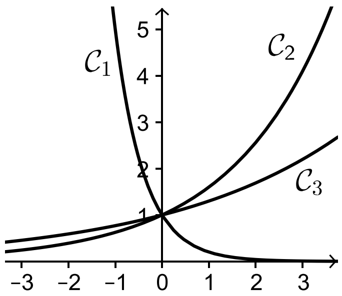
# Fonctions exponentielles – Exercices

## Fonctions exponentielles de base $q$

**1** On a représenté ci-contre les fonctions $f_1$, $f_2$, $f_3$ définies par

- $f_1(x) = 0{,}2^x$
- $f_2(x) = 1{,}3^x$
- $f_3(x) = 1{,}6^x$

Associer en justifiant chaque fonction à sa courbe.




**2** Donner les variations des fonctions $f_1$, $f_2$, $f_3$ définies par $f_1(x) = \left(\frac{7}{9}\right)^x$, $f_2(x) = 1{,}21^x$ et $f_3(x) = 0{,}98^x$.

**3** Vrai ou faux ? Justifier. Pour tout réel $x$,

**a.** $4 \times 2^x = 2^{x+2}$ **b.** $\frac{5^{x+3}}{2^x} = 125 \times 2{,}5^x$

**c.** $\frac{8^x}{2^{x-2}} = 4^{x+1}$ **d.** $\frac{(2^x)^3}{4^{x+1}} = 2^{x-2}$

**4** Simplifier les expressions suivantes.

**a.** $16^{\frac{1}{2}}$ **b.** $4^{-\frac{1}{2}}$ **c.** $4^{\frac{1}{4}} \times \sqrt{2}$

## Propriétés de calcul de exp

**5** Écrire sous la forme $e^k$ les expressions suivantes, où $k$ est un entier relatif.

**a.** $e^2 \times e^4$ **b.** $e^3 \times e^{-4}$ **c.** $(e^{-1})^2 \times e^2$

**d.** $e^{\frac{5}{2}} \times \sqrt{e}$ **e.** $\frac{e^{-4}}{e} \times e^{10}$ **f.** $\frac{(e^2)^3}{e^4}$

**6** Simplifier les expressions suivantes.

**a.** $e^{-x} \times e^x$ **b.** $e^{x+2} \times e^{3x}$ **c.** $e^{2-x} \times e^{x-1}$

**d.** $\frac{e^{4x}}{e^{2x}}$ **e.** $\frac{e^{1-x}}{e^{3x+4}}$ **f.** $\frac{(e^{x-1})^2}{e^{2x}}$

**7** (*Bac 2013, Amérique du Nord*). Donner la bonne réponse.

1. Pour tout réel non nul $a$, le réel $e^{-\frac{1}{a}}$ est égal à

   **a.** $-e^{\frac{1}{a}}$ **b.** $\frac{1}{e^{\frac{1}{a}}}$ **c.** $\frac{1}{e^a}$ **d.** $e^a$

2. Pour tout réel $a$, le réel $e^{\frac{a}{2}}$ est égal à

   **a.** $\sqrt{e^a}$ **b.** $\frac{e^a}{2}$ **c.** $\frac{e^a}{e^2}$ **d.** $e^{\sqrt{a}}$

## Résolution d'équations et inéquations

**8** Résoudre les équations suivantes.

**a.** $e^x = e^{2x}$ **b.** $e^{2x+3} = 1$ **c.** $e^{-x^3+x} = 0$

**d.** $e^{4x-1} = e^{x+5}$ **e.** $e^x - e^{-x} = 0$ **f.** $e^{4x} = \frac{1}{e}$

**9** Montrer que l'équation $e^x = 2$ n'admet qu'une seule solution sur $[0; 1]$, puis déterminer un encadrement à $10^{-3}$ de la solution.

**10** Résoudre les inéquations suivantes.

**a.** $e^{x+1} \leq e^{2x}$ **b.** $e^x < 1$ **c.** $e^{-x+5} < e^x$

**d.** $e^{2x+4} \geq 1$ **e.** $e^x < \frac{1}{e^x}$ **f.** $e^{x^2+2x} > 1$

**11** Déterminer le signe des expressions suivantes sur $\mathbb{R}$.

**a.** $A(x) = xe^x$ **b.** $B(x) = (x+1)e^x$

**c.** $C(x) = (2-x)e^{-x}$ **d.** $D(x) = (x+1)e^{x-1}$

## Étude de fonctions

**12** Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée et en déduire les variations.

**a.** $f(x) = e^x + 2x$ **b.** $g(x) = -4e^x$

**13** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.

1. Conjecturer les variations de $f$ à l'aide de la calculatrice.
2. Montrer que $f'(x) = (x+1)e^x$.
3. En déduire les variations de $f$.

