Nombres complexes (partie I)

Remarque sur la nécessité de $\mathbb{C}$ pour résoudre des équations du second degré aussi simple que $x^2 + 1 = 0$.

1. Forme algébrique d'un nombre complexe

❖ **Définition**

Théorème-définition. Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ et appelé ensemble des nombres complexes qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$;
- l'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celle de $\mathbb{R}$ et les règles de calcul restent les mêmes ;
- il existe un nombre complexe noté i tel que $i^2 = -1$;
- tout nombre complexe s'écrit de façon *unique* sous la forme $a + ib$ avec a et b réels.

Définition. *L'écriture d'un nombre complexe z sous forme $a + ib$ avec a et b réels s'appelle la forme algébrique de z. On dit que a est la partie réelle de z et est notée* $\mathrm{Re}(z)$ *et que b est la partie imaginaire de z et est notée* $\mathrm{Im}(z)$.

Exemple

- $1 - 2i$ est un nombre complexe de partie réelle 1 et de partie imaginaire -2.
- $3i$ est un nombre complexe de partie réelle 0 et de partie imaginaire 3. On dit que c'est un imaginaire pur (sa partie réelle est nulle)

Théorème. Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Remarque. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$.

❖ **Opération dans $\mathbb{C}$**

Pour effectuer des calculs, il suffit d'utiliser les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$ avec la règle supplémentaire que $i^2 = -1$.

Exemple

Soit $z = 1 - 2i$ et $z' = 2 + 3i$. On a

- $z + z' = (1 - 2i) + (2 + 3i) = 1 + 2 - 2i + 3i = 3 + i$;
- $zz' = (1 - 2i)(2 + 3i) = 2 + 3i - 4i - 6i^2 = 2 - i - 6 \times (-1) = 8 - i$;
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{1-2i} = \frac{1+2i}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{1+2i}{1^2-(2i)^2} = \frac{1+2i}{1+4} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$

2. Représentation graphique d'un nombre complexe

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Définition. *À tout point M du plan de coordonnées $(a;b)$ on associe le complexe $z=a+ib$ appelé* affixe *du point M.*
Réciproquement, à tout complexe $z=a+ib$ avec a et b réels on associe le point M de coordonnées $(a;b)$.
Le plan muni d'un repère orthonormé direct dans lequel on représente des nombres complexes est appelé plan complexe.

On note z_M l'affixe du point M et $M(z)$ le point d'affixe z.

Remarque. Les point $M(z)$ et $M(-z)$ sont symétriques par rapport à O.

Si $a=\mathrm{Re}(z)=0$, alors $z=ib$ et $M(z)$ appartient à l'axe des ordonnées qu'on appelle axe des imaginaires purs.
Si $b=\mathrm{Im}(z)=0$, alors $z=a$ et $M(z)$ appartient à l'axe des abscisses qu'on appelle axe des réels.

Définition. *À tout vecteur $\vec{u}$ du plan de coordonnées $(a;b)$ est associé le nombre complexe $z=a+ib$ appelé* affixe *de $\vec{u}$. On note ce complexe $z_{\vec{u}}$.*

Théorème.

1. $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$
2. $z_{\vec{u}+\overrightarrow{u'}}=z_{\vec{u}}+z_{\overrightarrow{u'}}$
3. Pour tout réel k on a $z_{k\vec{u}}=kz_{\vec{u}}$
4. Si I désigne le milieu du segment $[AB]$, on a $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$

Démonstration. Soit $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ et par définition on a $z_A=x_A+iy_A$ et $z_B=x_B+iy_B$. Il en résulte que
$$z_{\overrightarrow{AB}}=(x_B-x_A)+i(y_B-y_A)=x_B+iy_B-(x_A+iy_A)=z_B-z_A.$$
2. Le vecteur $\vec{u}+\overrightarrow{u'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ et par définition on a $z_{\vec{u}}=x+iy$ et $z_{\overrightarrow{u'}}=x'+iy'$ donc
$$z_{\vec{u}+\overrightarrow{u'}}=(x+x')+i(y+y')=x+iy+x'+iy'=z_{\vec{u}}+z_{\overrightarrow{u'}}.$$
3. Puisque le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$,
$$z_{k\vec{u}}=kx+iky=k(x+iy)=kz_{\vec{u}}.$$
4. Si I est le milieu de $[AB]$ on peut écrire $2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}$, d'où en passant aux affixes
$$2(z_I-z_A)=z_B-z_A\Leftrightarrow 2z_I=z_B+z_A\Leftrightarrow z_I=\frac{z_A+z_B}{2}.\ \blacksquare$$

Exemple

Considérons les points A, B, C d'affixes $z_A=-3+i$, $z_B=-1-2i$ et $z_C=4+3i$.
Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Réponse. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2 - 3i$. Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme, il faut et il suffit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, d'où $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$, par conséquent l'affixe z_D du point D doit vérifier $2 - 3i = z_C - z_D$ et donc $z_D = 2 + 6i$.

