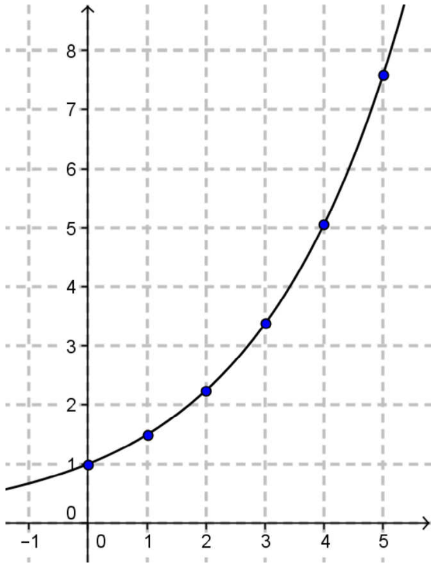
Fonctions exponentielles

1. Fonctions exponentielles de base q

❖ **Fonction $x \mapsto q^x$, avec $q > 0$**



Définition. *Soit q un réel strictement positif. La suite de terme général $u_n = q^n$ est une suite géométrique. La fonction exponentielle de base q est le prolongement de cette suite. Elle est définie par $f(x) = q^x$.*

Théorème. La fonction exponentielle de base q est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème. Pour tout réel x, on a
$$q^x > 0.$$

On a représenté ci-contre la fonction $x \mapsto 1{,}5^x$ ainsi que les premiers termes de la suite $1{,}5^n$.

Théorème (sens de variation). En accord avec le sens de variation des suites (q^n) on a que, pour une fonction exponentielle de base q, avec $q > 0$

- si $q > 1$, la fonction $x \mapsto q^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- si $0 < q < 1$, la fonction $x \mapsto q^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;
- si $q = 1$, la fonction $x \mapsto q^x = 1$ est constante sur $\mathbb{R}$;

❖ **Formules de calcul**

Théorème. Soit f la fonction exponentielle de base $q > 0$, $f(x) = q^x$. Elle transforme les produits en sommes : $f(x + y) = f(x)f(y)$ ou encore
$$q^{x+y} = q^x \times q^y.$$

Il en résulte les formules suivantes, pour $q > 0$.

- $q^0 = 1$ et $q^1 = q$;
- pour tous réels x et y, on a $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$ et $q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y}$;
- pour tout réel x et tout entier n, on a $(q^x)^n = q^{nx}$.
- pour tout entier $n > 0$, le nombre $q^{\frac{1}{n}}$ est tel que $\left(q^{\frac{1}{n}}\right)^n = q$, on l'appelle « racine n-ième de q ».

Exemple

- $1{,}03^{x+1} = 1{,}03^x \times 1{,}03$;
- $2{,}5^{2x-1} = \frac{2{,}5^{2x}}{2{,}5^1} = \frac{(2{,}5^2)^x}{2{,}5} = 0{,}4 \times 6{,}25^x$;
- $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$;
- $16^{\frac{1}{4}} = 2$, en effet $2^4 = 16$.

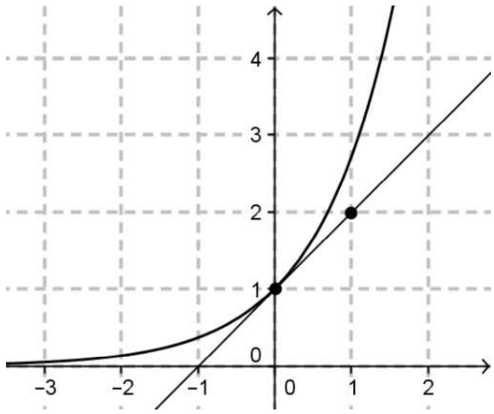
2. Fonction exponentielle de base e

❖ Fonction exp et nombre *e*

Définition. *Parmi toutes les fonctions exponentielles f de base q, une seule vérifie $f'(0) = 1$. On appelle sa base e, on l'appelle fonction exponentielle de base e ou plus simplement <u>fonction exponentielle</u> et on la note* exp.
On a donc par définition $\exp x = e^x$, $\exp' 0 = 1$ *et* $\exp 1 = e$.

