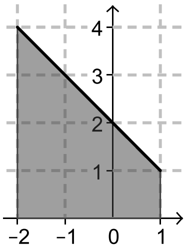
Intégration – Exercices

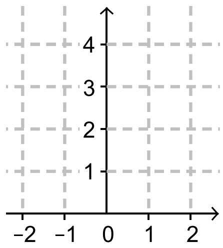
Intégrale d'une fonction positive

1 On a représenté ci-contre la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-2; 1]$ par $f(x) = -x + 2$.



1. Comment s'appelle l'aire colorée sur la figure ? Comment se note-t-elle ? La calculer par lecture graphique.
2. Par lecture graphique, déterminer $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

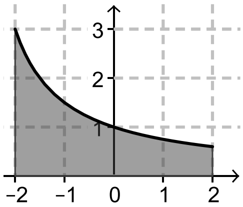
2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$.



1. Représenter f ci-contre.
2. Justifier que f est positive sur $[-2; 2]$ par un tableau de signe.
3. Soit $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   a. Hachurer l'aire représentée par I sur le graphique.
   b. Par lecture graphique déterminer I.
4. Déterminer par lecture graphique la valeur de l'intégrale $J = \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$. Vérifier à l'aide la calculatrice.

3 On a représenté ci-contre la fonction f définie sur $[-2; 2]$ par $f(x) = \frac{3}{x+3}$. On pose

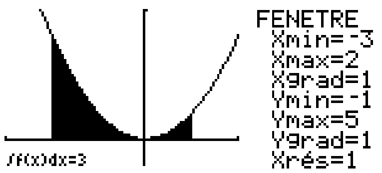
$$I = \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$



1. Déterminer par lecture graphique un encadrement de I.
2. Utiliser une calculatrice pour donner une valeur approchée à 10^{-3} près de I.
3. Vérifier que le résultat ci-contre renvoyé par un logiciel de calcul formel est cohérent avec la question **2**.

```
int(3/(x+3),x,-2,2)
                3 ln 5
```

4 On a représenté ci-contre sur l'intervalle $[-3; 2]$ la fonction f définie par $f(x) = x^2$ puis on a hachuré l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 1$.

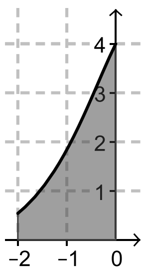


1. À quelle intégrale correspond cette aire ? Combien vaut-elle ?
2. Obtenir le même écran sur la calculatrice avec les réglages donnés ci-dessus. Calculer l'intégrale.

5 On a représenté sur l'intervalle $[-2; 0]$ la fonction f définie par

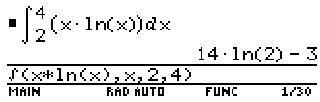
$$f(x) = (4 - 2x - x^2)e^x.$$

On pose $I = \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.



1. Donner un encadrement de I par lecture graphique.
2. À l'aide de la calculatrice, préciser I.

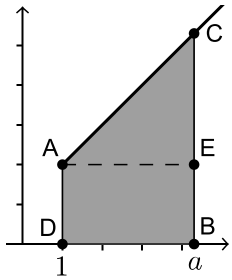
6 À l'aide de la calculatrice calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de $\int_2^4 x \ln x\,\mathrm{d}x$.



Vérifier la cohérence avec l'impression d'écran du logiciel de calcul formel ci-dessus.

Fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

7 On a représenté ci-contre la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = x + 1$.
On note $F(a)$ l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$ où a est un réel supérieur ou égal à 1.



1. Justifier que $AE = a - 1$ et $CE = a - 1$.
2. Montrer que $F(a) = \frac{a^2}{2} + a - \frac{3}{2}$.
3. **a.** Calculer $F(1)$. Interpréter graphiquement.
   b. Calculer $F'(a)$. Que remarque-t-on ?

8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x + 4$.