Exemple

À tout point M d'affixe z, différent de l'origine O du repère, on associe le point M' d'affixe $Z = i + \frac{2}{z}$.
Quel est l'ensemble des points M tel que M' appartienne à l'axe des abscisses ?

Réponse. Désignons par $x + iy$ la forme algébrique de z. Celle de Z est donc

$$Z = i + \frac{2}{x+iy} = i + \frac{2(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = i + \frac{2x-2iy}{x^2+y^2} = \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2-2y}{x^2+y^2}i.$$

Pour que $M'(x; y)$ appartienne à l'axe des abscisses $(O; \vec{u})$, on doit avoir

$$\mathrm{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 - 2y}{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$$

Désignons par Γ l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 - 2y = 0$. On peut l'écrire

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

ce qui montre que Γ est le cercle de centre $\Omega(0; 1)$ et de rayon 1.
Par ailleurs $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow M = O$. Ainsi

$$M'(x; y) \in (O; \vec{u}) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in \Gamma \\ M \neq O \end{cases}.$$

Comme il est clair que $O \in \Gamma$, on conclut que l'ensemble cherche est le cercle Γ privé du point O.

3. Module d'un nombre complexe

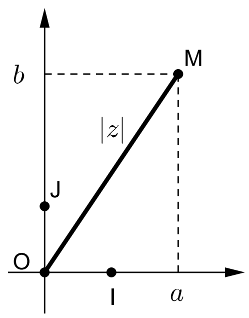
Définition. *Soit z un nombre complexe de forme algébrique $a + ib$. On appelle* <u>module</u> *de z, noté $|z|$, le réel positif défini par $\sqrt{a^2 + b^2}$.*

Si z est un nombre réel, le module de $|z|$ coïncide avec sa valeur absolue, ce qui justifie la notation.

Exemple

On a $|1 - 2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ et $|-3| = 3$.

D'après le théorème de Pythagore, $|z|$ est la distance de l'origine du repère O au point M d'affixe z.



Théorème. Pour tous points A et B, on a $|z_A - z_B| = AB$.

Démonstration. En effet en écrivant $z_A = a + ib$ et $z_B = a' + ib'$, sous forme algébrique,

$$|z_A - z_B| = |a - a' + i(b - b')| = \sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2} = AB. \blacksquare$$

- **Ensembles de points**

Soit A et B deux points distincts, et r un réel positif. On rappelle que

- l'ensemble des points M vérifiant $MA = MB$ est la médiatrice du segment $[AB]$;
- l'ensemble des points M vérifiant $MA = r$ est le cercle de centre A et de rayon r.

Exemple

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2i| = 3$.

Réponse. Soit A le point d'affixe $2i$. Alors $|z - 2i| = 3 \Leftrightarrow |z - z_A| = 3 \Leftrightarrow AM = 3$, donc l'ensemble cherché est le cercle de A et de rayon 3.

Retrouvons ce résultat par un calcul. Soit $z = x + iy$ la forme algébrique de z. Ainsi
$$|z - 2i| = 3 \Leftrightarrow |x + (y - 2)i| = 3 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$
et on reconnaît l'équation du cercle de centre $A(0; 2)$ et de rayon 3.

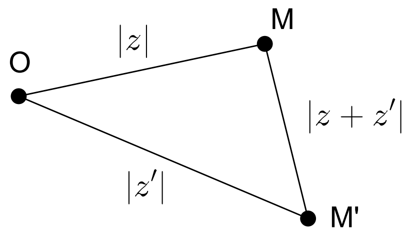
- **Propriétés des modules**

Théorème. Pour tous nombres complexes z et z',

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|-z| = |z|$
3. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)

Démonstration. Soit $a + ib$ et $a' + ib'$ les écritures algébriques de z et z'

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. On a $|-z|^2 = |-a - ib| = (-a)^2 + (-b)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$.
3. **Démonstration géométrique.** On considère les points M et M' d'affixe z et $-z'$.
   On a $OM = |z|$, $OM' = |-z'| = |z'|$ et
   $$MM' = |z - (-z')| = |z + z'|.$$
   Or d'après l'inégalité triangulaire dans le triangle OMM', $MM' \leq OM + OM'$, ce qui donne bien $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.