Le nombre e vaut environ $2{,}718 > 1$ donc exp est croissante.
Pour tout x, on a $e^x > 0$.
Comme toute fonction exponentielle, la fonction exp transforme les sommes en produit. On a donc :

- $e^0 = 1$;
- pour tous réels x et y, $e^{x+y} = e^x e^y$; $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ et en particulier $e^x e^{-x} = 1$;
- pour tous reéls x et y, $(e^x)^y = e^{xy}$, en particulier $e^{2x} = (e^x)^2$.



<u>Exemple</u>

- $e^{x+1} = e^x \times e^1 = e^x \times e$;
- $e^{3x+1} \times e^{-x+2} = e^{3x+1-x+2} = e^{2x+3}$;
- $e^x(e^{-x} + 2e^x) = e^x \times e^{-x} + e^x \times 2e^x = 1 + 2e^{2x}$;

❖ Résolution d'équations

Comme pour tout $x > 0$, on a $e^x > 0$, l'équation $e^x = k$ n'a pas de solution si $k \leq 0$.

Théorème. Soit A et B deux réels. On a
$$e^A = e^B \Leftrightarrow A = B.$$
Autrement dit, deux exponentielles sont égales si et seulement si leurs exposants sont égaux.

En particulier comme $1 = e^0$, l'équation $e^A = 1$ équivaut à $A = 0$.

<u>Exemple</u>

- $e^{2x+1} = 1 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$;
- $e^{3x-1} = e^{2-x} \Leftrightarrow 3x - 1 = 2 - x \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$.

3. Étude de la fonction exponentielle (de base e)

❖ Fonction dérivée et convexité

Théorème. La dérivée de la fonction exponentielle est elle-même. Autrement dit si l'on pose $f(x) = e^x$, alors $f'(x) = e^x$.

Exemple

Soit $f(x) = (2x-3)e^x$. Alors par la formule donnant la dérivée d'un produit

$$f'(x) = 2 \times e^x + (2x-3) \times e^x$$

donc en mettant e^x en facteur, $f'(x) = (2x-1)e^x$. L'étude du signe de f' est alors très simple puisque $e^x > 0$ pour tout x.

Comme $f''(x) = e^x > 0$ on a le résultat suivant.

Théorème. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

❖ Résolution d'inéquations

Théorème. Soit A et B deux réels. On a

$$e^A \leq e^B \Leftrightarrow A \leq B.$$

En particulier comme $e^0 = 1$, on a

$$e^A \geq 1 \Leftrightarrow A \geq 0 \text{ et } e^A \leq 1 \Leftrightarrow A \leq 0.$$

Exemple

Soit l'équation $e^{3x-1} \leq e^{2-x}$. D'après le théorème $e^{3x-1} \leq e^{2-x} \Leftrightarrow 3x-1 \leq 2-x \Leftrightarrow 4x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{4}$, donc $S = \left]-\infty; \frac{3}{4}\right]$.

4. Fonction e^u

Définition. *Étant donné une fonction u, on appelle exponentielle de u la fonction définie par $x \mapsto e^{u(x)}$, notée e^u.*

Exemple

Les fonctions $f(x) = e^{2x-1}$ et $g(x) = e^{\frac{x^2+1}{x}}$ sont des exponentielles de fonction. On peut aussi écrire $g(x) = \exp\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ pour des raisons de place.

Théorème. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u' \times e^u$, c'est-à-dire qu'en posant $f(x) = e^{u(x)}$, on a $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$.

Exemple

Soit $f(x) = e^{3x-2}$. Alors $f'(x) = 3e^{3x-2}$.
Soit $g(x) = e^{x^2-4}$. Alors $g'(x) = 2xe^{x^2-4}$.