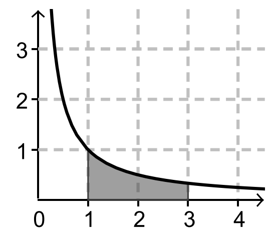
1. Vérifier que $f(x) \geq 0$ sur $[-1; 5]$.
2. Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de $I = \int_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{6}x^2 + 4x$.
   a. Vérifier que $F'(x) = f(x)$.
   b. Retrouver la valeur de I.
   c. Calculer $J = \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + 4x + 6.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
2. Soit F la fonction définie par $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x$.
   a. Vérifier que la dérivée de F est f.
   b. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -3$ et $x = 0$.

10 On a représenté ci-contre la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.



1. Donner une fonction F ayant pour dérivée f et en déduire la valeur exacte de l'aire colorée sur le graphique ci-contre.
2. Montrer que la fonction G définie par $G(x) = 4 + \ln x$ a pour dérivée f. Pourquoi trouve-t-on la même valeur pour l'aire ?

Primitives d'une fonction continue

11 Dans chacun des cas suivants, démontrer que F est une primitive de f.

a. $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ $\quad F(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$
b. $f(x) = 5 - x$ $\quad F(x) = 5x - \frac{1}{2}x^2$
c. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{x}$ $\quad F(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{x^4}{4} + \ln x$

d. $f(x) = (x-1)e^x$ $\quad$ $F(x) = (x-2)e^x$
e. $f(x) = e^{1-x}$ $\quad$ $F(x) = -e^{1-x}$
f. $f(x) = xe^{-x^2}$ $\quad$ $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$

12 Vérifier que les fonctions F_1 et F_2 définies sur $]0;+\infty[$ par $F_1(x) = \ln(x)$ et $F_2(x) = \ln(3x)$ sont des primitives de la fonction inverse.
Mettre en évidence le réel k tel que $F_2(x) = F_1(x) + k$.

13 Déterminer une primitive des fonctions suivantes.
a. $f(x) = 2x + 5$ $\quad$ **b.** $f(x) = 1 - 2x$
c. $f(x) = 3x^2 + x$ $\quad$ **d.** $f(x) = \frac{1}{3}x - 0{,}2$
e. $f(x) = -x^3 + \frac{3}{5}x^2 - 2$ $\quad$ **f.** $f(x) = x - 10x^7$

14 Déterminer une primitive des fonctions suivantes.
a. $f(x) = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad$ **b.** $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$
c. $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 3$ $\quad$ **d.** $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$
e. $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ $\quad$ **f.** $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}$
g. $f(x) = \frac{1}{4x}$ $\quad$ **h.** $f(x) = \frac{3}{2x} - \frac{4}{3x^2}$

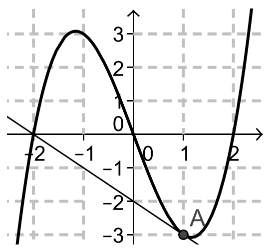
15 Déterminer une primitive des fonctions suivantes.
a. $f(x) = e^x + x$ $\quad$ **b.** $f(x) = e^{-x}$
c. $f(x) = 3e^{3x} + 1$ $\quad$ **d.** $f(x) = e^{-3x}$
e. $f(x) = e^{2x-1}$ $\quad$ **f.** $f(x) = 2xe^{x^2}$
g. $f(x) = 3x^2e^{x^3}$ $\quad$ **h.** $f(x) = (2x+1)e^{x^2+x}$

16 Déterminer la primitive des fonctions suivantes qui prend la valeur 1 en 0.
a. $f(x) = x + 4$ $\quad$ **b.** $f(x) = 1 - x^2$
c. $f(x) = e^x$ $\quad$ **d.** $f(x) = e^x + 1$

17 On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x$.
1. Vérifier que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2$$
est une primitive de f.
2. En déduire la valeur exacte de l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

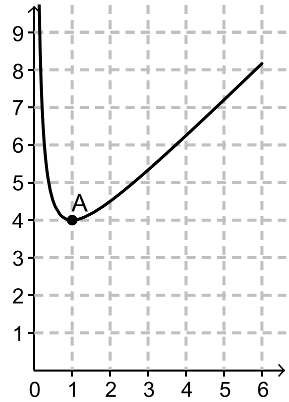
18 Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2xe^{-x^2}$ puis en déduire une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{x^2}$.