**14** Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée et en déduire les variations.

**a.** $f_1(x) = (x+2)e^x$ **b.** $f_2(x) = 2(3-x)e^x$

**c.** $f_3(x) = x^2e^x$ **d.** $f_4(x) = (3-x^2)e^x$

**15** Soit $f$ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. En déduire les variations de $f$ sur $]0; +\infty[$.
3. On admet que $f''(x) = \frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}$.
   **a.** Déterminer le signe de $x^2 - 2x + 2$.
   **b.** Étudier la convexité de $f$.

**16** Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$.

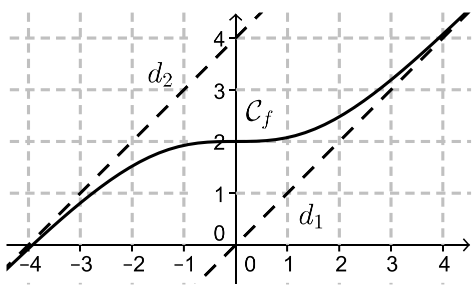
1. Étudier les variations de $f$.
2. Utiliser l'impression d'écran ci-contre pour construire le tableau de signe de $f''$.
3. En déduire que la courbe de $f$ admet un point d'inflexion dont on donnera les coordonnées.

| |
|---|
| f(x):=e^x/(e^x+1)<br>$(x) \text{−>} \dfrac{e^x}{e^x+1}$ |
| factoriser(deriver(deriver(f(x))))<br>$\dfrac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$ |

**17** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \frac{4}{1+e^x}$.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ de $f$ ainsi que les droites $d_1$ et $d_2$ d'équations respectives

$y = x$ et $y = x + 4$.




1. Conjecturer les positions relatives de $\mathcal{C}$ avec $d_1$ et $d_2$.
2. **a.** Étudier le signe de $f(x) - x$.
   **b.** En déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et $d_1$.
3. **a.** Montrer que $f(x) - x = \frac{-4e^x}{1+e^x}$.
   **b.** En déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et $d_2$.
4. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu que $f'(x) = \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$.

**a.** Déterminer les variations de $f$.
**b.** Justifier que $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale.

## Fonction $e^u$

**18** Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée et en déduire les variations.

**a.** $f(x) = e^{-x} - x^3$ **b.** $g(x) = e^{x^3}$

**19** Soit $f$ la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

1. Conjecturer les variations de $f$ à l'aide de la calculatrice.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.
3. En déduire les variations de $f$.

**20** Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée et en déduire les variations.

**a.** $f_1(x) = (x+2)e^{-x}$ **b.** $f_2(x) = x^2e^{-x}$
**c.** $f_3(x) = (2x+3)e^{x^2}$ **d.** $f_4(x) = (3-x^2)e^{-x}$

**21** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x + 1 + xe^{-x}.$$
Soit $C_f$ sa courbe représentative.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ et montrer que $f''(x) = (x-2)e^{-x}$.
   **b.** Étudier le signe de $f''$, en déduire les variations de $f'$ puis que pour tout $x$, $f'(x) > 0$.
   **c.** En déduire les variations de $f$.
2. **a.** Étudier la convexité de $f$ et montrer que $C_f$ admet un point d'inflexion $I$.
   **b.** Déterminer l'équation de la tangente $T$ à $C_f$ en $I$.
   **c.** Montrer que $T$ passe par le point de coordonnées $(4; 5)$.

**22** Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = (x^2+1)e^{-x}$.
Répondre aux questions suivantes en s'aidant de la copie d'écran d'un logiciel de calcul formel ci-contre.

| |
|---|
| f(x):=(x^2+1)*e^(-x)<br>$(x)\text{−>}\ (x^2+1)e^{-x}$ |
| g(x) :=factoriser(deriver(f(x)))<br>$(x)\text{−>}\ -(x-1)^2e^{-x}$ |
| factoriser(deriver(g(x)))<br>$(x)\text{−>}\ (x-3)(x-1)e^{-x}$ |

1. Déterminer les variations de $f$.
2. Déterminer si $f$ admet un point d'inflexion.

**23** Une société extrait du gravier pour la construction d'autoroute. Elle envisage l'ouverture d'un nouveau site d'extraction. Au bout de $x$ centaines de jours d'exploitation, la production journalière sur ce site, en millier de tonnes, est $f(x) = (2x^2+3x)e^{-x}$, où $x \in [0; 6]$.

