Intégration

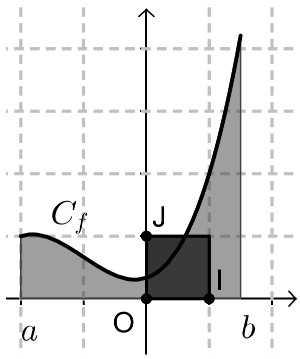
1. Intégrale d'une fonction continue positive

❖ Définition de l'intégrale

Définition. *Dans un repère orthogonal $(O; I, J)$ on appelle <u>unité d'aire</u> l'aire du rectangle de côtés $[OI]$ et $[OJ]$.*

Définition. *Soit f une fonction continue positive sur l'intervalle $[a; b]$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; I, J)$.*
<u>L'intégrale de f entre a et b</u> est l'aire, en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On note ce nombre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
On dit que a est la <u>borne inférieure</u> de l'intégrale et b sa <u>borne supérieure</u>.

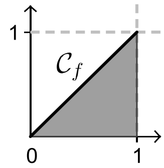
Sur la figure ci-contre, on a coloré en noir le rectangle donnant l'unité d'aire et en gris l'aire sous la courbe.



Remarque.
1. La variable x peut-être remplacée par n'importe quelle autre lettre dans l'écriture de l'intégrale. Par exemple $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ désignent les mêmes nombres.
2. On voit que $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$ si $a \leq b \leq c$.

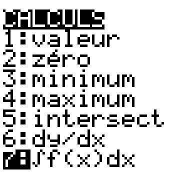
<u>Exemple</u>

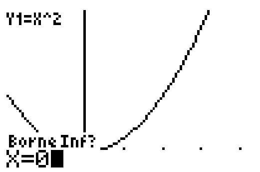
Calculons $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$. La fonction $x \mapsto x$ est positive et continue sur $[0; 1]$. Le nombre $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ est donc l'aire du triangle rectangle ci-contre. Donc $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

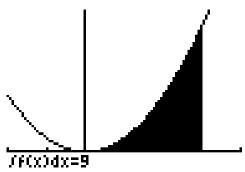


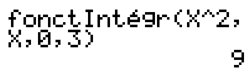
<u>Exemple</u>

À l'aide de la calculatrice on va calculer $\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x$. Après avoir rentré la fonction $x \mapsto x^2$ dans l'éditeur d'équation, ouvrir l'outil « calculs » en faisant $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{trace}}$. Choisir ensuite `∫ f(x)dx`, rentrer la borne inférieure (ici 0) puis la borne supérieure (ici 3) puis valider.
On lit alors $\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = 9$. La simplicité de ce résultat sera justifiée plus loin.
On peut aussi utiliser la commande `fonctIntégr` accessible par la touche $\boxed{\text{math}}$ puis la commande n°9 de l'onglet `MATH`.





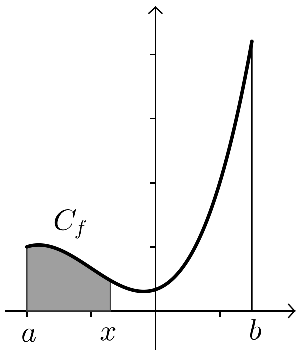




On peut aussi procéder grâce à un logiciel de calcul formel, par exemple Xcas.

```
integrer(x^2,x,0,3)
                  9
```

❖ **Fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$**



Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
Pour tout réel x de l'intervalle $[a;b]$, l'intégrale de f entre a et x est égale à l'aire sous la courbe de C_f sur l'intervalle $[a;x]$. On définit ainsi une fonction sur l'intervalle $[a;b]$ par $\varphi: x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
On a notamment $\varphi(a) = 0$.

Théorème (admis). La fonction φ précédemment définie est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f.

Théorème. Soit F une fonction dérivable sur $[a;b]$ et ayant pour dérivée f. Alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Démonstration. Soit F une fonction ayant pour dérivée f. La fonction $F - \varphi$ a pour dérivée $F' - \varphi' = f - f = 0$, donc la fonction $F - \varphi$ est constante. Il existe un réel k tel que pour tout $x \in [a;b]$, on a $F(x) - \varphi(x) = k$.
En particulier pour $x = a$, on obtient $F(a) - \varphi(a) = k$, d'où $k = F(a)$ puisque $\varphi(a) = 0$.
En faisant $x = b$, on a $F(b) - \varphi(b) = F(a)$ d'où $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(b) = F(b) - F(a)$. ■

Notation. La différence $F(b) - F(a)$ se note $[F(x)]_a^b$.