   Démonstration algébrique.
   Comme chaque membre de l'inégalité est positif, le résultat cherché équivaut à
   $$|z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2.$$
   D'une part
   $$|z + z'|^2 = |(a + a') + i(b + b')|^2 = (a + a')^2 + (b + b')^2$$
   $$= a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + 2aa' + 2bb'$$
   et d'autre part
   $$(|z| + |z'|)^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2}\right)^2$$
   $$= a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)},$$
   si bien qu'il suffit de prouver $2aa' + 2bb' \leq 2\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)}$ ou encore
   $$aa' + bb' \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} \quad (*)$$
   pour conclure.
   Si $aa' + bb' \leq 0$, $(*)$ est évidemment vraie. Sinon après élévation au carré et développement, elle équivaut à

$$a^2a'^2 + 2aa'bb' + b^2b'^2 \leq a^2a'^2 + a^2b'^2 + b^2a'^2 + b^2b'^2$$

soit après simplification des termes $a^2a'^2$ et $b^2b'^2$,

$$a^2{b'}^2 + b^2a'^2 - 2aa'bb' \geq 0.$$

On remarque alors que le membre de gauche est le développement de $(ab' - ba')^2$ qui est évidemment un nombre positif. ■

Théorème. Pour tous nombres complexes non nuls z et z',

1. $|zz'| = |z||z'|$
2. Pour tout entier naturel n, on a $|z^n| = |z|^n$
3. Pour $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ (en particulier $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ pour $z \neq 0$)

Démonstration.
Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ les écritures algébriques de z et z'.

1. On a $zz' = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$, donc $|zz'|^2 = (aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2$. Par ailleurs $(|z||z'|)^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)$ et il est facile de vérifier que ces deux expressions sont égales. Comme les modules sont des nombres positifs, il vient bien $|zz'| = |z||z'|$.
2. Il est nécessaire de faire un raisonnement par récurrence, voir chapitre 2.
3. On a $z = z' \times \frac{z}{z'}$, donc par la propriété 1, $|z| = |z'| \times \left|\frac{z}{z'}\right|$. Comme z' est non nul, il en est de même de son module, donc $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$. ■

4. Conjugué d'un nombre complexe

Définition. *Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous forme algébrique. On appelle* <u>*conjugué*</u> *de z le complexe $a - ib$ et on le note $\bar{z}$.*

Remarque. Les point $M(z)$ et $M(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

<u>Exemple</u>

$\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$; $\bar{5} = 5$ et $\bar{\imath} = -i$.

Théorème.

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$.

Démonstration.

1. D'une part $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 0$ et d'autre part
$$z = \bar{z} \Leftrightarrow x + iy = x - iy \Leftrightarrow y = -y \Leftrightarrow y = 0$$
en vertu du cas d'égalité de deux complexes.
2. z est imaginaire pur si et seulement si $x = 0$. On raisonne comme dans le 1. ■

Théorème. Soit z et z' deux nombres complexes.

1. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{zz'} = \bar{z}\overline{z'}$
3. Pour tout entier naturel n, on a $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

4. Pour $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ (en particulier $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ pour $z \neq 0$)
5. $|\bar{z}| = |z|$
6. $z\bar{z} = |z|^2$
7. $\bar{\bar{z}} = z$

Démonstration. Soit $a + ib$ et $a' + ib'$ les formes algébriques de z et z'.

