Échantillonnage et estimation – Exercices

Loi binomiale, révision

1 Une classe compte 30 élèves dont 20 filles. À chaque cours de physique, le professeur interroge au hasard un élève sans se rappeler quels élèves il a précédemment interrogés.

1. Quelle est la probabilité que sur 10 cours consécutifs, exactement 4 filles soient interrogées ?

2. Quelle est la probabilité que sur 10 cours consécutifs au plus 5 garçons soient interrogés ?

2 Dans une fabrication d'objets en série, 8 % de ces objets présentent un défaut. Un carton contient dix objets qui présentent ou non le défaut indépendamment les uns des autres. Calculer à 10^{-3} près la probabilité que dans un carton :

a. les dix objets soient sans défaut ;

b. 7 objets soient sans défaut ;

c. au moins 7 objets soient sans défaut.

Variable aléatoire fréquence

3 Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,5$.

1. Calculer $P(X = 40)$ à 10^{-4} près.

2. En déduire la probabilité de l'événement $(F = 0,4)$ où F désigne la variable aléatoire fréquence associée à la variable aléatoire X.

4 On considère une population présentant un caractère présent avec une proportion $p = 0,35$. Soit F la variable aléatoire fréquence associé aux échantillons de taille $n = 40$.

1. Calculer $P(0,025 \leq F \leq 0,45)$ à 10^{-4} près.

2. Calculer $P(F \geq 0,5)$ à 10^{-4} près.

3. Calculer $P(0,36 \leq F \leq 0,7)$ à 10^{-4} près.

5 *(2014, centres étrangers).* Une grande entreprise vient de clôturer sa campagne de recrutement qui s'est déroulée en deux temps :

- premier temps : étude du dossier présenté par le candidat ;
- deuxième temps : entretien en vue du recrutement.

Le processus de recrutement mis en œuvre par l'entreprise est le suivant :

- si le dossier est jugé de bonne qualité, alors le candidat est reçu en entretien par le directeur des ressources humaines ;
- si le dossier n'est pas jugé de bonne qualité, alors le candidat subit des tests puis est reçu en entretien par le directeur de l'entreprise.

Dans les deux cas, à l'issue de l'entretien, le candidat est recruté ou ne l'est pas. À l'issue de cette campagne de recrutement, l'entreprise publie les résultats suivants :

- 30 % des candidats avaient un dossier jugé de bonne qualité ;
- 20 % des candidats n'ayant pas un dossier jugé de bonne qualité ont été recrutés ;
- 38 % des candidats ont été recrutés.

1. On prend un candidat au hasard et on note :
- D l'évènement « le candidat a un dossier jugé de bonne qualité » ;
- R l'évènement « le candidat est recruté par l'entreprise ».

a. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité que le candidat n'ait pas un dossier de bonne qualité et ne soit pas recruté par l'entreprise.

c. Montrer que la probabilité de l'évènement $D \cap R$ est égale à 0,24.

d. En déduire la probabilité qu'un candidat soit recruté sachant que son dossier est jugé de bonne qualité.
Compléter l'arbre pondéré réalisé dans la question **a.**

2. Dix personnes postulent pour un emploi dans l'entreprise. Les études de leurs candidatures sont faites indépendamment les unes des autres. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi les 10 personnes.

a. Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,38$.

b. Calculer la probabilité qu'au moins une des dix personnes soit recrutée. On donnera la valeur exacte puis une valeur du résultat arrondie à 10^{-3}.

3. Deux amis, Aymeric et Coralie, sont convoqués le même jour pour un entretien avec la direction des ressources humaines.
Coralie arrive à 8 h 30 alors qu'Aymeric arrive au hasard entre 8 h et 9 h.
On désigne par T la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée d'Aymeric et on admet que T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[8; 9]$.
Déterminer la probabilité pour que Coralie attende Aymeric plus de dix minutes.

Échantillonnage

6 On donne la proportion p d'un caractère dans une population et la taille n d'un échantillon. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % dans chacun des cas suivants. Attention à la validité des conditions sur n et p.

a. $n = 30$ et $p = 0,5$

b. $n = 100$ et $p = 0,44$

c. $n = 100$ et $p = 0,02$

d. $n = 10000$ et $p = 0,36$

7 Il y a 23 % d'élèves boursiers dans les établissements d'enseignement secondaire en France. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des boursiers dans les lycées de 1200 élèves. Arrondir à 10^{-3}.

8 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres 320 et 0,16.
On donne les résultats suivants arrondis à 10^{-3} près.

$P(X \leq 37) \approx 0,015$	$P(X \leq 63) \approx 0,967$
$P(X \leq 38) \approx 0,023$	$P(X \leq 64) \approx 0,976$
$P(X \leq 39) \approx 0,034$	$P(X \leq 65) \approx 0,983$

Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % d'une fréquence correspondant à la réalisation de X sur un échantillon aléatoire de taille 320.

9 22 % des français sont d'accord pour supprimer les panneaux indiquant la présence de radars sur les routes. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance 95 % de la proportion de personnes désirant supprimer les panneaux dans un échantillon de 2000 personnes.
Comparer avec la méthode de Première ES.

Prise de décision

10 Une entreprise fabrique des composants électroniques en grande quantité. Une étude interne affirme que la probabilité qu'un composant électronique choisi au hasard dans cette production soit défectueux est égale à 2 %.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence de composants électroniques défectueux sur des échantillons de taille 1000.
2. Un client a acheté 1000 pièces parmi lesquelles 23 étaient défectueuses. Peut-il remettre en cause l'enquête interne ?
3. Même question pour l'achat de $10\,000$ pièces parmi lesquelles 230 étaient défectueuses.

11 En 1976, dans un comté du Texas, Rodrigo Partida était condamné à huit ans de prison. Il attaqua ce jugement au motif que la désignation des jurés de ce comté était discriminante à l'écart des américains d'origine mexicaine. En effet, 79 % de la population de ce comté est d'origine mexicaine, et sur les 870 personnes convoquées pour être jurés lors d'une certain période de référence, il n'y eut que 339 personnes d'origine mexicaine. Peut-on dire que la constitution des jurys est faite de façon aléatoire ?

12 Une étude américaine, semble-t-il sérieuse, a émis l'hypothèse que la proportion de personnes non réceptive à l'hypnose est de 22 %. Lors d'une émission télévisée retransmise en direct, 40 spectateurs présents sur le plateau ont été choisis au hasard par un hypnotiseur pour participer à son numéro. Malgré de nombreuses tentatives de ce dernier, 13 spectateurs restent insensibles et donc non réceptifs à cette séance d'hypnose en groupe.

1. Préciser la fréquence observée de personnes non réceptives à l'hypnose lors de ce numéro.
2. Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence observée de personnes non réceptives à l'hypnose dans un groupe de 40 personnes choisies au hasard.
3. À partir de cette émission télévisée, peut-on dire que l'hypothèse faite par cette étude n'est pas réaliste ?

13 *(2014, Amérique du Nord).* Un investisseur souhaite acheter un appartement dans l'objectif de le louer. Pour cela, il s'intéresse à la rentabilité locative de cet appartement.
Les trois parties peuvent être traitées indépendamment. Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-4}.

Partie A – On considère deux types d'appartement :
- les appartements d'une ou deux pièces notés respectivement T1 et T2 ;
- les appartements de plus de deux pièces.

Une étude des dossiers d'appartements loués dans un secteur a montré que :
- 35 % des appartements loués sont de type T1 ou T2 ;
- 45 % des appartements loués de type T1 ou T2 sont rentables ;
- 30 % des appartements loués, qui ne sont ni de type T1 ni de type T2, sont rentables.

On choisit un dossier au hasard et on considère les évènements suivants :
- T : « l'appartement est de type T1 ou T2 » ;
- R : « l'appartement loué est rentable » ;

1. Traduire cette situation par un arbre pondéré.
2. Montrer que la probabilité qu'un appartement loué soit rentable est égale à $0{,}3525$.
3. Calculer la probabilité que l'appartement soit de type T1 ou T2, sachant qu'il est rentable.