Exemple

Avec la calculatrice dans l'exemple précédent, nous avons vu que $\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = 9$. Retrouvons ce résultat par le calcul.
Si l'on pose $f(x) = x^2$, on remarque que la fonction $F(x) = \frac{x^3}{3}$ a pour dérivée f. Ainsi

$$\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(0) = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9.$$

On écrit plus simple : $\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9$.

2. Primitives d'une fonction continue

Définition. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle <u>primitive</u> de f sur I toute fonction F dérivable sur I dont la dérivée est f. Ainsi $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.*

Exemple

La fonction $F: x \mapsto x^2$ est une primitive de $f: x \mapsto 2x$ car $F'(x) = 2x$.
La fonction $G: x \mapsto 3x$ est une primitive de $g: x \mapsto 3$ car $G'(x) = 3$. La fonction $x \mapsto 3x + 5$ est une autre primitive de g.

Théorème. Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

Théorème.

- Si F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I, toutes les autres primitives de f sur I sont définies par $x \mapsto F(x) + k$ où k est un réel quelconque.
- Étant donné $x_0 \in I$ et un réel y_0, il existe une unique primitive F prenant la valeur y_0 en x_0, c'est-à-dire vérifiant $F(x_0) = y_0$.

Exemple

La fonction $f : x \mapsto 2x$ admet pour primitive $F : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$. Les autres primitives de f sont donc les fonctions $x \mapsto x^2 + k$, par exemple $x \mapsto x^2 - 1$, $x \mapsto x^2 + 20$, …
Cherchons l'unique primitive F valant 0 en 3. Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = x^2 + k$. Donc $F(3) = 0 \Leftrightarrow 3^2 + k = 0 \Leftrightarrow k = -9$. La primitive cherchée est $x \mapsto x^2 - 9$.

Par lecture inversée du tableau des dérivées, on obtient le tableau ci-dessous.

Fonction f	**Une primitive F**	**Intervalle de validité**
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, n entier naturel	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = u'(x)e^{u(x)}$	$F(x) = e^{u(x)}$	Là où u est dérivable

Théorème.

- Si F et G sont des primitives des fonctions f et g, alors $F + G$ est une primitive de la fonction $f + g$.
- Si F est une primitive d'une fonction f et si k est un réel, alors kF est une primitive de la fonction kf.

Exemple

1. Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 + 8x$. Une primitive de $x \mapsto x^3$ est $x \mapsto \frac{x^4}{4}$. Une primitive de $x \mapsto x$ est $x \mapsto \frac{x^2}{2}$, donc une primitive de $x \mapsto 8x$ est $x \mapsto 8 \times \frac{x^2}{2} = 4x^2$. Finalement une primitive de f est $F : x \mapsto \frac{x^4}{4} + 4x^2$.
2. Certaines fonctions admettent des primitives qu'il est difficile de déterminer. Un logiciel de calcul formel peut y aider. Par exemple la copie d'écran ci-contre de Xcas en ligne nous apprend qu'une primitive de $f(x) = \ln x$ est $F(x) = x \ln x - x$. La vérification est immédiate en dérivant : $F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$.

```
integrer(ln(x),x)
```
$x\ln(x) - x$

3. Intégrale d'une fonction continue

Définition. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I (de signe quelconque) et soit a, b deux réels de I. En désignant par F une primitive de f (qui existe d'après un théorème du paragraphe 2), on appelle intégrale de f entre a et b le réel $F(b) - F(a)$:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Exemple

Calculons $\int_{-2}^{1} x^3\, \mathrm{d}x$. Une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est $F(x) = \frac{x^4}{4}$. Par conséquent $\int_{-2}^{1} x^3\, \mathrm{d}x = F(1) - F(-2) = \frac{1}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = -\frac{15}{4}$.

On écrira plus simplement $\int_{-2}^{1} x^3\, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = -\frac{15}{4}$.

Remarques.
L'intégrale ne dépend de la primitive choisie. En effet on sait que si F est une primitive de f, toute autre primitive G est de la forme $F + k$ où k est un réel. Par conséquent,

$$G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a).$$

Théorème. Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a, b deux réels de I et k un réel quelconque.

1. $\int_a^a f(x)\, \mathrm{d}x = 0$
2. $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\, \mathrm{d}x$
3. $\int_a^b kf(x)\, \mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$
4. $\int_a^b f(x) + g(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x$
5. $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\, \mathrm{d}x$ (relation de Chasles)
6. Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$, alors $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \geq 0$.
7. Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a; b]$, alors $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x$

Démonstration. Soit F une primitive de f et G une primitive de g.

