Lois de probabilité à densité

1. Variable aléatoire à densité

❖ Variable aléatoire discrète et continue

En Première, on a défini les variables aléatoires discrètes. Ce sont des fonctions définies sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et qui prend un nombre fini de valeurs.

Exemple A

Une urne contient 9 jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 9. Un joueur participe à une loterie gratuite qui suit la règle suivante :
- il prélève au hasard un jeton de l'urne ;
- si le numéro est pair, il gagne 1 €, s'il prélève le jeton n°1 ou n°9 il gagne 10 € et dans tous les autres cas il perd 3 €.

On définit ainsi une variable aléatoire X sur $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur.
Les valeurs prises par cette variable aléatoire sont 1, 10 et -3, donc $X(\Omega) = \{1; 10; -3\}$.
On a $(X = 1) = \{2; 4; 6; 8\}$, $(X = 10) = \{1,9\}$ et $(X = -3) = \{3; 5; 7\}$.

On va maintenant considérer des variables aléatoires qui peuvent prendre comme valeurs tous les réels d'un intervalle de $\mathbb{R}$. Une telle variable aléatoire est dite **continue**.

Exemple

Une entreprise produit des ampoules. Soit X la variable qui à chaque ampoule associe sa durée de vie en heures. Cette durée n'est pas nécessairement un nombre entier d'heures et théoriquement on ne connaît pas la durée maximale de vie d'une telle ampoule. La variable aléatoire X est donc continue à valeurs dans $[0; +\infty[$.
On pourra des définir des événements tels que $(1 \leq X \leq 2)$, $(X < 100)$ ou $(X \geq 250)$.

❖ Fonction densité

Une fois la variable aléatoire définie, on s'intéresse à sa loi de probabilité.
Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, la loi est généralement donnée sous la forme d'un tableau.

Exemple A

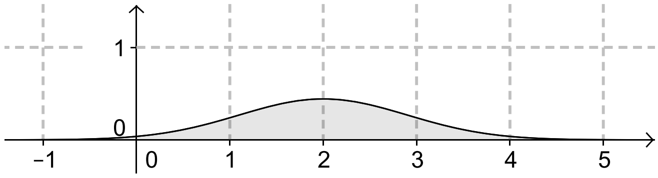
La loi du gain algébrique est donné par le tableau suivant.

x_i	-3	1	10
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

Pour une variable aléatoire continue, on a recours à une fonction définie sur $\mathbb{R}$ appelée densité.

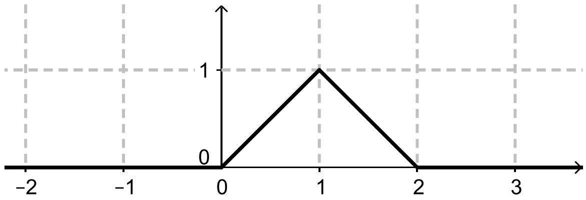
Définition. *Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est appelée fonction densité sur I, ou <u>densité sur I</u>, si*

- *f est positive sur $\mathbb{R}$;*
- *f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points ;*
- *L'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f dans un repère orthogonal et l'axe des abscisses est égale à 1.*



<u>Exemple B</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



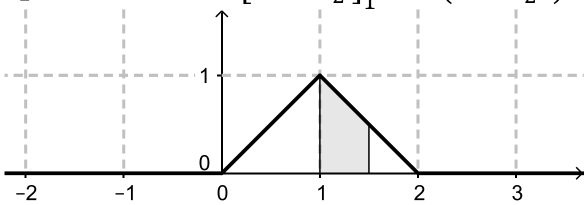
La courbe de f est constituée de deux segments et deux demi-droites. La fonction f est visiblement continue et positive et l'aire sous la courbe est égale à 1.

Définition. *On dit qu'une fonction densité f est <u>la densité de la variable aléatoire</u> X si pour tout intervalle $[a; b]$, la probabilité de l'événement $a \leq X \leq b$ (noté encore $X \in [a; b]$) est l'aire comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. Autrement dit : $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

<u>Exemple B</u>

Par exemple $P(1 \leq X \leq 1{,}5) = 0{,}375 = \frac{3}{8}$, comme on peut le voir par le calcul suivant :

$$P(1 \leq X \leq 1{,}5) = \int_1^{1{,}5} (2 - x)\,\mathrm{d}x = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^{1{,}5} = \left(3 - \frac{2{,}25}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 0{,}375.$$



Remarque importante. Pour tout réel k et toute variable aléatoire X de densité f, on a $P(X = k) = 0$. En effet $P(X = k) = \int_k^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Ainsi pour tous réels a et b

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$

et aussi $P(X < a) = P(X \leq a)$.

Attention, ces égalités sont fausses pour les lois qui ne sont pas à densité, notamment pour la loi binomiale.

- **Espérance**

Après avoir déterminé la loi de probabilité d'une variable aléatoire, s'ensuit généralement le calcul de certaines de ses caractéristiques, telle que l'espérance.

Exemple A

L'espérance de X est
$$E(X) = \frac{4}{9} \times 1 + \frac{2}{9} \times 10 + \frac{3}{9} \times (-3) = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}.$$
Cela signifie qu'en jouant un grand nombre de fois, un joueur peut espérer gagner en moyenne environ 1,7 € à chaque partie.

Dans le cas de variables aléatoires continues, cette somme n'a plus de sens. On la remplace alors par la définition suivante, prolongement naturel du cas discret.

Définition. *Soit X une variable aléatoire continue à valeur dans l'intervalle $[a; b]$ de fonction de densité f (donc $f(x) = 0$ si $x \notin [a; b]$). On appelle* espérance *de X le réel*
$$E(X) = \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple B

La variable aléatoire X est à valeur dans $[0; 2]$. Ainsi, d'après la relation de Chasles,
$$E(X) = \int_0^2 x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 x f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 x(2-x)\,\mathrm{d}x$$
La première intégrale vaut
$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left|\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$
et la seconde
$$\int_1^2 x(2-x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 (2x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 3 - \frac{7}{3} = \frac{2}{3}$$
D'où $E(X) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

2. Loi uniforme

Définition. *Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a; b]$ signifie que sa densité est définie par* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ 0\ sinon & \end{cases}$.

Si $[x; y] \subset [a; b]$, on a $P(x \leq X \leq y) = \frac{y-x}{a-b} = \frac{\text{longueur de } [x;y]}{\text{longueur de } [a;b]}$.

Théorème. L'espérance d'une telle variable aléatoire est $\frac{a+b}{2}$.

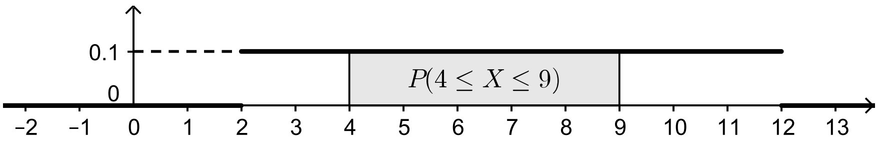
Démonstration. Par définition $E(X) = \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,\mathrm{d}x$.

On en déduit $E(X) = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$. ■

Exemple

Suite à un problème sur son ordinateur, Jean décide d'appeler le service après-vente du fabricant. Le temps d'attente X, exprimé en minutes, avant d'être en communication avec un technicien suit la loi uniforme sur $[2; 12]$.

La densité de X est la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{12-2} = \frac{1}{10}$ si $2 \leq x \leq 12$ et par $f(x) = 0$ sinon.



La probabilité que Jean attende entre 4 et 9 minutes est

$$P(4 \leq X \leq 9) = \frac{9-4}{12-2} = \frac{1}{2}.$$

La probabilité que Jean attende moins de 5 minutes est

$$P(X \leq 5) = P(2 \leq X \leq 5) = \frac{5-2}{12-2} = \frac{3}{10}.$$

La probabilité que Jean attende au moins 10 minutes est

$$P(X \geq 10) = P(10 \leq X \leq 12) = \frac{12-10}{12-2} = \frac{1}{5}.$$

Le temps moyen d'attente est $E(X) = \frac{2+12}{2} = 7$ minutes.

3. Loi normale centrée réduite

Définition. *On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi* <u>*normale centrée réduite*</u>, *notée $\mathcal{N}(0; 1)$, lorsque sa densité est donnée par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.*

Le fait que la fonction f soit continue est positive est clair. En revanche il n'est pas possible de démontrer au lycée que l'aire sous la courbe est égale à 1, nous l'admettrons. La fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ n'admet pas de primitives s'exprimant à l'aide de fonctions usuelles.

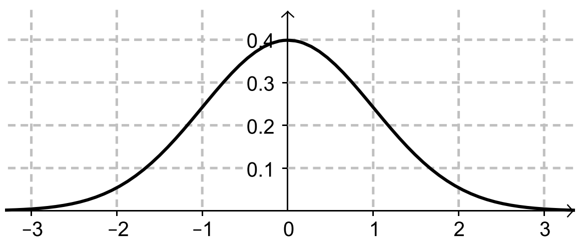
Théorème. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$. Alors l'espérance de X est 0 et l'écart-type de X est 1.

❖ Étude de la fonction *f*

La densité f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

donc $f'(x)$ est du signe de $-x$. Il en résulte que f est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +; \infty[$.



De plus pour tout x, on a $f(-x) = f(x)$, donc la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Cette courbe s'appelle courbe de Gauss.

❖ Usage de la calculatrice

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0;1)$.
Puisque la densité de la loi normale tend très rapidement vers 0, on a

$$P(X \leq a) \approx P(-10^{99} \leq X \leq a) \text{ et } P(X \geq a) \approx P(a \leq X \leq 10^{99}).$$

Le menu Distrib, obtenue en faisant 2nde var, permet d'accéder à la commande `normalFRép`.

	Syntaxe TI
Calcul de $P(a \leq X \leq b)$	`normalFrép(a,b)`
Calcul de $P(X \geq b)$	`normalFrép(b,10^99)`
Calcul de $P(X \leq a)$	`normalFrép(-10^99,b)`

En Casio, la commande est `normCD(a,b)` qui s'obtient par « OPTN », « STAT », puis « DIST ».

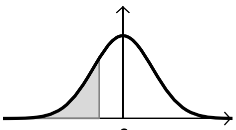
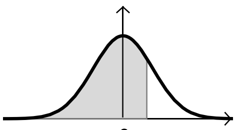
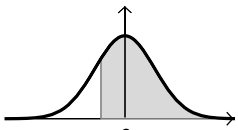
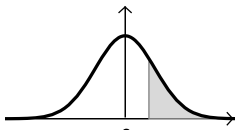
Exemple

Soit X une variable aléatoire suivante une loi $\mathcal{N}(0;1)$. Calculer à 10^{-3} les probabilités $P(-1 \leq X < 3)$, $P(X < -0{,}3)$ et $P(X > -1)$.

Réponse.

- $P(X = 2) = 0$ car X est une variable aléatoire à densité.
- $P(-1 \leq X < 3)$ se calcule par `NormalFRép(-1,3)`.
- $P(X < -0{,}3)$ se calcule par `NormalFRép(-10^99,-0.3)`.
- $P(X > -1)$ se calcul par `NormalFRép(-1,10^99)`.

Il peut être utile de savoir que les probabilités du type $P(X < a)$ ou $P(X > a)$ peuvent se ramener à des calculs du type $P(a < X < b)$ grâce aux propriétés du tableau ci-dessous.

Probabilité	$P(X < a)$ où $a < 0$	$P(X < a)$ où $a > 0$	$P(X > a)$ où $a < 0$	$P(X > a)$ où $a > 0$
Graphique				
Calcul	$0{,}5 - P(a < X < 0)$	$0{,}5 + P(0 < X < a)$	$P(a < X < 0) + 0{,}5$	$0{,}5 - P(0 < X < a)$

On peut déterminer le réel k tel que $P(X < k) = c$ où c est un réel donné (compris entre 0 et 1 évidemment !). Il faut pour cela utiliser la fonction `FracNormale` dont la syntaxe est FracNormale(c).

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivante une loi $\mathcal{N}(0;1)$.

a. Le réel b tel que $P(X < b) = 0{,}53$ s'obtient par `FracNormale(0.53)`, d'où $b \approx 0{,}075$.

b. Pour calculer le réel c tel que $P(X \geq c) = 0{,}3$, on écrit que c vérifie

$$P(X \geq c) = 1 - P(X \leq c) = 0{,}7$$

et donc c se calcule par `FracNormale(0.7)`, d'où $c \approx 0{,}524$.

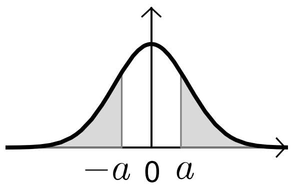
- **Deux égalités**

Théorème. Pour tout réel a on a les relations suivantes.

1. $P(X \leq -a) = P(X \geq a)$
2. $P(-a \leq X \leq a) = 2P(X \leq a) - 1$, si $a \geq 0$

Démonstration.

1. Cela résulte de la symétrie de la courbe de f par rapport à l'axe des ordonnées.
2. Comme $P(X \leq -a) = P(X \geq a) = 1 - P(X < a)$, on a,
$P(-a \leq X \leq a) = P(X \leq a) - P(X \leq -a)$
$= P(X \leq a) - \big(1 - P(X \leq a)\big) = 2P(X \leq a) - 1.$ ■



Exemple

Soit X une variable aléatoire suivante une loi $\mathcal{N}(0; 1)$.
Déterminons le réel a tel que

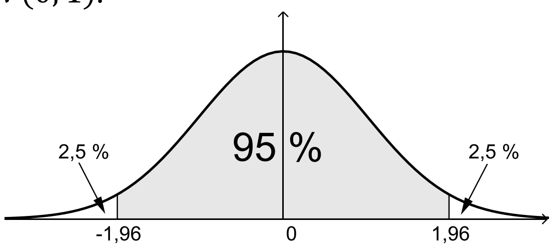
$$P(-a \leq X \leq a) = 0{,}95.$$

Il vérifie également l'équation

$$P(-a \leq X \leq a) = 2P(X \leq a) - 1,$$

et donc $2P(X \leq a) - 1 = 0{,}95$, d'où

$$P(X \leq a) = \frac{1+0{,}95}{2} = 0{,}975.$$



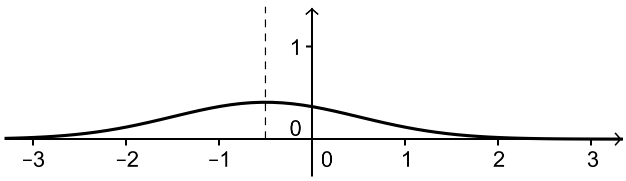
En tapant `FracNormale(0.375)`, on conclut $a \approx 1{,}96$. Ce résultat est à connaître.

4. Loi Normale

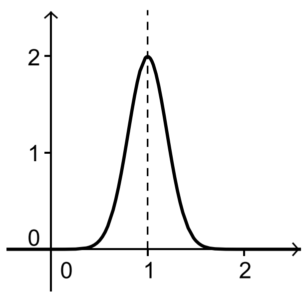
Définition. *Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire X suit une* <u>*loi normale*</u> $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ *si et seulement si la variable aléatoire* $\frac{X-\mu}{\sigma}$ *suit une loi normale centrée réduite. On parle de* <u>*la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ*</u> *(voir théorème ci-dessous).*

Attention à la notation, la loi $\mathcal{N}(7; 16)$ a pour écart-type $\sigma = \sqrt{16} = 4$.