1. $\overline{z + z'} = \overline{(a + a') + \imath(b + b')} = a + a' - i(b + b') = a - ib + a' - ib' = z + \overline{z'}$.
2. $\overline{zz'} = \overline{(a + \imath b)(a' + \imath b')} = \overline{aa' - bb' + \imath(ab' + a'b)} = aa' - bb' - i(ab' + a'b)$ et par ailleurs $\bar{z}\overline{z'} = (a - ib)(a' - ib') = aa' - bb' - i(ab' + a'b)$ ce qui établit l'égalité.
3. On procède par récurrence sur $n \geq 0$. Pour $n = 0$ c'est clair. Si la propriété est vraie pour un entier n alors d'après la propriété 2, on a $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times z$ et l'hypothèse de récurrence permet alors d'écrire $\overline{z^n} \times z = \bar{z}^n \times \bar{z} = \bar{z}^{n+1}$, ce qui prouve que la propriété est héréditaire.
4. Puisque $z = z' \times \frac{z}{z'}$, il vient d'après la propriété 2, $\bar{z} = \overline{\left(z' \times \frac{z}{z'}\right)} = \overline{z'} \times \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}$. En divisant par $\overline{z'}$, qui est non nul, il vient $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$.
5. On a $|\bar{z}|^2 = |a - ib|^2 = a^2 + (-b)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$.
4. On a $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$.
5. Évident. ■

Exemple

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue z.

a. $z - 3 = i - iz$
b. $\bar{z} - 2z = 1 + 6i$.

Réponse.

a. On isole z :

$$z - 3 = i - iz \Leftrightarrow z + iz = 3 + i \Leftrightarrow z(1 + i) = 3 + i \Leftrightarrow z = \frac{3+i}{1+i}$$

Puis $\frac{3+i}{1+i} = \frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-3i+i-i^2}{1^2-i^2} = \frac{3-2i+1}{1+1} = \frac{4-2i}{2} = 2 - i$. Ainsi $S = \{2 - i\}$.

b. On écrit z sous forme algébrique $a + ib$. On a donc

$$\bar{z} - 2z = 1 + 6i \Leftrightarrow (a - ib) - 2(a + ib) = 1 + 6i \Leftrightarrow -a - 3ib = 1 + 6i.$$

D'après le cas d'égalité de deux complexes, il vient

$$\bar{z} - 2z = 1 + 6i \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ -3b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

et donc $S = \{-1 - 2i\}$.

Exemple

Prouvons que pour tout complexe z, $Z = \frac{(z+\bar{z})^3}{z\bar{z}+1}$ est réel.

Première méthode, en montrant que $\bar{Z} = Z$. On a

$$\bar{Z} = \overline{\left(\frac{(z + \bar{z})^3}{z\bar{z} + 1}\right)} = \frac{\overline{(z + \bar{z})^3}}{\overline{(z\bar{z} + 1)}} = \frac{\left(\overline{(z + \bar{z})}\right)^3}{\bar{z}\bar{\bar{z}} + \bar{1}} = \frac{(\bar{z} + \bar{\bar{z}})^3}{\bar{z}z + 1} = Z.$$

Deuxième méthode, en écrivant $\bar{Z}$ sous forme algébrique. Pour cela, appelons $a + ib$ la forme algébrique de z. Il vient $z + \bar{z} = 2a$ et $z\bar{z} = a^2 + b^2$ donc $Z = \frac{(2a)^3}{a^2+b^2}$ est bien réel.

5. Équations du second degré à coefficients réels

Théorème. Soit l'équation $az^2+bz+c=0$ d'inconnue z où a,b,c sont des nombres réels avec $a\neq 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta=b^2-4ac$.

- Si $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :
$$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$
- Si $\Delta=0$, l'équation admet une solution double réelle : $z_0=-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta<0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées distinctes :
$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Démonstration. Si $\Delta\geq 0$ le résultat a été vu en première, c'est l'égalité
$$az^2+bz+c=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$
qui a permis de montrer le résultat.
Si $\Delta<0$, on a $-\Delta>0$ et donc $\Delta=-\left(\sqrt{-\Delta}\right)^2$ ou encore $\Delta=\left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$, si bien que cette relation permet d'écrire
$$az^2+bz+c=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]=a\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$
et l'équation-produit admet bien les racines annoncées. ■

Dans tous les cas, il est plus simple de retenir ce résultat sous la forme suivante.

Théorème. Soit l'équation $az^2+bz+c=0$ d'inconnue z où a,b,c sont des nombres réels avec $a\neq 0$ et soit δ un complexe tel que $\delta^2=\Delta$. Cette équation possède deux solutions (éventuellement confondues) qui sont $z_1=\frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+\delta}{2a}$.

Exemple

Résolvons l'équation $z^2-2z+4=0$. On a $\Delta=2^2-4\times 1\times 4=-12=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$, donc cette équation admet deux solutions complexes, à savoir
$$z_1=\frac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3} \text{ et } z_2=1-i\sqrt{3}.$$