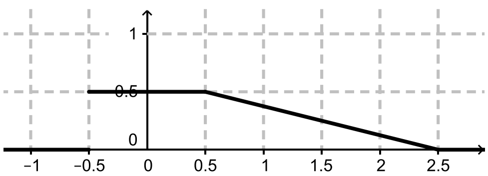
Lois de probabilité à densité – Exercices

Loi à densité

1 X est une variable aléatoire à densité à valeur dans $[2; 8]$. On donne $P(X < 6) = 0{,}3$. Calculer
a. $P(X = 6)$ **b.** $P(X \leq 6)$
c. $P(X > 6)$ **d.** $P(6 \leq X \leq 10)$

2 X est une variable aléatoire à densité à valeur dans $[3; 12]$. On a $P(X \leq 5) = 0{,}2$ et $P(X > 8) = 0{,}3$. Calculer
a. $P(X \geq 5)$ **b.** $P(X \geq 12)$
c. $P(X < 8)$ **d.** $P(5 \leq X < 8)$

3 La courbe ci-dessous représente la densité f d'une variable aléatoire à densité à valeurs dans $[-0{,}5; 2{,}5]$.
1. S'assurer que f est une densité.
2. Calculer
   a. $P(X > 0)$ **b.** $P(-1 \leq X < 0{,}5)$
   c. $P(X \geq 0{,}5)$ **d.** $P(0 \leq X < 2{,}5)$
3. Montrer que $E(X) = \frac{7}{12}$.



4 Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par
$$f(x) = x + \frac{1}{2}.$$
1. Représenter graphiquement f.
2. Soit X une variable aléatoire à densité à valeurs dans $[0; 1]$ dont la densité est f. Calculer
   a. $P(0{,}2 < X < 0{,}7)$ **b.** $P(X < 0{,}3)$
   c. $P\left(X > \frac{3}{4}\right)$ **d.** $E(X)$

5 Soit f la fonction définie sur $[2; +\infty[$ par
$$f(x) = \frac{2}{x^2}.$$
On admet que f est une densité. Soit X une variable aléatoire à valeur dans sur $[2; +\infty[$ de densité f. Calculer
a. $P(X = 10)$ **b.** $P(X < 10)$ **c.** $P(X > 10)$
d. $P(4 \leq X \leq 5)$ **e.** $P(X < 1)$

6 Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x+1) \text{ si } -1 \leq x < 1 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \text{ si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
1. Représenter graphiquement f et vérifier que f est une densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f.
   a. Calculer la probabilité que X prenne ses valeurs dans l'intervalle $[-1; 0]$.
   b. Calculer $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right)$.

Loi uniforme

7 X est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-3; 5]$. Calculer
a. $P(X > -1)$ **b.** $P(X = 0)$
c. $P(1 \leq X \leq 7)$ **d.** $P(X > -4)$

8 X est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[1; 3]$.
1. Calculer
   a. $P(1 < X < 2)$ **b.** $P(1{,}5 \leq X \leq 2{,}5)$
   c. $P(X > 2)$ **d.** $P(2{,}3 < X < 3{,}7)$
   e. $P(X < 3)$ **f.** $P(X < 0)$
2. Calculer $E(X)$.
3. Calculer $P(X > k)$ en fonction de k.
4. Déterminer k tel que $P(X > k) = 0{,}65$.

9 Deux amis se téléphonent régulièrement. La durée d'une communication suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 60]$.
1. Quelle est la probabilité que la communication n'excède pas 20 minutes ?
2. Sachant qu'une communication dure depuis 20 minutes, quelle est la probabilité qu'elle n'excède pas 30 minutes ?
3. Calculer la durée moyenne d'une communication.

Loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$

Dans ce paragraphe, X désigne une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. On arrondira à 10^{-3} près si nécessaire.

10 Calculer
a. $P(0{,}3 \leq X \leq 1{,}2)$ **b.** $P(-0{,}5 \leq X < 0)$
c. $P(-100 < X < 100)$ **d.** $P(0 < X < 97{,}3)$

11 Calculer
a. $P(X < 0)$ **b.** $P(X \leq 1)$
c. $P(X > -0{,}23)$ **d.** $P(X < -0{,}5)$
e. $P(X \leq 3{,}14)$ **f.** $P(X > 1{,}45)$
g. $P(X \geq -8)$ **h.** $P(X < -50)$

12 Déterminer le réel k tel que
a. $P(X < k) = 0{,}2$ **b.** $P(X \leq k) = 0{,}7$
c. $P(X \geq k) = 0{,}95$ **d.** $P(-k \leq X \leq k) = 0{,}99$

Loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

13 La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(10; 9)$. Calculer
a. $P(8 < X \leq 11)$ **b.** $P(X \geq 10)$
c. $P(0 \leq X \leq 20)$ **d.** $P(X \leq 13)$

14 La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(1; 0{,}04)$. Calculer
a. $P(X \geq 0{,}5)$ **b.** $P(1 \leq X \leq 2)$
c. $P(X < 2)$ **d.** $P(X > 1{,}3)$

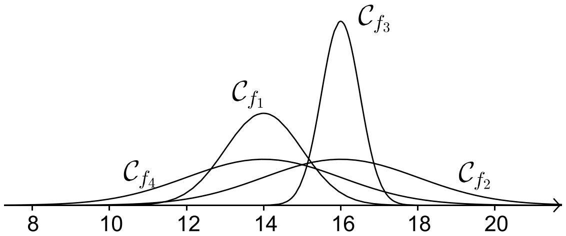
15 La variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 12 et d'écart-type 10. Calculer
a. $P(-2 \leq X \leq 20)$ **b.** $P(X \geq 10)$
c. $P(X < 18)$ **d.** $P(X < 9)$

16 Le délai de livraison d'une pièce, en jours, suit la loi normale $\mathcal{N}(20; 25)$. Quelle est la probabilité pour le délai de livraison soit
a. compris entre 18 et 23 jours ?
b. supérieur à 30 jours ?
c. inférieur à 15 jours ?
d. inférieur à 25 jours ?

17 La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(1; 0{,}04)$. Déterminer le réel k tel que

a. $P(X < k) = 0{,}895$ **b.** $P(X \geq k) = 0{,}895$
c. $P(X \leq k) = 0{,}01$ **d.** $P(X \leq k) = 0{,}999$

18 On a représenté les densités f_1, f_2, f_3, f_4 de variables aléatoire suivant des lois normales.



Associer à chaque densité ses paramètres

a. $\mu = 14$ et $\sigma = 1$ **b.** $\mu = 16$ et $\sigma = 0{,}5$
c. $\mu = 16$ et $\sigma = 2$ **d.** $\mu = 14$ et $\sigma = 2$

19 *(2015, Amérique du Nord).* Des chercheurs ont conçu un test pour évaluer la rapidité de lecture d'élèves de CE2.
Ce test consiste à chronométrer la lecture d'une liste de 20 mots. On a fait passer ce test à un très grand nombre d'élèves de CE2. On appelle X la variable aléatoire qui donne le temps en seconde mis par un élève de CE2 pour passer le test. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 32$ et d'écart-type $\sigma = 13$.
Entourer la bonne réponse.

1. La probabilité $P(19 \leq X \leq 45)$ arrondie au centième est :
   a. 0,50 **b.** 0,68 **c.** 0,84 **d.** 0,95
2. On note t la durée de lecture vérifiant $P(X \leq t) = 0{,}9$. La valeur de t arrondie à l'entier est :
   a. 32 sec **b.** 45 sec **c.** 49 sec **d.** 58 sec

20 La quantité d'eau contenue dans une bouteille d'une certaine marque, exprimé en litres, suit la loi normale d'espérance 1 et d'écart-type 0,02. On choisit au hasard une bouteille de cette marque.

1. Quelle est la probabilité que cette bouteille contienne exactement un litre ?
2. Sans calculatrice, préciser la probabilité que cette bouteille contienne entre 0,96 et 1 L.
3. Calculer la probabilité que la bouteille contienne entre 0,975 et 1,02 L.

21 À jeun, la glycémie, taux de sucre dans le sang exprimé en grammes par litre, suit la loi normale de paramètres $\mu = 1{,}03$ et $\sigma = 0{,}115$. Répondre aux questions suivantes sans calculatrice.

1. Préciser la probabilité d'avoir un taux de glycémie normal, c'est-à-dire compris entre 0,8 et 1,26 g.L^{-1}.
2. L'hyperglycémie correspond à une glycémie supérieure à 1,26 g.L^{-1}. Quelle est la probabilité d'en souffrir ?

22 En France, la température moyenne en degré Celsius d'une journée d'octobre suit la loi normale de paramètres $\mu = 15$ et $\sigma = 3$.

1. Déterminer sans calculatrice la probabilité que lors d'une journée d'octobre la température soit comprise entre 12° et 18°.
2. Deux personnes vont se marier un samedi d'octobre. Elles espèrent que la température sera supérieure à 18° sans dépasser les 24°. Que peut-on leur dire ?

23 Une étude effectuée par un chercheur a montré que l'âge, en mois, au cours duquel apparaissent les premiers mots de vocabulaire chez les enfants suit la loi normale $\mathcal{N}(11{,}5; 3{,}2)$.

1. Déterminer le taux d'enfants n'ayant pas encore prononcé leurs premiers mots de vocabulaire au bout de 13 mois.
2. Déterminer à quel âge 25 % des enfants n'ont pas encore prononcé leurs premiers mots.

24 Les scores en saut en hauteur X d'un groupe de 600 filles définissent une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(115; 100)$. Les scores Y d'un groupe de 800 garçons définissent une variable aléatoire suivant un loi normale $\mathcal{N}(130; 225)$.

1. Estimer le nombre de filles dont le score est supérieur à la moyenne des garçons.
2. Estimer le nombre de garçons dont le score est inférieur à la moyenne des filles.

25 Une usine commercialise de la farine en sachets. La variable aléatoire X qui à chaque sachet choisi au hasard associe sa masse en gramme suit une loi normale $\mathcal{N}(1020; 6{,}25)$.

1. Quelle est à 10^{-4} près la probabilité qu'un sachet pèse plus de 1025 grammes ?
2. Déterminer le plus petit poids de sachet (en nombre entier) qui est tel que au moins 6 % des sachets fabriqués soient plus légers que lui.
3. Quel est le plus grand poids de sachet (en nombre entier) qui est tel que au moins 6 % des sachets fabriqués soient plus lourds que lui ?

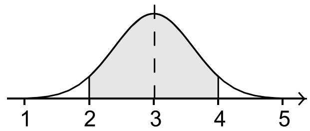
26 *(2015, Antilles-Guyane).* Une machine permet le conditionnement d'un jus de fruit dans des bouteilles.
La quantité de jus injecté dans une bouteille par la machine, exprimée en ml (millilitre), est modélisée avec une variable aléatoire réelle X.
On admet que celle-ci suit une loi normale de moyenne $\mu = 500$ et d'écart-type $\sigma = 2$.
On prélève une bouteille au hasard en fin de chaîne de remplissage.

1. Déterminer $P(X \leq 496)$. Donner le résultat arrondi à 10^{-2} près.
2. Déterminer la probabilité que la bouteille ait un contenu compris entre 497 et 500 millilitres. Donner le résultat arrondi à 10^{-2} près.
3. Comment choisir la valeur de α afin que
$$P(500 - \alpha \leq X \leq 500 + \alpha)$$
soit approximativement égale à 0,95 à 10^{-2} près ?

27 Un producteur commercialise des kiwis pour la grande distribution si leur masse est comprise entre 85 et 95 grammes. On admet que la variable aléatoire qui à chaque kiwi associe sa masse suit une loi $\mathcal{N}(90; 9)$.

1. Combien de fruits seront commercialisés en moyenne sur 10 000 kiwis ?
2. Déterminer le plus petit intervalle I centré autour de 90 tel que $P(X \in I) \geq 0{,}995$.

28 On a représenté ci-contre la densité d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$.



Déterminer μ et σ sachant que l'aire colorée vaut 0,9.