1. **a.** Démontrer que pour tout $x \in [0; 6]$
   $$f'(x) = (-2x^2 + x + 3)e^{-x}.$$
   **b.** Construire le tableau de variation de $f$.
   **c.** Déterminer au bout de combien de jours après l'ouverture du site la production journalière sera maximale. Quelle est cette production maximale ?
2. **a.** Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = 1$ sur $[0; 6]$.
   **b.** Déterminer au bout de combien de jours la production sera inférieure à 1000 tonnes par jour après avoir été maximale.

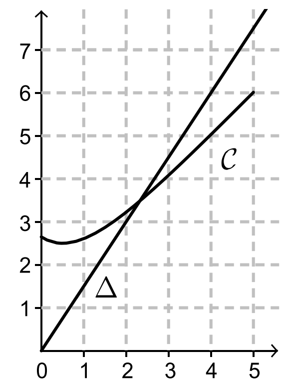
**24** QCM, une seule réponse est exacte. Il faut justifier.
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = (2x-1)e^{-x}.$$

1. On a…
   **a.** $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{e}}$ **b.** $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{e}}$
   **c.** $f(0) = 1$ **d.** $f(1) = \frac{1}{e}$
2. La courbe représentative de $f$ est située au-dessous l'axe des abscisses sur…
   **a.** $\mathbb{R}$ **b.** jamais
   **c.** $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ **d.** $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$
3. La dérivée $f'$ est donnée par $f'(x) = \dots$
   **a.** $(-2x+3)e^{-x}$ **b.** $(2x-1)e^{-x}$
   **c.** $(2x+1)e^{-x}$ **d.** $-2e^{-x}$
4. Le maximum de $f$ est…
   **a.** $\frac{2e}{\sqrt{e}}$ **b.** 0,44
   **c.** $2e^{\frac{3}{2}}$ **d.** $\frac{2}{e\sqrt{e}}$
5. La dérivée $f''$ est donnée par $f''(x) = \dots$
   **a.** $(2x-5)e^{-x}$ **b.** $2e^{-x}$
   **c.** $(-2x+1)e^{-x}$ **d.** $(-2x-1)e^{-x}$
6. La fonction $f$ est convexe sur…
   **a.** $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$ **b.** $]-\infty; 0]$
   **c.** $[1; +\infty[$ **d.** $[2; 4]$
7. La tangente au point d'abscisse 0 à la courbe de $f$ a pour équation…
   **a.** $y = 2x - 1$ **b.** $y = 3x$
   **c.** $y = 3x - 1$ **d.** $y = 2x$
8. L'équation $f(x) = 0{,}1$ admet sur l'intervalle $[0; 4]$ …
   **a.** 0 solution **b.** 1 solution
   **c.** 2 solutions **d.** on ne peut pas savoir
9. Un encadrement à $10^{-2}$ près de la solution $\alpha$ de l'équation $f(x) = -2$ est…
   **a.** $-0{,}27 < \alpha < -0{,}26$ **b.** $-0{,}26 < \alpha < -0{,}27$
   **c.** $-36{,}95 < \alpha < -36{,}94$ **d.** $0{,}40 < \alpha < 0{,}41$

## Sujet du baccalauréat

**25** *(Bac 2014, Liban).*
**Partie A** – On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0; 5]$ par
$$f(x) = x + 1 + e^{-x+0{,}5}.$$
On a représenté ci-contre, dans un plan muni d'un repère orthonormé

- la courbe $C$ représentative de la fonction $f$ ;
- la droite $\Delta$ d'équation $y = 1{,}5x$.




1. **a.** Vérifier que pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $[0; 5]$, on a
   $$f'(x) = 1 - e^{-x+0{,}5}.$$
   **b.** Résoudre dans l'intervalle $[0; 5]$ l'équation
   $$f'(x) = 0.$$
   **c.** Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 5]$.
   **d.** Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0; 5]$.
2. On note $\alpha$ l'abscisse du point d'intersection de $C$ et $\Delta$.
   **a.** Donner, par lecture graphique, un encadrement de $\alpha$ à 0,5 près.

**b.** Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[0;5]$ l'inéquation $f(x) < 1{,}5x$.

**Partie B – Application**

Une entreprise fabrique des cartes à puces électroniques à l'aide d'une machine.

La fonction $f$, définie dans la partie A, représente le coût d'utilisation de la machine en fonction de la quantité $x$ de cartes produites, lorsque $x$ est exprimé en centaines de cartes et $f(x)$ en centaines d'euros.

**1.** **a.** Déduire de la partie A, le nombre de cartes à produire pour avoir un coût minimal d'utilisation de la machine.

**b.** Chaque carte fabriquée par la machine est vendue 1,50 €.

La recette perçue pour la vente de $x$ centaines de cartes vaut donc $1{,}5x$ centaines d'euros. Vérifier que le bénéfice obtenu, en centaines d'euros, par la vente de $x$ centaines de cartes est donné par

$$B(x) = 0{,}5x - 1 - e^{-x+0{,}5}.$$

**2.** **a.** Montrer que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle $[0;5]$.

**b.** Montrer que, sur l'intervalle $[0;5]$, l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution comprise entre 2,32 et 2,33.

