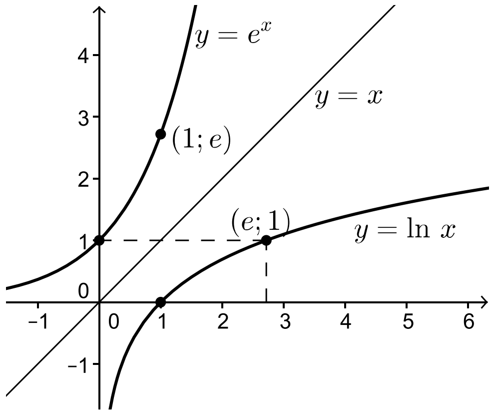
Fonction logarithme népérien

1. La fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et prend des valeurs strictement positives. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $e^x = k$ admet une unique solution pour tout réel $k > 0$.

Définition. *On appelle* <u>*logarithme népérien du réel strictement positif k*</u> *l'unique solution de l'équation* $e^x = k$. *On note cette solution* $\ln k$ *et on lit « logarithme népérien de k ».*
Ainsi à chaque réel strictement positif k, *on fait correspondre un unique réel* $\ln k$. *On définit par ce procédé une fonction sur* $]0;+\infty[$ *appelée logarithme népérien.*



On a donc pour tous réels x et y avec $x > 0$

$$y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x.$$

Les courbes représentatives des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

<u>Exemple</u>

- Par définition, la solution de l'équation $e^x = 5$ est $x = \ln 5$, ainsi $e^{\ln 5} = 5$.
- Calculons $\ln e^5$. Par définition, ce nombre est la solution de l'équation $e^x = e^5$. Mais la solution est $x = 5$, ainsi $\ln e^5 = 5$.

Théorème.
1. La fonction ln est définie et continue sur $]0;+\infty[$.
2. Pour tout réel x on a $\ln e^x = x$ et pour tout réel **positif** x on a $e^{\ln x} = x$
3. $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$

<u>Exemple</u>

$e^{\ln 2} = 2$; $\ln e^3 = 3$; $\ln\frac{1}{e} = \ln e^{-1} = -1$; $\ln(e^2 \times e^{x+1}) = e^{x+3} = x + 3$.

Théorème. Pour tous réels x, y strictement positifs, on a

$$\ln(x \times y) = \ln x + \ln y.$$

Démonstration. D'une part $e^{\ln(xy)} = xy$ et d'autre part $e^{\ln x + \ln y} = e^{\ln x}e^{\ln y} = xy$. On a donc $e^{\ln(xy)} = e^{\ln x + \ln y}$, d'où $\ln(xy) = \ln x + \ln y$. ■

Conséquences. Pour $x > 0$, on a
- $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$;
- $\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$ (et $y > 0$) ;
- $\ln x^y = y \ln x$ (et $y \in \mathbb{R}$).

Exemple

- $\ln 3e = \ln 3 + \ln e = 1 + \ln 3$;
- $\ln 2 - \ln 3 + 2\ln 5 = \ln 2 - \ln 3 + \ln 2^5 = \ln \frac{2}{3} + \ln 2^5 = \ln\left(\frac{2}{3} \times 2^5\right) = \ln \frac{64}{3}$;
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\ln \frac{x^2}{4} + \ln 4x = \ln x^2 - \ln 4 + \ln 4 + \ln x = 2\ln x + \ln x = 3\ln x.$$

2. Étude de la fonction $x \mapsto \ln x$

Théorème. La fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction inverse :
$$\text{pour tout } x \in]0; +\infty[, \ \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$
Il en résulte que la fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et qu'elle est concave sur cet intervalle.

Démonstration. Le fait que la dérivée de ln est la fonction inverse est admis. Puisque pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$, il en résulte que ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Enfin comme $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, la fonction est concave. ■

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

Puisque la fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et que $\ln 1 = 0$ on notera que

- si $x > 1$, alors $\ln x > 0$;
- si $0 < x < 1$, alors $\ln x < 0$.

Pour tout réel k, l'équation $\ln x = k$ admet une seule solution, à savoir e^k.