19 *(2012, Guyane-Antilles)* On donne la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2;2]$ et sa tangente en son point A d'abscisse 1 ; cette tangente passe par le point de coordonnées $(-2;0)$.



Donner l'unique réponse exacte pour chaque question.
1. Le nombre dérivé $f'(1)$ est égal à
a. 1 $\quad$ **b.** $-\frac{1}{3}$
c. -1 $\quad$ **d.** 3
2. La fonction u telle que $u(x) = \ln[f(x)]$ est définie sur
a. $[-2;0]$ $\quad$ **b.** $]-2;0[$
c. $[0;2]$ $\quad$ **d.** $[-1;1]$
3. On considère F une primitive de f sur $[-2;2]$. La fonction F est décroissante sur
a. $[-2;0]$ $\quad$ **b.** $[-2;2]$
c. $[0;2]$ $\quad$ **d.** $[-1;1]$
4. Soit $I = \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$. On a
a. $I < 0$ $\quad$ **b.** $0 \leq I \leq 1$
c. $1 < I < 3$ $\quad$ **d.** $I \geq 3$

20 *(2012, Métropole)* On a représenté ci-contre, dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative C d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;6]$. Le point $A(1;4)$ appartient à la courbe C. La tangente en A à la courbe C est parallèle à l'axe des abscisses.



Donner l'unique réponse exacte pour chaque question.
1. Le nombre dérivée $f'(1)$ est
a. 4 $\quad$ **b.** 0
c. -2 $\quad$ **d.** 1
2. Sur l'intervalle $]0;6]$, l'inéquation $f'(x) \geq 0$ admet comme ensemble de solution
a. $]0;1]$ $\quad$ **b.** $[1;6]$
c. $]0;6]$ $\quad$ **d.** $[4;9]$
3. On pose $I = \int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$. On peut affirmer que
a. $12 < I < 13$ $\quad$ **b.** $0 < I < 2$
c. $5 < I < 8$ $\quad$ **d.** $-2 < I < 0$
4. On appelle F une primitive de f sur $]0;6]$. L'expression de $F(x)$ peut être
a. $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ $\quad$ **b.** $2 + \frac{1}{x}$
c. $\frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln x$ $\quad$ **d.** $2x + \ln x$

Intégrale d'une fonction continue

21 Calculer les intégrales suivantes.
a. $I = \int_{-1}^{3} 4x\,\mathrm{d}x$ $\quad$ **b.** $I = \int_{-2}^{6} x^2\,\mathrm{d}x$
c. $I = \int_5^2 (x^2+1)\,\mathrm{d}x$ $\quad$ **d.** $I = \int_{-2}^{3} e^x\,\mathrm{d}x$
e. $I = \int_0^3 e^{-x}\,\mathrm{d}x$ $\quad$ **f.** $I = \int_1^4 \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$
g. $I = \int_{-2}^{2} (x^3+2x)\,\mathrm{d}x$ $\quad$ **h.** $I = \int_2^4 \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

22 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. On pose
$$I = \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } J = \int_4^6 f(x)\,\mathrm{d}x.$$
On suppose que $I = -2$ et $J = 3$. Calculer
a. $\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x$ $\quad$ **b.** $\int_4^0 f(x)\,\mathrm{d}x$ $\quad$ **c.** $\int_0^4 3f(x)\,\mathrm{d}x$

23 La réciproque de la propriété « si f est positive sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ » est-elle vraie ? Justifier ou donner un contre-exemple.