1. $\int_a^a f(x)\, \mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$.

2. $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = F(b) - F(a) = -\big(F(a) - F(b)\big) = \int_b^a f(x)\, \mathrm{d}x$.

3. Une primitive de kf est kF, donc

$$\int_a^b kf(x)\, \mathrm{d}x = (kF)(b) - (kF)(a) = k\big(F(b) - F(a)\big) = k\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x.$$

4. Une primitive de $F + G$ est $f + g$, donc

$$\int_a^b f(x) + g(x)\, \mathrm{d}x = (F + G)(b) - (F + G)(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) =$$
$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x.$$

5. $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\, \mathrm{d}x = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\, \mathrm{d}x$.

6. Ceci résulte de la définition de l'intégrale dans le cas où f est positive.

7. On a $g(x) - f(x) \geq 0$, donc d'après (6),

$$\int_a^b g(x) - f(x)\, \mathrm{d}x \geq 0,$$

puis d'après (4), $\int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \geq 0$, ou encore $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x$. ■

Remarque. Si la fonction f est positive, la relation de Chasles provient de l'additivité de l'aire.

4. Applications

❖ Valeur moyenne d'une fonction

Définition. *Pour toute fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$ on appelle <u>valeur moyenne de f sur $[a;b]$</u> le réel défini par* $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

<u>Exemple</u>

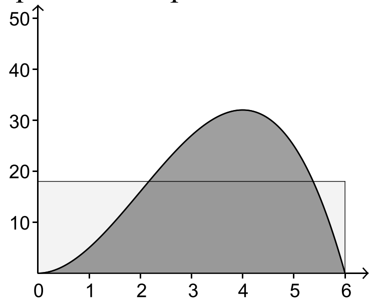
Lors d'une épidémie de grippe dans un lycée, le nombre de malades, t jours après l'apparition des premiers cas est donné par la fonction

$$f(t) = 6t^2 - t^3.$$

Calculer le nombre moyen de malades par jour sur les 6 jours qu'a duré l'épidémie.

Réponse. Le nombre moyen de malade est la valeur moyenne de f, qui est égale à $\frac{1}{6-0}\int_0^6 (6t^2 - t^3)\,\mathrm{d}t$.

Une primitive de $6t^2 - t^3$ est $2t^3 - \frac{t^4}{4}$, donc la valeur moyenne de f est $\frac{108}{6} = 18$. Cela signifie que si le nombre de malade avait été constant durant il épidémie, il aurait été de 18 par jours.



❖ Calcul d'aire

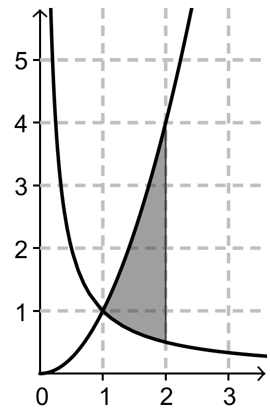
Théorème. Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ avec $f(x) \leq g(x)$. L'aire, exprimée en unité d'aire, de la surface comprise entre les courbes représentatives de f et g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à

$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

<u>Exemple</u>

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x^2$.

1. Montrer que pour $x \geq 1$, on a $f(x) \leq g(x)$.
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ comprise entre les courbes représentatives de f et g et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

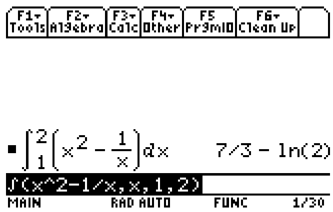


Réponse.

1. Pour $x \geq 1$, on a $x^2 \geq 1$ et $\frac{1}{x} \leq 1$, par conséquent $\frac{1}{x} \leq x^2$.
2. Sur $[1;2]$ on a $f(x) \leq g(x)$, donc l'aire cherchée est égale à $\mathcal{A} = \int_1^2 \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x$. Par suite

$$\mathcal{A} = \left[\frac{x^3}{3} - \ln x\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \ln 2 - \left(\frac{1}{3} - \ln 1\right) = \frac{7}{3} - \ln 2 \approx 1{,}64.$$

Il est possible de confier ce calcul à un logiciel de calcul formel.



Avec la TI-89

integrer(x^2-1/x,x,1,2)

$$-\ln(2) + \frac{7}{3}$$

Avec Xcas en ligne