Partie B – On considère X la variable aléatoire égale au nombre d'appartements rentables dans un échantillon aléatoire de 100 appartements loués. On admet que toutes les conditions sont réunies pour assimiler X à une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 35$ et d'écart-type $\sigma = 5$. À l'aide de la calculatrice :

1. Calculer $P(25 \leq X \leq 35)$.
2. Calculer la probabilité qu'au moins 45 appartements parmi les 100 appartements loués soient rentables.

Partie C – L'investisseur se rend dans une agence immobilière pour acheter un appartement et le louer. Le responsable de cette agence lui affirme que 60 % des appartements sont rentables. Pour vérifier son affirmation, on a prélevé au hasard 280 dossiers d'appartements loués. Parmi ceux-ci, 120 sont rentables.

1. Déterminer la fréquence observée dans cet échantillon.
2. Peut-on valider l'affirmation du responsable de cette agence ? Justifier cette réponse. On pourra s'aider du calcul d'un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

Estimation et intervalles de confiance

14 Sur un échantillon de 100 véhicules prélevés au hasard dans un parc de véhicules neufs d'une entreprise. Ce parc contient suffisamment de véhicule pour qu'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise. On constate qu'au bout de 6 mois de mise en circulation, 89 véhicules de cet échantillon n'ont pas eu de sinistre.

1. Déterminer un intervalle de confiance de p au niveau de confiance $0{,}95$.
2. On considère l'affirmation « la proportion p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question précédente ». Cette affirmation est-elle vraie ?

15 Une semaine avant une élection un sondage est effectué sur 1024 personnes choisis au hasard parmi les 42821 inscrites sur les listes ; 532 déclarent voter pour le candidat A. Le candidat A a-t-il raison de penser qu'il va être élu ?

16 En lançant 200 fois un dé, on obtient 28 fois le numéro 1. Donner un intervalle de confiance pour la proportion du nombre de 1, au niveau de confiance de 95 %.

17 Une banque désire savoir si son site est bien adapté au besoin de plus de 5 millions de clients. Elle commande à un institut de sondage une enquête afin d'estimer la proportion de ses clients satisfaits. Elle impose un niveau de confiance de 95 % avec une amplitude de $0{,}04$.
Combien de personnes doit au minimum interroger l'institut de sondage ?

18 En interrogeant 100 personnes sur un sujet pour lequel il faut répondre « oui » ou « non » on obtient 51 « oui » et 49 « non ».

1. Donner les intervalles de confiance pour les proportions de « oui » et « non » au niveau de confiance 95 %.

2. En supposant que les proportions restent inchangées, déterminer le nombre minimal de personnes qu'il faut interroger pour que les intervalles de confiance des deux intervalles ne se recouvrent pas.

19 *(2014, Métropole).*

Partie A – Chaque jour, Antoine s'entraine au billard américain pendant une durée comprise entre 20 minutes et une heure. On modélise la durée de son entrainement, en minutes, par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[20; 60]$.

1. Calculer la probabilité p pour que l'entrainement dure plus de 30 minutes.

2. Calculer l'espérance de X. Interpréter ce résultat.

Partie B – *Dans cette partie les probabilités seront, si besoin, arrondies au millième.*
Les boules de billard américain avec lesquelles Antoine s'entraine sont dites de premier choix si leur diamètre est compris entre $56{,}75$ mm et $57{,}25$ mm ; sinon elles sont dites de second choix.
On note D la variable aléatoire qui, à chaque boule prélevée au hasard dans la production de l'entreprise, associe son diamètre, en millimètres.
On suppose que D suit la loi normale d'espérance 57 et d'écart-type $0{,}11$.

1. Déterminer la probabilité p_1 que la boule prélevée ait un diamètre inférieur à 57 mm.

2. Déterminer la probabilité p_2 que la boule prélevée soit une boule de premier choix.

3. En déduire la probabilité p_3 que la boule prélevée soit une boule de second choix.

Partie C – Le président de la fédération française de billard (FFB) souhaite estimer le niveau de satisfaction de ses 14 000 licenciés quant à l'organisation des tournois.
Antoine estime que les 80 adhérents de son club constituent un échantillon représentatif des licenciés de la FFB. Il est chargé de faire une étude au sein de son club : les 80 adhérents ont répondu, et 66 ont déclaré qu'ils étaient satisfaits.

1. Quelle est, sur cet échantillon, la fréquence observée f de personnes satisfaites de la FFB ?

2. Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion p de licenciés satisfaits de la FFB. Les bornes de l'intervalle seront arrondies au millième.

20 *(2014, Liban, Bac S).* Une fabrique de desserts glacés dispose d'une chaîne automatisée pour remplir des cônes de glace.

Partie A – Les cônes de glace sont emballés individuellement puis conditionnés en lots de 2 000 pour la vente en gros.
On considère que la probabilité qu'un cône présente un défaut quelconque avant son conditionnement en gros est égale à $0{,}003$.
On nomme X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 2 000 cônes prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cônes défectueux présents dans ce lot.
On suppose que la production est suffisamment importante pour que les tirages puissent être supposés indépendants les uns des autres.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.

2. Si un client reçoit un lot contenant au moins 12 cônes défectueux, l'entreprise procède alors à un échange de celui-ci.
Déterminer la probabilité qu'un lot ne soit pas échangé ; le résultat sera arrondi au millième.

Partie B – Chaque cône est rempli avec de la glace à la vanille. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque cône, associe la masse (exprimée en grammes) de crème glacée qu'il contient.
On suppose que Y suit une loi normale $\mathcal{N}(110; \sigma^2)$ d'espérance $\mu = 110$ et d'écart-type σ.
Une glace est considérée comme commercialisable lorsque la masse de crème glacée qu'elle contient appartient à l'intervalle $[104; 116]$.
Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près du paramètre σ telle que la probabilité de l'évènement « la glace est commercialisable » soit égale à 0,98.

Partie C – Une étude réalisée en l'an 2000 a permis démontrer que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces était de 84 %.
En 2010, sur 900 personnes interrogées, 795 d'entre elles déclarent consommer des glaces.
Peut-on affirmer, au niveau de confiance de 95 % et à partir de l'étude de cet échantillon, que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces est resté stable entre les années 2000 et 2010 ?

21 *(2014, Liban). QCM avec une seule réponse exacte.*
Un fumeur est dit fumeur régulier s'il fume au moins une cigarette par jour.
En 2010, en France, la proportion notée p de fumeurs réguliers, âgés de 15 à 19 ans, était de 0,236. On a donc $p = 0{,}236$.

1. La probabilité que, sur un groupe de 10 jeunes âgés de 15 à 19 ans choisis au hasard et de manière indépendante, aucun ne soit fumeur régulier est, à 10^{-3} près :
a. $0{,}136$ **b.** 0 **c.** $0{,}068$ **d.** $0{,}764$

2. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 de la fréquence de fumeurs réguliers dans un échantillon de 500 jeunes âgés de 15 à 19 ans est : *(les bornes de chaque intervalle sont données à 10^{-3} près)*
a. $[0{,}198; 0{,}274]$ **b.** $[0{,}134; 0{,}238]$
c. $[0{,}191; 0{,}281]$ **d.** $[0{,}192; 0{,}280]$

3. La taille n de l'échantillon choisi afin que l'amplitude de l'intervalle de fluctuation au seuil de 0,95 soit inférieure à 0,01, vaut :
a. 200 **b.** 400 **c.** 21167 **d.** 27707

4. Dans un échantillon de 250 jeunes fumeurs réguliers, âgés de 15 à 19 ans, 99 sont des filles.
Au seuil de 95 %, un intervalle de confiance de la proportion de filles parmi les fumeurs réguliers âgés de 15 à 19 ans est : (*les bornes de chaque intervalle sont données à 10^{-2} près*)
a. $[0{,}35; 0{,}45]$ **b.** $[0{,}33; 0{,}46]$
c. $[0{,}39; 0{,}40]$ **d.** $[0{,}30; 0{,}50]$