Soit f la densité de la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. La courbe représentative de f est une courbe en cloche, ayant la droite d'équation $x = \mu$ comme axe de symétrie et d'autant plus « resserrée » autour de cet axe de symétrie que σ est petit.



$\mu = -0{,}5$ et $\sigma = 1$



$\mu = 1$ et $\sigma = 0{,}2$

Théorème. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. Alors l'espérance de X est μ et l'écart-type de X est σ.

❖ **Usage de calculatrice**

Les commandes à utiliser sont les mêmes que pour la loi $\mathcal{N}(0;1)$ en rajoutant μ et σ dans les arguments. Si X désigne une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$:

- `NormalFRép(a,b,μ,σ)` permet de calculer $P(a \leq X \leq b)$;
- `FracNormale(c,μ,σ)` permet de déterminer k tel que $P(X \leq k) = c$.

Comme pour la loi normale centrée réduite, on utilisera les approximations

$$P(X \leq a) \approx P(-10^{99} \leq X \leq a) \text{ et } P(X \geq a) \approx P(a \leq X \leq 10^{99}).$$

En Casio, la commande est `normCD(a,b,σ,μ)`.

Exemple

La distance parcourue par jour ouvré par un technicien en kilomètres suit la loi normale d'espérance 100 et d'écart-type 20. On choisit un jour ouvré au hasard. On note :

- A l'événement « le technicien parcourt entre 80 et 110 km » ;
- B l'événement « le technicien parcourt plus de 80 km » ;
- C l'événement « le technicien parcourt moins de 90 km ».

Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ et $P_B(C)$.

Réponse. Soit X la variable aléatoire qui à un jour associe le nombre de kilomètres parcourus. On a

$$P(A) = P(80 \leq X \leq 110) \approx 0{,}53$$

puis

$$P(B) = P(X \geq 80) \approx P(80 \leq X \leq 10^{99}) \approx 0{,}84$$

et

$$P(C) = P(X \leq 90) \approx P(-10^{99} \leq X \leq 90) \approx 0{,}31.$$

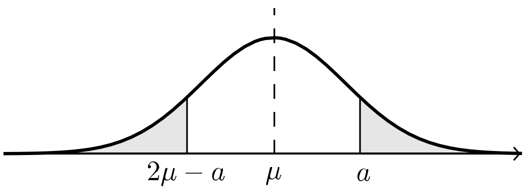
Enfin

$$P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{P(80 \leq X \leq 90)}{P(B)} \approx 0{,}18.$$

Théorème. Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Alors pour tout réel a on a

$$P(X \geq a) = P(X \leq 2\mu - a).$$

Cette propriété traduit provient de la symétrie de la courbe de la densité de X par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.
Ce résultat permet d'utiliser `FracNormale` pour déterminer k tel que $P(X \geq c) = k$.



Démonstration. Soit $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$. On peut écrire

$$P(X \geq a) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Y \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Mais la Y suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$ et on sait que pour une telle loi, on a $P(X \geq k) = P(X \leq -k)$ pour tout réel k. On en déduit donc

$$P\left(Y \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Y \leq -\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Y \leq \frac{\mu-a}{\sigma}\right).$$

En revenant à X, il vient

$$P\left(Y \leq \frac{\mu-a}{\sigma}\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\mu-a}{\sigma}\right) = P(X - \mu \leq \mu - a) = P(X \leq 2\mu - a). \quad \blacksquare$$

Théorème. Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$.

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0{,}68$
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$

Démonstration. En posant $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ on peut écrire

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(-\sigma \leq X - \mu \leq \sigma) = P\left(-1 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1\right) = P(-1 \leq Y \leq 1).$$

Comme la variable aléatoire Y suit une loi $\mathcal{N}(0; 1)$,

$$P(-1 \leq Y \leq 1) = 2P(Y \leq 1) - 1 \approx 0{,}68.$$

Le raisonnement est le même pour 2σ et 3σ. ■