24 On pose $I = \int_0^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x$ et $J = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.
On admet que $I = e - 2$ et $J = \frac{\pi}{4}$. Calculer
a. $\int_0^1 3x^2e^x\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^1 \frac{4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
b. $\int_0^1 \left(2x^2e^x - \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$

25 Soit f une fonction définie et continue sur $[-3;5]$ admettant le tableau de variation suivant.

x	-3		1		3		5
f	4	↘	2	↗	6	↘	-3

1. Déterminer le signe de $\int_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. On donne $f(4)=0$. Donner le signe de $\int_{5}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Donner un encadrement de $\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

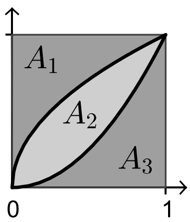
26 Soit les fonctions f et g les fonctions définies sur $[0;1]$ par $f(x)=x$ et $g(x)=x^3$.
1. Comparer $f(x)$ et $g(x)$.
2. a. En déduire sans les calculer la comparaison de $I=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ et $J=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.
   b. Interpréter graphiquement.
3. Retrouver cette comparaison en calculant I et J.

Calculs d'aires

27 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x)=-x^2+4x-3.$$
1. Démontrer que pour tout $x\in[1;3]$, $f(x)\geq 0$.
2. Calculer l'aire comprise entre la courbe de f et l'axe des abscisses.

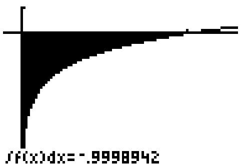
28 On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par
$$f(x)=\frac{4\ln x}{x}.$$
1. Dériver la fonction G définie par $G(x)=\ln^2 x$. En déduire une primitive F de f.
2. Calculer l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x=3$.

29 On considère les fonctions f, g, h définies sur $[0;1]$ par
$$f(x)=x^2,\ g(x)=\sqrt{x} \text{ et } h(x)=1.$$
On a représenté f et g sur le graphique ci-contre.



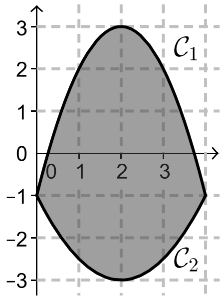
1. Justifier que $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$.
2. Exprimer chacune des aires A_1, A_2, A_3 à l'aide d'intégrales et des fonctions f, g, h.
3. Montrer que la fonction G définie par $G(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive de g.
4. En déduire que $A_1=A_2=A_3$.

30 On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par
$$f(x)=\ln x.$$



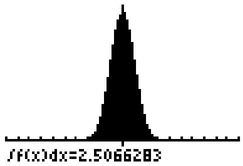
1. Expliquer pourquoi l'intégrale $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ n'existe pas avec la définition du cours. Quelle valeur semble donner la calculatrice à cette intégrale ?
2. Montrer que la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=x\ln x-x$ est une primitive de f.
3. À l'aide de la calculatrice, observer les valeurs que prend F lorsque x est proche de 0.
4. Expliquer alors la valeur de I.

31 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-1 \text{ et } g(x)=-x^2+4x-1.$$
On a représenté ci-contre les courbes de f et g sur $[0;4]$.



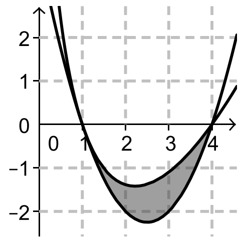
1. Associer chaque fonction à sa courbe.
2. Montrer que pour tout réel $x\in[0;4]$, $g(x)-f(x)\geq 0$.
3. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
4. En déduire l'aire du domaine coloré.

32 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x^2}$.

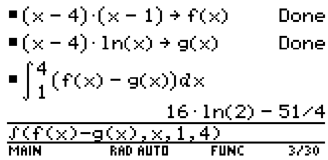


1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et déterminer son maximum.
2. Tracer la courbe de f sur la calculatrice et calculer $I=\int_{-10}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Comparer cette valeur à $\sqrt{\pi}$.