**3.** On dira que l'entreprise réalise un bénéfice lorsque $B(x) > 0$.

Indiquer la quantité minimale qui doit figurer sur le carnet de commandes de l'entreprise pour que celle-ci puisse réaliser un bénéfice.

**26** *(Bac 2013, Liban).*

**Partie A** – On considère la fonction $C$ définie sur l'intervalle $[5;60]$ par

$$C(x) = \frac{e^{0{,}1x}+20}{x}.$$

**1.** On désigne par $C'$ la dérivée de la fonction $C$. Montrer que pour tout $x \in [5;60]$,

$$C'(x) = \frac{0{,}1xe^{0{,}1x} - e^{0{,}1x} - 20}{x^2}.$$

**2.** On considère la fonction $f$ définie sur $[5;60]$ par

$$f(x) = 0{,}1xe^{0{,}1x} - e^{0{,}1x} - 20.$$

**a.** Montrer que la fonction $f$ est strictement croissante sur $[5;60]$.

**b.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution $\alpha$ dans $[5;60]$.

**c.** Donner un encadrement à l'unité de $\alpha$.

**d.** En déduire le tableau de signe de $f(x)$ sur $[5;60]$.

**3.** En déduire le tableau de variation de $C$ sur $[5;60]$.

**4.** En utilisant le tableau de variations précédent, déterminer le nombre de solutions des équations suivantes :

**a.** $C(x) = 2$ ;

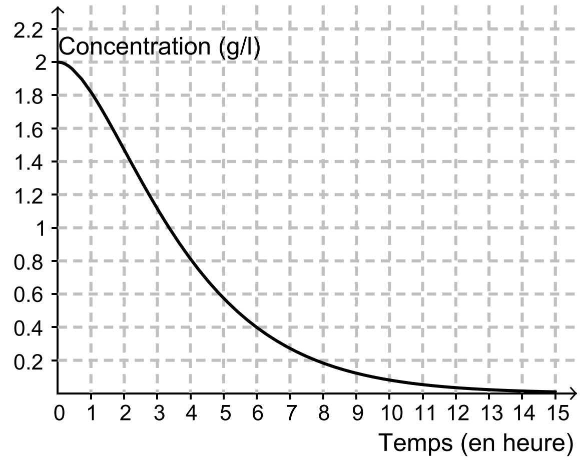
**b.** $C(x) = 5$.

**Partie B** – Une entreprise fabrique chaque mois $x$ vélos de course, avec $x$ appartenant à l'intervalle $[5;60]$.

Le coût moyen de fabrication, exprimé en millier d'euros, pour une production de $x$ vélos de course, est donné par la fonction $C$ définie dans la partie A.

Déterminer le nombre de vélos à produire pour que le coût de fabrication moyen soit minimal.

**27** *(Bac 2014, Métropole).* On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang. On obtient la courbe fournie ci-dessous.




**Partie A – Étude graphique**

Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

**1.** la concentration à l'instant initial ;

**2.** l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 gramme par litre.

On fera apparaitre sur le graphique les traits de construction nécessaires.

**Partie B – Étude théorique**

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction $f$ définie par $f(x) = (x+2)e^{-0{,}5x}$ sur l'intervalle $[0;15]$, où $x$ représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

**1.** Justifier que $f'(x) = -0{,}5xe^{-0{,}5x}$ et en déduire le tableau de variation de la fonction $f$ sur $[0;15]$.

**2.** Justifier que l'équation $f(x) = 0{,}1$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $[0;15]$.

**3.** Déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude un dixième.

**4.** Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

| | |
|---|---|
| 1 | deriver((x+2)∗exp(-0.5∗x)) |
| | exp(-0.5x)-0.5∗exp(-0.5x)∗(x +2) |
| 2 | deriver(exp(-0.5∗x)-0.5∗exp (-0.5∗x)∗(x+2)) |
| | -exp(-0.5∗x)+0.25∗exp (-0.5∗x)∗(x+2) |
| 3 | factoriser(-exp(-0.5∗x)+0.25∗exp(-0.5∗x)∗(x +2)) |
| | (0.25∗x-0.5)∗exp (-0.5∗x) |

En vous appuyant sur ces résultats, étudier la convexité de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0;15]$ et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.

**Partie C – Interprétation des résultats**

En vous aidant des résultats obtenus, soit dans la partie B, soit par lecture graphique et sans justifier, répondre aux questions ci-dessous.

**1.** On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?

**2.** Au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle ?