Nombres complexes (partie I)

Remarque sur la nécessité de $\mathbb{C}$ pour résoudre des équations du second degré aussi simple que $x^2 + 1 = 0$.

1. Forme algébrique d'un nombre complexe

❖ Définition

Théorème-définition. Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ et appelé <u>ensemble des nombres complexes</u> qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$;
- l'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celle de $\mathbb{R}$ et les règles de calcul restent les mêmes ;
- il existe un nombre complexe noté i tel que $i^2 = -1$;
- tout nombre complexe s'écrit de façon *unique* sous la forme $a + ib$ avec a et b réels.

Définition. *L'écriture d'un nombre complexe z sous forme $a + ib$ avec a et b réels s'appelle la <u>forme algébrique</u> de z. On dit que a est la <u>partie réelle</u> de z et est notée* $\mathrm{Re}(z)$ *et que b est la <u>partie imaginaire</u> de z et est notée* $\mathrm{Im}(z)$.

<u>Exemple</u>

- $1 - 2i$ est un nombre complexe de partie réelle 1 et de partie imaginaire -2.
- $3i$ est un nombre complexe de partie réelle 0 et de partie imaginaire 3. On dit que c'est un <u>imaginaire pur</u> (sa partie réelle est nulle)

Théorème. Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Remarque. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$.

❖ Opération dans $\mathbb{C}$

Pour effectuer des calculs, il suffit d'utiliser les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$ avec la règle supplémentaire que $i^2 = -1$.

<u>Exemple</u>

Soit $z = 1 - 2i$ et $z' = 2 + 3i$. On a

- $z + z' = (1 - 2i) + (2 + 3i) = 1 + 2 - 2i + 3i = 3 + i$;
- $zz' = (1 - 2i)(2 + 3i) = 2 + 3i - 4i - 6i^2 = 2 - i - 6 \times (-1) = 8 - i$;
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{1-2i} = \frac{1+2i}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{1+2i}{1^2-(2i)^2} = \frac{1+2i}{1+4} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$.

2. Représentation graphique d'un nombre complexe

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Définition. *À tout point M du plan de coordonnées $(a;b)$ on associe le complexe $z=a+ib$ appelé <u>affixe</u> du point M.*
Réciproquement, à tout complexe $z=a+ib$ avec a et b réels on associe le point M de coordonnées $(a;b)$.
Le plan muni d'un repère orthonormé direct dans lequel on représente des nombres complexes est appelé <u>plan complexe</u>.

On note z_M l'affixe du point M et $M(z)$ le point d'affixe z.

Remarque. Les point $M(z)$ et $M(-z)$ sont symétriques par rapport à O.

Si $a=\mathrm{Re}(z)=0$, alors $z=ib$ et $M(z)$ appartient à l'axe des ordonnées qu'on appelle axe des imaginaires purs.
Si $b=\mathrm{Im}(z)=0$, alors $z=a$ et $M(z)$ appartient à l'axe des abscisses qu'on appelle axe des réels.

Définition. *À tout vecteur $\vec{u}$ du plan de coordonnées $(a;b)$ est associé le nombre complexe $z=a+ib$ appelé <u>affixe</u> de $\vec{u}$. On note ce complexe $z_{\vec{u}}$.*

Théorème.
1. $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$
2. $z_{\vec{u}+\overrightarrow{u'}}=z_{\vec{u}}+z_{\overrightarrow{u'}}$
3. Pour tout réel k on a $z_{k\vec{u}}=kz_{\vec{u}}$
4. Si I désigne le milieu du segment $[AB]$, on a $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$

Démonstration. Soit $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ et par définition on a $z_A=x_A+iy_A$ et $z_B=x_B+iy_B$. Il en résulte que
$$z_{\overrightarrow{AB}}=(x_B-x_A)+i(y_B-y_A)=x_B+iy_B-(x_A+iy_A)=z_B-z_A.$$
2. Le vecteur $\vec{u}+\overrightarrow{u'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ et par définition on a $z_{\vec{u}}=x+iy$ et $z_{\overrightarrow{u'}}=x'+iy'$ donc
$$z_{\vec{u}+\overrightarrow{u'}}=(x+x')+i(y+y')=x+iy+x'+iy'=z_{\vec{u}}+z_{\overrightarrow{u'}}.$$
3. Puisque le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$,
$$z_{k\vec{u}}=kx+iky=k(x+iy)=kz_{\vec{u}}.$$
4. Si I est le milieu de $[AB]$ on peut écrire $2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}$, d'où en passant aux affixes
$$2(z_I-z_A)=z_B-z_A\Leftrightarrow 2z_I=z_B+z_A\Leftrightarrow z_I=\frac{z_A+z_B}{2}.\ \blacksquare$$

<u>**Exemple**</u>

Considérons les points A, B, C d'affixes $z_A=-3+i$, $z_B=-1-2i$ et $z_C=4+3i$.
Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Réponse. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2 - 3i$. Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme, il faut et il suffit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, d'où $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$, par conséquent l'affixe z_D du point D doit vérifier $2 - 3i = z_C - z_D$ et donc $z_D = 2 + 6i$.

Exemple

À tout point M d'affixe z, différent de l'origine O du repère, on associe le point M' d'affixe $Z = i + \frac{2}{z}$.
Quel est l'ensemble des points M tel que M' appartienne à l'axe des abscisses ?

Réponse. Désignons par $x + iy$ la forme algébrique de z. Celle de Z est donc

$$Z = i + \frac{2}{x+iy} = i + \frac{2(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = i + \frac{2x-2iy}{x^2+y^2} = \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2-2y}{x^2+y^2}i.$$

Pour que $M'(x;y)$ appartienne à l'axe des abscisses $(O;\vec{u})$, on doit avoir

$$\mathrm{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2-2y}{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2y = 0 \\ x^2+y^2 \neq 0 \end{cases}$$

Désignons par Γ l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 - 2y = 0$. On peut l'écrire

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

ce qui montre que Γ est le cercle de centre $\Omega(0;1)$ et de rayon 1.
Par ailleurs $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow M = O$. Ainsi

$$M'(x;y) \in (O;\vec{u}) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in \Gamma \\ M \neq O \end{cases}.$$

Comme il est clair que $O \in \Gamma$, on conclut que l'ensemble cherche est le cercle Γ privé du point O.

3. Module d'un nombre complexe

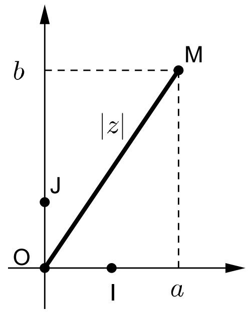
Définition. *Soit z un nombre complexe de forme algébrique $a + ib$. On appelle <u>module</u> de z, noté $|z|$, le réel positif défini par $\sqrt{a^2+b^2}$.*

Si z est un nombre réel, le module de z coïncide avec sa valeur absolue, ce qui justifie la notation.

Exemple

On a $|1-2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ et $|-3| = 3$.

D'après le théorème de Pythagore, $|z|$ est la distance de l'origine du repère O au point M d'affixe z.



Théorème. Pour tous points A et B, on a $|z_A - z_B| = AB$.

Démonstration. En effet en écrivant $z_A = a + ib$ et $z_B = a' + ib'$, sous forme algébrique,

$$|z_A - z_B| = |a - a' + i(b-b')| = \sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2} = AB. \blacksquare$$

❖ Ensembles de points

Soit A et B deux points distincts, et r un réel positif. On rappelle que

- l'ensemble des points M vérifiant $MA = MB$ est la médiatrice du segment $[AB]$;
- l'ensemble des points M vérifiant $MA = r$ est le cercle de centre A et de rayon r.

Exemple

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2i| = 3$.

Réponse. Soit A le point d'affixe $2i$. Alors $|z - 2i| = 3 \Leftrightarrow |z - z_A| = 3 \Leftrightarrow AM = 3$, donc l'ensemble cherché est le cercle de A et de rayon 3.

Retrouvons ce résultat par un calcul. Soit $z = x + iy$ la forme algébrique de z. Ainsi

$$|z - 2i| = 3 \Leftrightarrow |x + (y-2)i| = 3 \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

et on reconnaît l'équation du cercle de centre $A(0; 2)$ et de rayon 3.

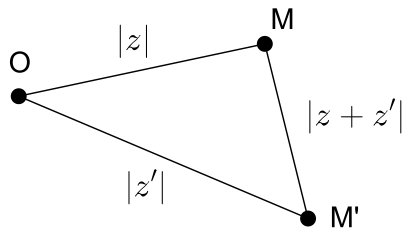
❖ Propriétés des modules

Théorème. Pour tous nombres complexes z et z',

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|-z| = |z|$
3. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)

Démonstration. Soit $a + ib$ et $a' + ib'$ les écritures algébriques de z et z'

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. On a $|-z|^2 = |-a - ib| = (-a)^2 + (-b)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$.
3. **Démonstration géométrique.** On considère les points M et M' d'affixe z et $-z'$.
   On a $OM = |z|$, $OM' = |-z'| = |z'|$ et
   $$MM' = |z - (-z')| = |z + z'|.$$
   Or d'après l'inégalité triangulaire dans le triangle OMM', $MM' \leq OM + OM'$, ce qui donne bien $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.



   Démonstration algébrique.
   Comme chaque membre de l'inégalité est positif, le résultat cherché équivaut à
   $$|z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2.$$
   D'une part
   $$\begin{aligned} |z + z'|^2 = |(a + a') + i(b + b')|^2 &= (a + a')^2 + (b + b')^2 \\ &= a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + 2aa' + 2bb' \end{aligned}$$
   et d'autre part
   $$\begin{aligned} (|z| + |z'|)^2 &= \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2}\right)^2 \\ &= a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)}, \end{aligned}$$
   si bien qu'il suffit de prouver $2aa' + 2bb' \leq 2\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)}$ ou encore
   $$aa' + bb' \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} \quad (*)$$
   pour conclure.
   Si $aa' + bb' \leq 0$, $(*)$ est évidemment vraie. Sinon après élévation au carré et développement, elle équivaut à

$$a^2a'^2 + 2aa'bb' + b^2b'^2 \leq a^2a'^2 + a^2b'^2 + b^2a'^2 + b^2b'^2$$

soit après simplification des termes $a^2a'^2$ et $b^2b'^2$,

$$a^2{b'}^2 + b^2a'^2 - 2aa'bb' \geq 0.$$

On remarque alors que le membre de gauche est le développement de $(ab' - ba')^2$ qui est évidemment un nombre positif. ■

Théorème. Pour tous nombres complexes z et z',

1. $|zz'| = |z||z'|$
2. Pour tout entier naturel n, on a $|z^n| = |z|^n$
3. Pour $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ (en particulier $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ pour $z \neq 0$)

Démonstration.

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ les écritures algébriques de z et z'.

1. On a $zz' = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$, donc $|zz'|^2 = (aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2$. Par ailleurs $(|z||z'|)^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)$ et il est facile de vérifier que ces deux expressions sont égales. Comme les modules sont des nombres positifs, il vient bien $|zz'| = |z||z'|$.
2. Il est nécessaire de faire un raisonnement par récurrence, voir chapitre 2.
3. On a $z = z' \times \frac{z}{z'}$, donc par la propriété 1, $|z| = |z'| \times \left|\frac{z}{z'}\right|$. Comme z' est non nul, il en est de même de son module, donc $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$. ■

4. Conjugué d'un nombre complexe

Définition. *Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous forme algébrique. On appelle conjugué de z le complexe $a - ib$ et on le note $\bar{z}$.*

Remarque. Les point $M(z)$ et $M(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple

$\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$; $\bar{5} = 5$ et $\bar{i} = -i$.

Théorème.

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$.

Démonstration.

1. D'une part $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 0$ et d'autre part
$$z = \bar{z} \Leftrightarrow x + iy = x - iy \Leftrightarrow y = -y \Leftrightarrow y = 0$$
en vertu du cas d'égalité de deux complexes.
2. z est imaginaire pur si et seulement si $x = 0$. On raisonne comme dans le 1. ■

Théorème. Soit z et z' deux nombres complexes.

1. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{zz'} = \bar{z}\overline{z'}$
3. Pour tout entier naturel n, on a $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

4. Pour $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ (en particulier $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ pour $z \neq 0$)
5. $|\bar{z}| = |z|$
6. $z\bar{z} = |z|^2$
7. $\bar{\bar{z}} = z$

Démonstration. Soit $a + ib$ et $a' + ib'$ les formes algébriques de z et z'.

1. $\overline{z + z'} = \overline{(a + a') + \imath(b + b')} = a + a' - i(b + b') = a - ib + a' - ib' = z + \overline{z'}$.
2. $\overline{zz'} = \overline{(a + \imath b)(a' + \imath b')} = \overline{aa' - bb' + \imath(ab' + a'b)} = aa' - bb' - i(ab' + a'b)$ et par ailleurs $\bar{z}\overline{z'} = (a - ib)(a' - ib') = aa' - bb' - i(ab' + a'b)$ ce qui établit l'égalité.
3. On procède par récurrence sur $n \geq 0$. Pour $n = 0$ c'est clair. Si la propriété est vraie pour un entier n alors d'après la propriété 2, on a $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times z$ et l'hypothèse de récurrence permet alors d'écrire $\overline{z^n} \times z = \bar{z}^n \times \bar{z} = \bar{z}^{n+1}$, ce qui prouve que la propriété est héréditaire.
4. Puisque $z = z' \times \frac{z}{z'}$, il vient d'après la propriété 2, $\bar{z} = \overline{\left(z' \times \frac{z}{z'}\right)} = \overline{z'} \times \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}$. En divisant par $\overline{z'}$, qui est non nul, il vient $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$.
5. On a $|\bar{z}|^2 = |a - ib|^2 = a^2 + (-b)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$.
4. On a $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$.
5. Évident. ■

Exemple

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue z.

a. $z - 3 = i - iz$
b. $\bar{z} - 2z = 1 + 6i$.

Réponse.

a. On isole z :

$$z - 3 = i - iz \Leftrightarrow z + iz = 3 + i \Leftrightarrow z(1 + i) = 3 + i \Leftrightarrow z = \frac{3+i}{1+i}$$

Puis $\frac{3+i}{1+i} = \frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-3i+i-i^2}{1^2-i^2} = \frac{3-2i+1}{1+1} = \frac{4-2i}{2} = 2 - i$. Ainsi $S = \{2 - i\}$.

b. On écrit z sous forme algébrique $a + ib$. On a donc

$$\bar{z} - 2z = 1 + 6i \Leftrightarrow (a - ib) - 2(a + ib) = 1 + 6i \Leftrightarrow -a - 3ib = 1 + 6i.$$

D'après le cas d'égalité de deux complexes, il vient

$$\bar{z} - 2z = 1 + 6i \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ -3b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

et donc $S = \{-1 - 2i\}$.

Exemple

Prouvons que pour tout complexe z, $Z = \frac{(z+\bar{z})^3}{z\bar{z}+1}$ est réel.

Première méthode, en montrant que $\bar{Z} = Z$. On a

$$\bar{Z} = \overline{\left(\frac{(z + \bar{z})^3}{z\bar{z} + 1}\right)} = \frac{\overline{(z + \bar{z})^3}}{\overline{(z\bar{z} + 1)}} = \frac{\left(\overline{(z + \bar{z})}\right)^3}{\bar{z}\bar{\bar{z}} + \bar{1}} = \frac{(\bar{z} + \bar{\bar{z}})^3}{\bar{z}z + 1} = Z.$$

Deuxième méthode, en écrivant $\bar{Z}$ sous forme algébrique. Pour cela, appelons $a + ib$ la forme algébrique de z. Il vient $z + \bar{z} = 2a$ et $z\bar{z} = a^2 + b^2$ donc $Z = \frac{(2a)^3}{a^2+b^2}$ est bien réel.

5. Équations du second degré à coefficients réels

Théorème. Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue z où a, b, c sont des nombres réels avec $a \neq 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :
$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$
- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution double réelle : $z_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées distinctes :
$$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Démonstration. Si $\Delta \geq 0$ le résultat a été vu en première, c'est l'égalité
$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$
qui a permis de montrer le résultat.
Si $\Delta < 0$, on a $-\Delta > 0$ et donc $\Delta = -\left(\sqrt{-\Delta}\right)^2$ ou encore $\Delta = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$, si bien que cette relation permet d'écrire
$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$
et l'équation-produit admet bien les racines annoncées. ■

Dans tous les cas, il est plus simple de retenir ce résultat sous la forme suivante.

Théorème. Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue z où a, b, c sont des nombres réels avec $a \neq 0$ et soit δ un complexe tel que $\delta^2 = \Delta$. Cette équation possède deux solutions (éventuellement confondues) qui sont $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

Exemple

Résolvons l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. On a $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 = \left(2i\sqrt{3}\right)^2$, donc cette équation admet deux solutions complexes, à savoir
$$z_1 = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3} \text{ et } z_2 = 1 - i\sqrt{3}.$$