33 On considère les fonctions f et g définies sur $]0;+\infty[$ par
- $f(x)=(x-4)(x-1)$
- $g(x)=(x-4)\ln x$.



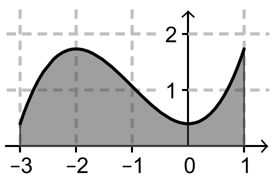
1. Démontrer que les courbes de f et g admettent la même tangente au point d'abscisse 1.
2. On pose $\varphi(x)=x-1-\ln x$.
   a. En utilisant la concavité de ln montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$, $\varphi(x)\geq 0$.
   b. Montrer que $f(x)-g(x)=(x-4)\varphi(x)$.
   c. En déduire la position relative des courbes de f et g.
   d. À l'aide de l'impression d'écran ci-contre déterminer la valeur exacte de l'aire colorée.



   Retrouver la valeur approchée à l'aide de la calculatrice.

Valeur moyenne d'une fonction

34 La courbe C ci-contre est la courbe d'une fonction f définie sur $[-3;1]$. L'aire sous la courbe est 4,28.



1. Exprimer cette aire à l'aide d'une intégrale.
2. Déterminer la valeur moyenne de f sur $[-3;1]$.

35 Certains scientifiques estiment que les futures découvertes de pétrole dans le monde peuvent être modélisées, à partir de 2011, grâce à la fonction f définie sur $[11;+\infty[$ par
$$f(x)=17280e^{-0{,}024x}$$
de sorte $f(x)$ représente, en billions de barils (millions de millions de barils), l'estimation de la quantité de pétrole qui sera découverte l'année $2000+x$.
1. Calculer l'estimation du nombre de barils de pétrole à découvrir en 2013 d'après ce modèle.
2. Étudier les variations de f sur $[11;+\infty[$.
3. a. Déterminer une primitive F de f.

b. Calculer la valeur exacte de $I = \int_{11}^{21} f(x)\,\mathrm{d}x$, puis donner une valeur arrondie à l'unité.

c. En déduire le nombre moyen de barils, en billions, que l'on peut espérer découvrir par an entre les années 2011 et 2021.

Sujets de baccalauréat

36 *(2014, Centres étrangers)*

Partie A – Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2-1}$. On appelle C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan.

1. a. Montrer que pour tout réel x,
$$f'(x) = (2x^2+1)e^{x^2-1}.$$
b. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2. On admet que pour tout réel x,
$$f''(x) = 2x(2x^2+3)e^{x^2-1}.$$
Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$h(x) = x\left(1 - e^{x^2-1}\right).$$
a. Justifier que l'inéquation $1 - e^{x^2-1} \geq 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1; 1]$.

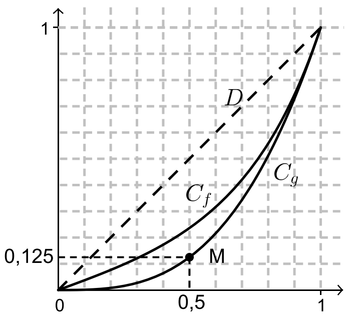
b. Déterminer le signe de $h(x)$ sur l'intervalle $[-1; 1]$.

c. En remarquant que pour tout réel x, on a l'égalité $h(x) = x - f(x)$, déduire de la question précédente la position relative de la courbe C_f et de la droite D d'équation $y = x$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

4. Soit $I = \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$ et H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}e^{x^2-1}$.
On admet que H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$. Calculer la valeur exacte de I.

Partie B – Applications

Sur le graphique suivant, sont tracées sur l'intervalle $[0; 1]$:



- la courbe C_f représentative de la fonction étudiée en partie A ;
- la courbe C_g représentative de la fonction définie par $g(x) = x^3$;
- la droite D d'équation $y = x$.

Les courbes C_f et C_g illustrent ici la répartition des salaires dans deux entreprises F et G :

- sur l'axe des abscisses, x représente la proportion des employés ayant les salaires les plus faibles par rapport à l'effectif total de l'entreprise ;
- sur l'axe des ordonnées, $f(x)$ et $g(x)$ représentent pour chaque entreprise la proportion de la masse salariale (c'est-à-dire la somme de tous les salaires) correspondante.

Par exemple : le point $M(0{,}5\,;0{,}125)$ est un point appartenant à la courbe C_g. Pour l'entreprise G cela se traduit de la façon suivante : si on classe les employés par revenu croissant, le total des salaires de la première moitié (c'est-à-dire des 50 % aux revenus les plus faibles) représente 12,5 % de la masse salariale.

1. Calculer le pourcentage de la masse salariale détenue par 80 % des employés ayant les salaires les plus faibles dans l'entreprise F. On donnera une valeur du résultat arrondie à l'unité.

2. On note A_f l'aire du domaine délimité par la droite D, la courbe C_f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
On appelle indice de Gini associé à la fonction f, le nombre réel noté I_f et défini par $I_f = 2 \times A_f$.

a. Montrer que $I_f = \frac{1}{e}$.

b. On admet que, plus l'indice de Gini est petit, plus la répartition des salaires dans l'entreprise est égalitaire. Déterminer, en justifiant, l'entreprise pour laquelle la distribution des salaires est la plus égalitaire.

37 *(2014, Antilles-Guyane)*

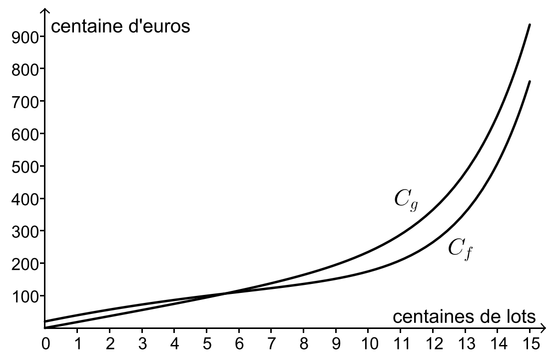
Une entreprise fabrique et vend aux écoles primaires des lots constitués de cahiers et de stylos.

Partie A – L'entreprise possède une machine qui peut fabriquer au maximum 1500 lots par semaine. Le coût total de fabrication hebdomadaire est modélisé par la fonction g définie sur $[0; 15]$ par $g(x) = 18x + e^{0{,}5x-1}$.
Lorsque x représente le nombre de centaines de lots, $g(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.

1. Calculer $g'(x)$.

2. Justifier que g est strictement croissante sur $[0; 15]$.

Partie B – L'entreprise acquiert une nouvelle machine qui permet d'obtenir un coût total de fabrication hebdomadaire modélisé par la fonction f définie sur $[0; 15]$ par
$$f(x) = e^{0{,}5x-1} - x^2 + 20x + 20.$$
Lorsque x représente le nombre de centaines de lots, $f(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.
On note C_g et C_f les représentations graphiques respectives des fonctions g et f.



1. Par lecture graphique, donner un encadrement d'amplitude 100 du nombre k de lots à partir duquel cette nouvelle machine permet de diminuer le coût total de production.

2. On cherche à préciser le résultat précédent par le calcul.

a. Montrer que la détermination de k conduit à résoudre l'inéquation $-x^2 + 2x + 20 \leq 0$.

b. Résoudre cette inéquation sur l'intervalle $[0; 15]$.

c. En déduire le nombre entier de lots à partir duquel cette nouvelle machine permet de diminuer le coût total de production.

3. On rappelle que le coût marginal obtenu avec cette nouvelle machine est donné par la fonction f'. Déterminer la valeur moyenne, arrondie à l'euro, du coût marginal lorsqu'on fabrique entre 5 centaines et 8 centaines de lots.