Pour résoudre les équations et inéquations on dispose d'un résultat analogue à celui sur exponentielle : pour tous réels strictement positifs A et B, on a
$$\ln A = \ln B \Leftrightarrow A = B \text{ et } \ln A < \ln B \Leftrightarrow A < B.$$

❖ **Un exemple d'étude de fonction contenant ln**

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)(2 - \ln x)$. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et
$$f'(x) = \frac{1}{x}(2 - \ln x) + \ln x\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{2 - 2\ln x}{x} = \frac{2(1 - \ln x)}{x}.$$
Comme $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \ln x \Leftrightarrow e \geq x$, le tableau de signe puis de variation de f est le suivant.

x	0		e		$+\infty$
signe de f'	‖	$+$	0	$-$	
variations de f	‖	↗	1	↘	

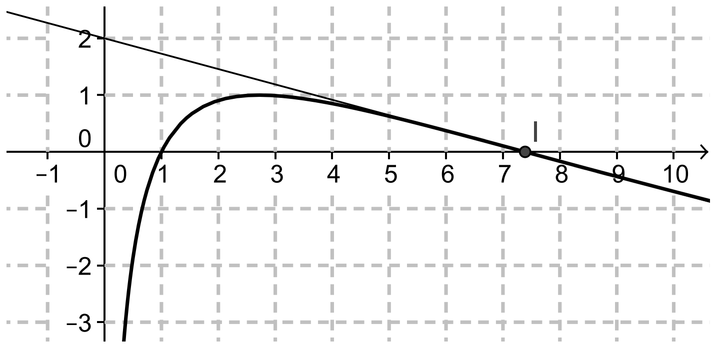
Le maximum de f est $f(e) = \ln e\,(2 - \ln e) = 1 \times (2 - 1) = 1$.

La dérivée seconde de f est

$$f''(x) = \frac{-\frac{2}{x}\times x-(2-2\ln x)}{x^2} = \frac{2\ln x-4}{x^2} = \frac{2(\ln x-2)}{x^2}$$

On a $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq e^2$, donc f'' s'annule en changeant de signe en $x = e^2$. Comme $f(e^2) = \ln e^2\,(2-\ln e^2) = 2\times(2-2) = 0$, on peut conclure que la courbe représentative de f admet un point d'inflexion I de coordonnées $(e^2; 0)$.

De plus $f'(e^2) = \frac{2(1-\ln e^2)}{e^2} = -\frac{2}{e^2}$ donc une équation de la tangente au point d'inflexion I est $y = f'(e^2)(x-e^2)+f(e^2)$, soit $y = -\frac{2}{e^2}x+2$.



3. Équations et inéquations avec exponentielle

Théorème. Soit x et k des réels strictement positifs et n un entier naturel. L'équation $x^n = k$ admet dans $]0;+\infty[$ une unique solution $x = e^{\frac{\ln k}{n}}$.

Démonstration. Comme chaque membre de l'équation est positif,

$$x^n = k \Leftrightarrow \ln x^n = \ln k \Leftrightarrow n\ln x = \ln k \Leftrightarrow \ln x = \frac{\ln k}{n} \Leftrightarrow x = e^{\frac{\ln k}{n}}$$ ■

Exemple

Résoudre $(x+1)^5 = 3$. On a $(x+1)^5 = 3 \Leftrightarrow 5\ln(x+1) = \ln 3 \Leftrightarrow \ln(x+1) = \frac{\ln 3}{5} \Leftrightarrow x+1 = e^{\frac{\ln 3}{5}}$ donc finalement $S = \left\{e^{\frac{\ln 3}{5}}-1\right\}$.

Exemple

Considérons la suite géométrique définie par $u_n = 0{,}5^n$. Puisque $0 < 0{,}5 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Cherchons le plus petit entier tel que $u_n < 10^{-4}$. On a déjà vu deux méthodes :

- lecture de la table de la calculatrice quand l'entier cherché n'est pas trop grand ;
- utilisation d'un algorithme.

On peut calculer directement cet entier en résolvant l'inéquation

$$u_n \leq 10^{-4} \Leftrightarrow 0{,}5^n \leq 10^{-4}.$$

Comme l'inconnue est en exposant, on transforme cette inéquation (dont les deux membres sont positifs) à l'aide de la fonction ln.

$$0{,}5^n \leq 10^{-4} \Leftrightarrow \ln 0{,}5^n \leq \ln 10^{-4} \Leftrightarrow n\times\ln 0{,}5 \leq -4\times\ln 10.$$

Comme $\ln 0{,}5 < 0$, on obtient

$$n \geq \frac{-4\times\ln 10}{\ln 0{,}5} \approx 13{,}29$$

et le plus petit entier vérifiant $u_n \leq 10^{-4}$ est donc 14.