectivement 2 %, 3 % et 4 %. On choisit au hasard un boulon dans la production de la journée.

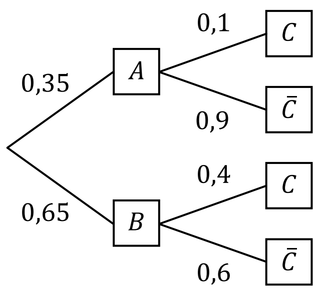
1. Compléter le tableau ci-contre.

Machine / Boulon	A	B	C	Total
Défectueux				
Non défectueux				
Total				

2. Quelle est la probabilité que le boulon soit défectueux ?
3. Sachant que le boulon choisi est défectueux, quelle est la probabilité que ce boulon ait été produit par la machine C ?

Arbres pondérés

9 L'arbre ci-contre représente une situation de probabilités.



1. Indiquer la signification des nombres 0,65 ; 0,1 et 0,6.
2. Lire la valeur des probabilités $P(A)$, $P_B(C)$ et $P_A(\bar{C})$.
3. Calculer $P(C)$ et $P(\bar{C})$.

10 Un site de vente par correspondance propose 2400 jeux vidéos dont 1296 sont des jeux pour console, le reste étant des jeux pour ordinateur.

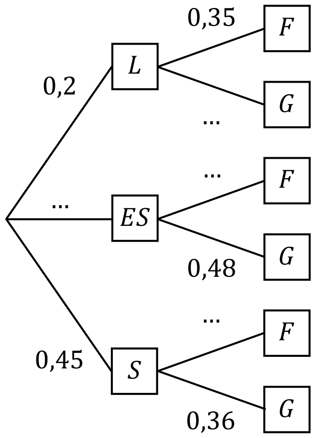
Un tiers des jeux pour console sont des jeux d'action et 25 % des jeux pour ordinateur sont des jeux d'action. On choisit au hasard un jeu proposé par le site. On définit les événements

- C : « le jeu est pour console » ;
- O : « le jeu est pour ordinateur » ;
- A : « le jeu est un jeu d'action ».

1. En utilisant les informations de l'énoncé, déterminer la valeur de $P(C)$, $P(O)$, $P_O(A)$ et $P_C(A)$.

2. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré et placer sur cet arbre chacune des probabilités déterminées à la question 1.
3. Calculer $P_O(\bar{A})$ et $P_C(\bar{A})$ et compléter l'arbre pondéré.

11 Un groupe de lycéens est formé d'élèves de L, ES ou S. Ces élèves sont des filles (F) ou des garçons (G). Un élève est choisi au hasard dans le groupe.
L'arbre pondéré ci-contre représente cette situation.

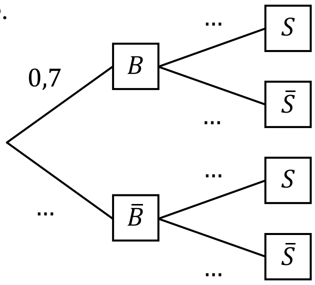


1. Préciser la valeur de $P(L)$ et $P_L(F)$. À quoi correspondent ces probabilités ?
2. Compléter cet arbre avec les probabilités manquantes et donner, pour chacune de ces probabilités, la notation correspondante.
3. Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit une fille de ES ?
4. En utilisant les questions précédentes, compléter le tableau de probabilités suivant.

	L	ES	S	Total
Filles				
Garçons				
Total				1

12 **(risque d'erreur)** Un chalutier se rend sur sa zone de pêche. La probabilité qu'un banc de poissons soit sur cette zone est 0,7. Le chalutier est équipé d'un sonar pour détecter la présence d'un banc de poissons. Si un banc est présent, le sonar indique la présence du banc dans 80 % des cas. S'il n'y a pas de banc de poissons dans la zone de pêche, le sonar indique néanmoins la présence d'un banc dans 5 % des cas. On définit les événements suivants :

- B : « il y a un banc de poissons sur la zone » ;
- S : « le sonar indique l'existence d'un banc ».



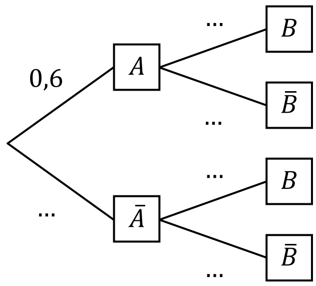
1. Compléter l'arbre ci-contre.
2. Déterminer la probabilité qu'il y ait un banc de poissons et qu'il soit détecté par le sonar.
3. Calculer la probabilité qu'il n'y ait pas de banc de poisson mais que le sonar en détecte un.
4. Le sonar détecte un banc. Quelle est la probabilité qu'il se trompe ?

13 Amateur de sudoku, Pierre s'entraîne sur internet.
40 % des grilles qui y sont proposées sont de niveau facile, 30 % sont de niveau moyen et 30 % de niveau difficile.
Pierre sait qu'il réussit les grilles de sudoku de niveau facile dans 95 % des cas, les grilles de niveau moyen dans 60 % des cas et les difficiles dans 40 % des cas. Une grille de sudoku lui est proposée de façon aléatoire.
On considère les événements

- F : « la grille est de niveau facile » ;
- M : « la grille est de niveau moyen » ;
- D : « la grille est de niveau difficile » ;
- R : « Pierre réussit la grille ».

1. Traduire les données à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Montrer que la probabilité que Pierre réussisse la grille est 0,68.
3. Sachant que Pierre n'a pas réussi la grille proposée, quelle est la probabilité qu'elle soit de niveau moyen ?
4. Pierre a réussi la grille proposée. Sa petite sœur affirme « je pense que la grille était facile ». Dans quelle mesure a-t-elle raison ? Justifier par un calcul.

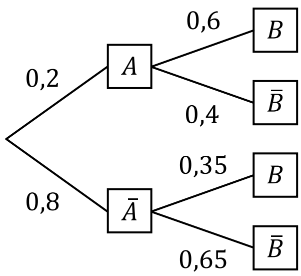
14 A et B désigne des événements tels que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,4$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,3$.

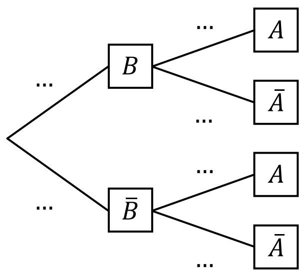


1. Déterminer $P(\bar{A})$ ainsi que $P_{\bar{A}}(B)$.
2. Calculer $P(\bar{A} \cap B)$ puis $P(A \cap B)$.
3. Calculer $P_B(A)$ et $P_B(\bar{A})$.
4. Compléter l'arbre ci-contre.

Problèmes, sujets de bac

15 **(inversion d'un arbre)** Une situation est modélisée par l'arbre ci-dessous à gauche, A et B désignant deux événements.
On se propose de compléter l'arbre à droite, appelé arbre inverse du précédent.





1. **a.** En utilisant l'arbre initial, calculer $P(A \cap B)$ ainsi que $P(\bar{A} \cap B)$.
   b. En déduire $P(B)$.
2. Calculer $P_B(A)$.
3. Calculer de même $P_{\bar{B}}(A)$.
4. Compléter l'arbre inversé.

16 Suite à une panne technique, un distributeur de boissons ne tient aucun compte de la commande faite par le client. Cette machine distribue soit un expresso, soit du chocolat, soit du thé en suivant une programmation erronée. Chaque boisson peut être sucrée ou non.

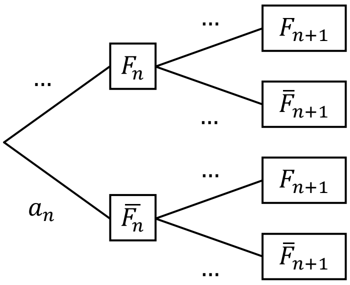
- La probabilité d'obtenir un expresso est $\frac{1}{2}$;
- la probabilité d'obtenir un thé sucré est $\frac{2}{9}$;
- si l'on obtient un expresso, la probabilité qu'il soit sucré est $\frac{5}{9}$;
- si l'on obtient un chocolat, la probabilité qu'il soit sucré est $\frac{1}{3}$.

On considère les événements suivants :

- T : « on a obtenu un thé » ;
- E : « on a obtenu un expresso » ;
- C : « on a obtenu un chocolat » ;
- S : « la boisson obtenue est sucrée ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation.
2. Calculer la probabilité d'obtenir un expresso sucré.
3. On sait que la probabilité d'obtenir une boisson sucrée est $\frac{5}{9}$. En déduire que la probabilité d'obtenir un chocolat sucré est $\frac{1}{18}$.
4. En déduire la probabilité d'obtenir un chocolat puis celle d'obtenir un thé.
5. Calculer $P_T(\bar{S})$.
6. Une personne programme la machine et obtient une boisson non sucrée. Son ami lui affirme : « Je pense que ta boisson est un expresso ! ». Dans quelle mesure a-t-il raison ? Justifier la réponse à l'aide d'un calcul.

17 Pierre a décidé d'arrêter de fumer. On admet que
- s'il ne fume pas un jour donné, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est 0,4 ;
- s'il fume un jour, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est 0,9.



Pour tout entier $n \geq 1$, on considère les événements
- F_n : « Pierre fume le $n^{\text{ième}}$ jour » ;
- $\bar{F}_n$: « Pierre ne fume pas le $n^{\text{ième}}$ jour ».

On note $a_n = P(\bar{F}_n)$ la probabilité que Pierre ne fume pas le $n^{\text{ième}}$ jour . Aujourd'hui Pierre ne fume pas, donc $a_1 = 1$.

1. **a.** Justifier que $P(F_n) = 1 - a_n$.
   b. Compléter l'arbre ci-dessus.
   c. Montrer que $a_{n+1} = -0{,}5a_n + 0{,}9$.
   d. Compléter le tableau suivant.

n	1	2	3	4	5
a_n					

2. On pose $u_n = a_n - 0{,}6$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_1.
   b. Exprimer u_n en fonction de n et en déduire que pour tout $n \geq 1$, on a $a_n = 0{,}4(-0{,}5)^{n-1} + 0{,}6$.

18 *(Amérique du Sud 2013)* Un producteur de fruits rouges propose en vente directe des framboises, des groseilles et des myrtilles.
Le client peut acheter, soit des barquettes de fruits à déguster, soit des barquettes de fruits à confiture.
Le producteur a remarqué que, parmi ses clients, 9 sur 10 achètent une barquette de fruits à confiture. Lorsqu'un client achète une barquette de fruits à confiture, la probabilité qu'il demande une barquette de myrtilles est de 0,3 et la probabilité qu'il demande une barquette de groseilles est de 0,5.
Lorsqu'un client achète une barquette de fruits à déguster, il ne demande jamais des groseilles et demande des framboises dans 60 % des cas.
Un client achète une barquette. On considère :
- C « le client achète une barquette de fruits à confiture » ;
- F : « le client demande des framboises » ;
- G : « le client demande des groseilles » ;
- M : « le client demande des myrtilles ».

1. Construire un arbre modélisation la situation.
2. **a.** Calculer la probabilité que le client demande des framboises sachant qu'il achète une barquette de fruits à confiture.
   b. Le client achète une barquette de fruits à déguster ; Donner la probabilité qu'il demande des myrtilles.
3. Montrer que la probabilité que le client achète une barquette de framboises est égale à 0,24.
4. Le client achète une barquette de framboises. Quelle est la probabilité que ce soit une barquette de fruits à confiture ?
5. Le producteur vend 5 euros la barquette de fruits à confiture, quel que soit le fruit, 2 euros la barquette de framboises à déguster et 3 euros la barquette de myrtilles à déguster.
   a. On note x_i les valeurs possibles, en euros, du gain du producteur par barquette vendue et p_i leur probabilité. Compléter le tableau suivant donnant la loi du gain du producteur par barquette vendue.

Valeur x_i	5	2	3
Probabilité p_i			

   b. Calculer l'espérance de cette loi de probabilité.
   c. Déterminer le gain en euros que le producteur peut espérer pour 150 barquettes vendues ?

19 *(Guyane-Antilles 2011)* Dans un magasin spécialisé en électroménager et multimédia, le responsable du rayon informatique fait le bilan sur les ventes d'ordinateurs portables, de tablettes, et d'ordinateurs fixes. Pour ces trois types de produit, le rayon informatique propose une extension de garantie.
Le responsable constate que 28 % des acheteurs ont opté pour une tablette, et 48 % pour un ordinateur portable.
Dans cet exercice, on suppose que chaque acheteur achète un unique produit entre tablette, ordinateur portable, ordinateur fixe, et qu'il peut souscrire ou non une extension de garantie.
Parmi les acheteurs ayant acquis une tablette, 5 % ont souscrit une extension de garantie et, parmi ceux ayant acquis un ordinateur fixe, 12,5 % ont souscrit une extension de garantie.
On choisit au hasard un de ces acheteurs.
On note :
- T l'évènement « l'acheteur a choisi une tablette » ;
- M l'évènement « l'acheteur a choisi un ordinateur portable » ;
- F l'évènement « l'acheteur a choisi un ordinateur fixe » ;
- G l'évènement « l'acheteur a souscrit une extension de garantie ».

On note aussi $\bar{F}$, $\bar{M}$, $\bar{T}$, $\bar{G}$ les évènements contraires.

1. Construire un arbre pondéré en indiquant les données de l'énoncé.
2. Calculer $P(F)$, puis $P(F \cap G)$.
3. On sait de plus que 12 % des acheteurs ont choisi un ordinateur portable avec une extension de garantie.
   Déterminer la probabilité qu'un acheteur ayant acquis un ordinateur portable souscrive une extension de garantie.
4. Montrer que $P(G) = 0{,}164$.
5. Pour tous les appareils, l'extension de garantie est d'un montant de 50 euros. Quelle recette complémentaire peut espérer le responsable du rayon lorsque 1000 appareils seront vendus ?